

## 2021 - E3A - MP - MATHÉMATIQUES UNIQUE

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

## Exercice 1.

Dans tout l'exercice,  $I$  est le segment  $[0, 1]$  et  $f$  la fonction définie sur  $I$  par :  $x \mapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies sur  $I$  par :

•  $\forall x \in I, f_0(x) = 1$ .

•  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f$  et toutes les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $I$ .

2. On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$ .

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur  $I$  vers une fonction que l'on déterminera.

3. Etudier les variations de la fonction  $\varphi$  continue sur  $I$ , définie pour tout  $t \in ]0, 1]$  par  $\varphi(t) = t \ln(t)$ .

4. Représenter graphiquement la fonction  $\varphi$  sur  $I$  en précisant les tangentes aux bornes.

5. Démontrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement sur  $I$ .

6. On pose pour tout réel  $x$  et lorsque cela est possible  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

6.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $\Gamma$ .

6.2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\Gamma(n+1)$ .

7. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer l'intégrale  $J_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ .

On pourra effectuer le changement de variable  $u = -\ln(t)$ .

8. On pose  $J = \int_0^1 f(t) dt$ . Montrer que l'on a :  $J = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$ .

9. Trouver un rang  $n_0$  pour lequel la somme partielle d'ordre  $n_0$  sera une valeur approchée de  $J$  à  $10^{-6}$  près.

## Exercice 2.

Soient  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  dont le produit scalaire est noté  $(\cdot | \cdot)$  et la norme  $\| \cdot \|$ .

On note  $\text{Id}_E$  l'endomorphisme identité de  $E$  et  $\theta$  l'endomorphisme nul de  $E$ .

1. Soit  $f$  un endomorphisme symétrique de  $E$  que l'on suppose non inversible et non nul.

1.1. Citer le **théorème spectral**.

1.2. Montrer que 0 est valeur propre de  $f$  et que  $f$  admet au moins une valeur propre non nulle.

1.3. Montrer que les sous-espaces  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont orthogonaux.

Sont-ils supplémentaires ? On justifiera la réponse.

**On suppose désormais et jusqu'à la fin de l'exercice** que  $f$  admet exactement  $k+1$  valeurs propres deux à deux distinctes  $(\lambda_j)_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket}$  avec :

$$k \geq 1, \quad \lambda_0 = 0 \text{ et } 0 < |\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_k|.$$

Pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , on note  $E_j$  le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_j$  et  $p_j$  le projecteur orthogonal sur  $E_j$ .

1.4. Montrer que  $\text{Id}_E = \sum_{j=0}^k p_j$ .

1.5. Prouver que l'on a pour tout couple  $(i, j)$  de  $[[0, k]]^2$  tels que  $i \neq j$ ,  $p_i \circ p_j = \theta$ .

1.6. Démontrer que :  $f = \sum_{j=0}^k \lambda_j p_j$ .

1.7. Soit  $p$  le projecteur orthogonal sur  $\text{Im}(f)$ . Montrer que l'on a :  $p = \sum_{j=1}^k p_j$ .

On note alors  $f^I$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :  $f^I = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} p_j$ , appelé **inverse généralisé** de  $f$ .

## 2. Quelques propriétés de l'inverse généralisé.

2.1. Montrer que l'on a :  $f \circ f^I = p$ .

En déduire que :  $\forall (x, y) \in E^2, (f(x) = p(y) \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \text{Ker}(f))$ .

2.2. Soit  $y$  un vecteur de  $E$ .

Montrer que l'on a :  $\forall x \in E, (\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \text{Ker}(f))$ .

## 3. Application à un exemple.

On prend  $E$  un espace euclidien de dimension 4 et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  une base orthonormale de  $E$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est :  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

3.1. Justifier que  $f$  est un endomorphisme symétrique, non nul et non inversible.

3.2. Montrer que 2 est valeur propre double de la matrice  $A$ .

3.3. En déduire que  $f$  admet exactement 3 valeurs propres :  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ .

On note pour tout  $j \in [[0, 2]]$ ,  $M_j$  la matrice de  $p_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

3.4. Justifier que l'on peut écrire  $A$  sous la forme :  $A = 2M_1 + 4M_2$ .

3.5. Montrer que  $E_2$  est de dimension 1 et déterminer un vecteur  $v_2$  de  $E_2$  tel que  $\|v_2\| = 1$ .

3.6. Démontrer que :  $\forall x \in E, p_2(x) = (x|v_2)v_2$ .

3.7. Déterminer la matrice  $M_2$ .

4. En déduire la matrice associée à  $f^I$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

## Exercice 3.

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$  définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

Pour  $|t| < 1$ , on définit les fonctions génératrices de  $X$  et de  $Y$  respectivement par :

- $G_X(t) = \frac{1}{2-t}$ .
- $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t}$ .

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction  $G_X$ .

2. Donner le terme d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  du développement en série entière de la fonction  $t \mapsto (1+t)^{1/2}$ .

3. En déduire le développement en série entière de la fonction  $G_Y$ .

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $\mathbb{P}(X = n)$  et  $\mathbb{P}(Y = n)$ .

5. Soient  $S = X + Y$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $\mathbb{P}(S = n)$ .

### 6. Calculs d'espérances et de variances.

6.1. Justifier que la variable aléatoire  $X + 1$  suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.

6.2. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $X$ .

6.3. Déterminer à l'aide de la fonction génératrice  $G_Y$  l'espérance des variables aléatoires  $Y$  et  $Y(Y-1)$ .

6.4. En déduire la variance de la variable aléatoire  $Y$ .

6.5. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $S$ .

**Exercice 4.**

Dans tout l'exercice,  $n$  est un entier naturel non nul.

Soit  $\varphi$  l'application qui à tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  associe  $\varphi(P) = \int_0^1 P(t) dt$ .

1. Démontrer que  $\mathcal{B} = (1, X - 1, X(X - 1), \dots, X^{n-1}(X - 1))$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. **Généralités sur  $\varphi$ .**

2.1. Démontrer que  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2.2. Déterminer  $\text{Im}(\varphi)$  et la dimension du noyau de  $\varphi$ .

3. On considère alors l'application  $\psi$  qui à tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  associe le polynôme  $Q$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t) dt.$$

3.1. Justifier que l'application  $\psi$  est linéaire.

3.2. Démontrer que  $\text{Im}(\psi) = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^{n+1})$ .

3.3. Démontrer que :  $P \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \text{Vect}(X(X - 1), \dots, X^n(X - 1))$ .

3.4. Donner alors une base de  $\text{Ker}(\varphi)$ .

4. On note  $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ .

4.1. Donner la dimension de  $\mathcal{H}$ .

4.2. Pour  $k \in [0, n]$ , soit  $\psi_k$  la forme linéaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$  qui à tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  associe  $\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ .

Démontrer que la famille  $(\psi_0, \dots, \psi_n)$  est une base de  $\mathcal{H}$ .

4.3. Déterminer les composantes de  $\varphi$  dans cette base.