

2021 - E3A - MP - MATHÉMATIQUES UNIQUE

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0, 1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \mapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur I par :

• $\forall x \in I, f_0(x) = 1$.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I .

2. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$.

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction que l'on déterminera.

3. Etudier les variations de la fonction φ continue sur I , définie pour tout $t \in]0, 1]$ par $\varphi(t) = t \ln(t)$.

4. Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.

5. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur I .

6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

6.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ .

6.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(n+1)$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale $J_n = \int_0^1 f_n(t) dt$.

On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$.

8. On pose $J = \int_0^1 f(t) dt$. Montrer que l'on a : $J = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

9. Trouver un rang n_0 pour lequel la somme partielle d'ordre n_0 sera une valeur approchée de J à 10^{-6} près.

Exercice 2.

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $(\cdot | \cdot)$ et la norme $\|\cdot\|$.

On note Id_E l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E .

1. Soit f un endomorphisme symétrique de E que l'on suppose non inversible et non nul.

1.1. Citer le **théorème spectral**.

1.2. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au moins une valeur propre non nulle.

1.3. Montrer que les sous-espaces $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont orthogonaux.

Sont-ils supplémentaires ? On justifiera la réponse.

On suppose désormais et jusqu'à la fin de l'exercice que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_j)_{j \in [0, k]}$ avec :

$$k \geq 1, \quad \lambda_0 = 0 \text{ et } 0 < |\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_k|.$$

Pour tout $j \in [0, k]$, on note E_j le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j et p_j le projecteur orthogonal sur E_j .

1.4. Montrer que $\text{Id}_E = \sum_{j=0}^k p_j$.

1.5. Prouver que l'on a pour tout couple (i, j) de $[[0, k]]^2$ tels que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \theta$.

1.6. Démontrer que : $f = \sum_{j=0}^k \lambda_j p_j$.

1.7. Soit p le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(f)$. Montrer que l'on a : $p = \sum_{j=1}^k p_j$.

On note alors f^I l'endomorphisme de E défini par : $f^I = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} p_j$, appelé **inverse généralisé** de f .

2. Quelques propriétés de l'inverse généralisé.

2.1. Montrer que l'on a : $f \circ f^I = p$.

En déduire que : $\forall (x, y) \in E^2, (f(x) = p(y) \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \text{Ker}(f))$.

2.2. Soit y un vecteur de E .

Montrer que l'on a : $\forall x \in E, (\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \text{Ker}(f))$.

3. Application à un exemple.

On prend E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de E .

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans \mathcal{B} est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1. Justifier que f est un endomorphisme symétrique, non nul et non inversible.

3.2. Montrer que 2 est valeur propre double de la matrice A .

3.3. En déduire que f admet exactement 3 valeurs propres : $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

On note pour tout $j \in [[0, 2]]$, M_j la matrice de p_j dans la base \mathcal{B} .

3.4. Justifier que l'on peut écrire A sous la forme : $A = 2M_1 + 4M_2$.

3.5. Montrer que E_2 est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de E_2 tel que $\|v_2\| = 1$.

3.6. Démontrer que : $\forall x \in E, p_2(x) = (x|v_2)v_2$.

3.7. Déterminer la matrice M_2 .

4. En déduire la matrice associée à f^I relativement à la base \mathcal{B} .

Exercice 3.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour $|t| < 1$, on définit les fonctions génératrices de X et de Y respectivement par :

- $G_X(t) = \frac{1}{2-t}$.
- $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t}$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction G_X .

2. Donner le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$.

3. En déduire le développement en série entière de la fonction G_Y .

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X = n)$ et $\mathbb{P}(Y = n)$.

5. Soient $S = X + Y$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}(S = n)$.

6. Calculs d'espérances et de variances.

6.1. Justifier que la variable aléatoire $X + 1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.

6.2. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .

6.3. Déterminer à l'aide de la fonction génératrice G_Y l'espérance des variables aléatoires Y et $Y(Y-1)$.

6.4. En déduire la variance de la variable aléatoire Y .

6.5. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S .

Exercice 4.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \int_0^1 P(t) dt$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X - 1, X(X - 1), \dots, X^{n-1}(X - 1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. **Généralités sur φ .**

2.1. Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2.2. Déterminer $\text{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ .

3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t) dt.$$

3.1. Justifier que l'application ψ est linéaire.

3.2. Démontrer que $\text{Im}(\psi) = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^{n+1})$.

3.3. Démontrer que : $P \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \text{Vect}(X(X - 1), \dots, X^n(X - 1))$.

3.4. Donner alors une base de $\text{Ker}(\varphi)$.

4. On note $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

4.1. Donner la dimension de \mathcal{H} .

4.2. Pour $k \in [0, n]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

Démontrer que la famille (ψ_0, \dots, ψ_n) est une base de \mathcal{H} .

4.3. Déterminer les composantes de φ dans cette base.