CCP MP Maths 2 2014

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé d'un problème

Partie III : PROBLEME

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur à 1. On désigne par $\mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ dans cet ordre. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ sa transposée.

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle \ | \ \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \ \|$ associée. On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes symétriques de E, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes s de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \ \langle s(x)|y\rangle = \langle x|s(y)\rangle.$$

Un endomorphisme symétrique s de E est dit symétrique positif (respectivement symétrique défini positif) si :

$$\forall x \in E, \ \ \langle s(x)|x\rangle \geq 0 \ \ (\text{respectivement } \forall x \in E \setminus \{0\}, \ \ \langle s(x)|x\rangle > 0).$$

Une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ \ {}^tXSX \geq 0 \ \ (\text{respectivement } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \ \ {}^tXSX > 0).$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'un endomorphisme s de E est symétrique (respectivement symétrique positif, symétrique défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de E est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).

On admet que, pour tous réels positifs $a_1, \cdots, a_n$,

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \ \text{(inégalité arithmético-géométrique)}.$$

Objectif du problème

On se donne une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \mathrm{Tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices.

Questions préliminaires

III.1.

III.1.a Enoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien E et sa version relative aux matrices symétriques réelles.

III.1.b Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable ? On pourra par exemple considérer la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

III.2. Soit $s \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

Soit $\beta = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, ϵ_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. Pour tout vecteur x de E, on pose :

$$R_x(x) = \langle s(x)|x\rangle.$$

III.2.a Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β.

III.2.b En déduire l'inclusion : $R_s(S(0,1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ où $S(0,1)$ désigne la sphère unité de E.

III.3.

III.3.a On suppose dans cette question que s est symétrique positif (respectivement symétrique défini positif). Démontrer que les valeurs propres de s sont toutes positives (respectivement strictement positives).

III.3.b Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

On note s l'endomorphisme de E représenté par S dans la base canonique $B = (e_1, \cdots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \;\; \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n.$$

Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.4. Démontrer que l'application $M \mapsto {}^tMM - I_n$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.5. Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \;\; |a_{i,j}| \leq 1.$$

III.6. En déduire que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.7. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.
Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \operatorname{Tr}(AS)$.

III.7.a Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \operatorname{Tr}(B\Delta).$$

III.7.b Démontrer que l'application T de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ que l'on notera t.

III.7.c Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leq \operatorname{Tr}(S)$, puis déterminer le réel t.

Inégalité d'Hadamard

Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

III.8. Démontrer l'inégalité valable pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$\det(S) \leq \left(\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(S)\right)^n \quad (*).$$

III.9. Soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = {}^tDSD$. Démontrer que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\operatorname{Tr}(S_\alpha)$.

III.10. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1 \leq i \leq n$, on pose $\alpha_i = \dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité $(*)$, démontrer que :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.$$

III.11. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$. Démontrer que $\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^{n}(s_{i,i} + \varepsilon)$, puis conclure que :

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i} \ \text{(inégalité d'Hadamard).}$$

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, et $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \Omega\Delta\, {}^t\Omega$. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

III.12. Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{U}$, la matrice $B = {}^t\Omega A \Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant :

$$\operatorname{Tr}(AS) = \operatorname{Tr}(B\Delta).$$

III.13. Démontrer que $\{\operatorname{Tr}(AS) \setminus A \in \mathcal{U}\} = \{\operatorname{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m.

III.14. Démontrer que, si $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$:

$$\operatorname{Tr}(B\Delta) \geq n(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}(b_{1,1} \cdots b_{n,n})^{1/n}.$$

III.15. En déduire que, pour $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$, $\operatorname{Tr}(B\Delta) \geq n(\det(S))^{1/n}$.

III.16. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on pose $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k}(\det(S))^{1/n}$ et $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$.

Déterminer le réel m.

Fin de l'énoncé

2021 - E3A - MP - Mathématiques Unique

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0,1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \mapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

- $\forall x \in I,\ f_0(x) = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I.
2. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$.
   Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction que l'on déterminera.
3. Etudier les variations de la fonction φ continue sur I, définie pour tout $t \in]0,1]$ par $\varphi(t) = t\ln(t)$.
4. Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.
5. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I.
6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
   6.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.
   6.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(n+1)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$.
   On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$.
8. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$. Montrer que l'on a : $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.
9. Trouver un rang n_0 pour lequel la somme partielle d'ordre n_0 sera une valeur approchée de J à 10^{-6} près.

2017 - E3A - MP - Mathématiques Unique

EXERCICE n° 2

Dans tout l'exercice α désigne un réel strictement supérieur à 1.

1. Soit un entier n strictement positif.
   (a) Justifier l'existence de l'intégrale notée I_n égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\,\mathrm{d}t$.
   (b) En effectuant le changement de variable $t = \left(\dfrac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'intégrale I_n, montrer que l'application $u \longmapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\,\mathrm{d}u$ en fonction de l'intégrale I_n.
   (c) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geqslant 0, \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u.$$
2. Déterminer la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n$ pour $u \geqslant 0$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la suite (v_n) par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\,\mathrm{d}u.$$

(a) Montrer, en justifiant avec soin, que la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers plus l'infini est égale à $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ où $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u$.

(b) En déduire un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers plus l'infini.

4. (a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$ où I_n est la suite définie à la question 1).

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que : $|x| < R$, on note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$. Montrer, en précisant avec soin le théorème utilisé, que :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha - x}\,\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad |x| < R.$$

2019 - E3A - MP - Mathématiques Unique

1 Exercice 3.

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer :

$$2\cos(p)\cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \quad \text{et} \quad 2\sin(p)\cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

Soit α un réel non nul fixé.
Pour tout entier naturel n, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathbb{D}$ de la fonction $C : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$.
2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sur $\mathbb{D}$.
3. Donner pour tout $x \in \mathbb{D}$ une expression de $C(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.
4. Pour tout entier naturel n, on note :

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)C(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)C(x)\mathrm{d}x$$

4.1 Calculer J_n puis I_n.
4.2 Déterminer $\lim_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
5. On pose enfin, lorsque cela existe, $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Table des matières

Séance 14 mars Où l'on apprend à réviser un chapitre Séries entières

Prérequis : Suites et séries de fonctions, famille sommable (pour le produit de Cauchy), intégration sur un intervalle, théorème d'inversion divers et variés.

1 Le cours , les démonstrations à savoir refaire, les règles d'or

1.1 liste des théorèmes/définitions à connaitre

Définition du rayon de convergence à l'aide d'un sup, caractérisation du rayon de convergence parla notion de convergence.

Lemme d'Abel et ses conséquences pour étudier un rayon de convergence.

Utilisation de la règle de d'Alembert (surtout quand a_n est défini par récurrence ou avec des! **Ne pas oublier $x \neq 0$ et les $||$**

Si pour tout n $|a_n| \leq b_n$ que dire des rayons respectifs. Relation de comparaison et rayon de convergence.

Mode convergence d'une série entière : être capable de dire une phrase en français correcte.

Régularité de la somme d'une série entière : continuité sur la boule ouverte, classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.

Complément au cours : être capable de donner des exemples de séries entières de rayon $+\infty$, 0, 2, et 1 mais aussi de rayon 1 mais d'ensemble réel de convergence. $[-1, 1]$ $]-1, 1[$, $[-1, 1[$, $]-1, 1]$.

Connaitre parfaitement la formule de Taylor avec reste sous forme intégrale, savoir que DSE c'est équivalent au reste intégral tend vers 0. Savoir au minimum que ce n'est pas toujours vrai.

1.2 Démonstration du cours exigible

Lemme d'Abel, continuité sur la boule ouverte, dérivabilité sur $]-R, R[$

1.3 Une démonstration plus délicate

Revoir si assez de temps : $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.

1.4 Les erreurs classiques

Dire q'une série entière convergence uniformément sur le disque ouvert de convergence.

Après avoir trouvé que l'ensemble de définition est $[-R, R]$ penser que l'on peut appliquer les théorèmes d'analyse sur $[-R, R]$ (par exemple le théorème d'intégration terme à terme.)

Oublier des modules/valeurs absolues.

2 Les exercices de la banque ccinp

Exercices 18 à 24 et 51

3 Trois compléments super classiques

3.1 le cas facile

théorème Hors programme Si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n$ est absolument convergente alors la somme de la série est une fonction définie et continue sur $[-R, R]$ (au moins). Application aux séries génératrices. Applications à $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2} x^n$.

3.2 le TSSA le retour

Le cas de semi convergence : un exemple vaut mieux qu'un long discours

On définit en cas de convergence $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n$, montrer que f est continue sur $]-1, 1]$.

3.3 limite en $+\infty$ cas où $a_n \geqslant 0$

Enfin le problème : montrer qu'une limite est égale à $+\infty$, ici encore un exemple vaut mieux qu'un long discours

On définit en cas de convergence $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$, montrer que $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$. Deux points clefs : monotonie de f et par majoration d'une somme partielle par une somme infinie.

Enfin avant d'aborder le problème suivant : ne pas oublier les valeurs absolues et ne pas faire d'erreur dans les inégalités ou les équivalents. Pour cela testez ce que vous écrivez en prenant des réels très proche de 1 ou de $+\infty$.

Remarque pour les plus avancés vous pouvez réviser la transformation d'Abel qui permet de démontrer le théorème de convergence radial.

4 E3A 2006 MP

Soient deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à termes strictement positifs et telles que : $a_n \sim_{+\infty} b_n$. On suppose d'autre part que la fonction $f : t \mapsto f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est définie sur $\mathbf{R}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $g : t \mapsto g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$?

2. Justifier l'existence d'une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0 et telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = b_n (1 + \gamma_n)$$

3. Soit $m \in \mathbf{N}$.

3.1 Prouver l'existence de $\delta_m = \operatorname{Sup}_{n\geqslant m} |\gamma_n|$.

3.2 Montrer que :

$$\forall t > 0, \forall m \in \mathbf{N}, \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| \leqslant \delta_m + \frac{1}{b_{m+1} t^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n| \, b_n t^n.$$

3.3 En déduire que : $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$.

Applications :

4. Soit h la fonction définie par : $t \mapsto h(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n!} t^n$.

4.2 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.

4.2. Trouver un équivalent de $h(t)$ au voisinage de $+\infty$.

5. Soit (E) l'équation différentielle définie sur $\mathbf{R}$:

$$ty''(t) + (1-t)y'(t) = 1$$

5.1. Démontrer que (E) possède une unique solution z développable en série entière à l'origine telle que : $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$.

Préciser les coefficients de ce développement.

5.2. Donner une expression simple de $z'(t)$ pour $t > 0$.

5.3 Trouver un équivalent de $z(t)$ au voisinage de l'infini.

5 un problème niveau ccinp

PROBLÈME

Introduction

Dans ce sujet, une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions L_a : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$

Q4. Soit $x \in]-1,1[$, donner un équivalent de $1-x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

Remarque : la série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $]-1,1[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un point x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $]-1,1[$.

Q5. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b,b]$ inclus dans l'intervalle $]-1,1[$.

Q6. On pose, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-1,1[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]-1,1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

Q7. Expression sous forme de série entière.

On note $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right) \text{ où } I_n = \{(k,p)\in A, kp = n\}.$$

Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable.

En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \displaystyle\sum_{d|n} a_d$.

($d|n$ signifiant d divise n).

Partie II - Exemples

Q8. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n. Exprimer pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

Q9. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, $a_n = \varphi(n)$ où n est le nombre d'entiers naturels premiers à n et inférieurs à n.
Justifier que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est de rayon 1.
On admet que pour $n \geqslant 1$, $n = \displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.
Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous forme d'un quotient de deux polynômes.

Q10. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Q11. Dans cette question et la suivante, pour $n \geqslant 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1,1[$,
$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.
En utilisant le théorème de la double limite calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question **Q6.**

Q12. Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \dfrac{-\ln 2}{1-x}$.
On pourra remarquer que pour $x \in]0,1[$, $\dfrac{1-x}{1-x^n} = \dfrac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$.

6 Un sujet en lien avec les dénombrements

d'apèrs mines-Ponts 1999 psi

Introduction

Une serrure de sécurité possède n boutons numérotés de 1 à n ($n \geqslant 1$). Une "combinaison" consiste à pousser dans un certain ordre tous les boutons. Chaque bouton n'est poussé qu'une seule fois mais il est possible de pousser simultanément plusieurs boutons.

La modélisation est effectuée de la manière suivante : pour une valeur donnée de l'entier n, soit A_n l'ensemble des entiers de 1 à n :

$$A_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Par définition une n-combinaison est une suite ordonnée $(P_1, P_2, \ldots, P_j)$ de j parties P_1, P_2, ..., P_j de l'ensemble A_n, ($1 \leq j \leq n$) ; ces parties P_i, $1 \leq i \leq n$, de A_n sont deux à deux disjointes et différentes de la partie vide ; leur réunion est égale à A_n.

Soit a_n le réel égal au nombre de n-combinaisons.

Exemples :
$n=1$: une seule 1-combinaison : $(\{1\})$; $a_1=1$.
$n=2$: il y a trois 2-combinaisons :

$$(\{1\},\{2\});(\{2\},\{1\});(\{1,2\}).$$

La première 2-combinaison consiste à appuyer d'abord sur le bouton 1 puis sur le bouton 2, la deuxième à appuyer d'abord sur le 2 puis sur le 1, la troisième à appuyer simultanément sur les boutons 1 et 2. $a_2=3$.

Première partie.

1) Le but de cette partie est de donner quelques exemples de n-combinaisons et d'établir une relation de récurrence vérifiée par les réels a_n, $n\geqslant 1$.

a) Premiers exemples :

i. Pour une valeur de l'entier n donné, quel est le nombre de n-combinaisons telles que les boutons soient poussés l'un après l'autre ? (les parties P_i, $1\leq i\leq n$, sont toutes des singletons).

ii. Déterminer, lorsque l'entier n est égal à 3, en explicitant chacune des suites possibles, le nombre a_3 des 3-combinaisons. Les singletons $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$ peuvent être désignés brièvement par 1, 2 et 3. Par exemple : $(1,3,2)$ désigne la 3-combinaison dans laquelle les boutons sont poussés successivement dans l'ordre 1, 3, 2 ; $(\{1,3\},2)$ est la suite dans laquelle les deux boutons 1 et 3 sont poussés simultanément avant que le bouton 2 ne soit enfoncé.

b) Relations de récurrence :

L'entier n est supérieur ou égal à 1. Soit S une n-combinaison quelconque ; S est une suite ordonnée $(P_1,P_2,\ldots,P_j)$ de j parties P_1, P_2, …, P_j de l'ensemble A_n, deux à deux disjointes, non vides, dont la réunion est égale à A_n $(1\leq j\leq n)$.

i. Combien y a-t-il de choix possibles pour la partie P_1 lorsque le nombre d'éléments de P_1 est k $(\mathrm{Card}\,P_1=k)$?

ii. Soit k un entier strictement inférieur à n $(k<n)$; pour une partie P_1 fixée possédant k éléments $(\mathrm{Card}\,P_1=k)$, combien y a-t-il de n-combinaisons S ? Exprimer le résultat à l'aide du réel a_p, pour une valeur convenable de l'entier p.

iii. Le but de cette question est d'établir une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $(a_p)_{p\geqslant 1}$. Exprimer d'abord le réel a_n, en fonction des réels a_p, $1\leq p\leq n-1$. Puis avec la convention $a_0=1$, exprimer le réel a_n pour $n\geqslant 1$, en fonction des réels a_p, $0\leq p\leq n-1$.
Retrouver les valeurs obtenues ci-dessus pour a_2 et a_3.

iv. Soit $(b_p)_{p\geqslant 0}$ la suite des réels définis par la relation : pour tout entier naturel n, $b_n=\dfrac{a_n}{n!}$.
Démontrer que ces réels b_p, $p\geqslant 0$, vérifient la relation de récurrence :

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{n-k}}{k!}$$

c) Majoration des réels b_n, $n\geqslant 0$:

Démontrer, pour tout entier naturel n, la relation suivante : $b_n\leq\dfrac{1}{(\ln 2)^n}$.

Deuxième partie

2) L'objet de cette partie est l'étude de la série entière de terme général $b_n x^n$, $n \geqslant 0$. Cette série est appelée série génératrice de la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$. Lorsque le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n x^n$, $n \geqslant 0$, est strictement positif, soit f la somme de la série ; cette fonction est définie dans l'intervalle de convergence par la relation suivante : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$.

a) Existence et expression de la fonction f :

i. Donner une minoration du rayon de convergence R de la série entière de terme général $b_n x^n$, $n \geqslant 0$?

ii. Soit $c_n x^n$, $n \geqslant 0$, le terme général de la série produit de Cauchy de la série exponentielle et de la série de terme général $b_n x^n$, $n \geqslant 0$. Déterminer l'expression de c_n suivant que l'entier n est nul ou supérieur ou égal à 1.

En déduire, pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 2}\right[$, $f(x) = \frac{1}{2 - e^x}$

b) Une expression du coefficient a_n :

i. Soit x un réel tel que $|\, x \,| < \ln(2)$. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on note $u_{p,q} = \frac{q^p x^p}{p! 2^{q+1}}$.

Montrer que la famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii. En sommant de deux manières différentes cette famille , donner une expression du coefficient a_n comme somme d'une série.