Quelques exercices de topologie

Le minimum
Montrer que

$$F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 - 2xy + 3y^3 = 7\}$$

est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
A cette occasion revoir la démonstration de $\mathcal{O}_n$ est un fermé.
adhérence, intersection..
Soient A une partie ouvert et B une partie d'un espace vectoriel normé E.
a) Montrer que $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.
b) Montrer que $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$.
indication
a) Il faut trouver une suite d'éléments de $A \cap B$ qui converge vers x...et on dispose d'une suite qui fonctionne presque. Utilisez que A est ouvert
b) Utilisez a)
Ouverts fermés d'espaces de suites
On munit l'espaces des suites bornées de la norme infinie.
a) Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un fermés des suites bornées
Indication : on a un théorème dans le cours, quel chapitre suites de fonctions. C'est un peu tiré par les cheveux mais ça passe.
b) Montrer que l'ensemble des suites (u_n) telle que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est absolument convergentes n'est pas un fermé.
indication : il faut prendre des séries bien connues , convergentes mais de moins en moins convergentes. Attention on exhibe un contre-exemple il y a bcp de choses à justifier.
Dans le même genre non traité en td
Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ de $\mathbb{C}$ telles que la série $\sum |a_n|$ converge. Si $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ appartient à E, on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

a) Montrer que $\|\,.\,\|$ est une norme sur E.
b) Soit

$$F = \left\{ a \in E / \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$$

L'ensemble F est-il ouvert ? fermé ? borné ?
Un résultat étonnant sans lequel je ne sais pas faire certains exos
a) Soit z un nombre complexe et λ un réel montrer
$|z - \lambda| \geqslant \left|\mathrm{Im}(z)\right|$
b) Soit P un polynôme unitaire de degré n. Montrer l'équivalence

$$P \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant \left|\mathrm{Im}(z)\right|^n$$

c) En déduire, que l'ensemble des polynôme unitaires scindés sur $\mathbb{R}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$.
indication pour c) : on considère des suites de polynômes qui convergent et qui vérifient la propriété b) , reste à vérifier que la limite aussi . C'est plus facile que b).
Densité : le classique
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, on pourra considérer, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices $A - \dfrac{1}{p} I_n$.
(Pourquoi $A - \dfrac{1}{p} I_n$ sont elles inversibles pour p assez grand ?)
Compacité Le minimum
Montrer que $\mathcal{O}_n(R)$ est une partie compacte.

Je redonne ici l'énoncé ccinp 2014 où cette question intervient
On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
[III.4.] Démontrer que l'application $M \mapsto {}^tMM - I_n$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
[III.5.] Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \ \ |a_{i,j}| \leqslant 1.$$

[III.6.] En déduire que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La suite Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \mathrm{Tr}(AS)$.
S est une matrice symétrique fixée voir le sujet original si besoin [III.7.a] Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta).$$

[III.7.b] Démontrer que l'application T de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ que l'on notera t.
[III.7.c] Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leqslant \mathrm{Tr}(S)$, puis déterminer le réel t. **Un exo qui ne sert pas à grand chose à part vérifier le cours**
Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $(u_n + \dfrac{1}{2}u_{2n})_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
Montrer que si a est une valeur d'adhérence non nulle de (u_n) alors $-2a$ l'est aussi. En déduire que (u_n) ne serait pas bornée. Conclure en précisant le théorème du cours.
(le théorème du cours est très puissant, on l'utilise rarement mais quand on en a besoin il est indispensable)
Et enfin
autour des valeurs propres
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les coefficients sont positifs. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ on écrit $x \leqslant y$ si $\forall i, x_i \leqslant y_i$.
Soit

$$S = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \lambda x \leqslant Ax\}$$

a) Soit $\lambda \in S$, montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$0 \leqslant x, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \text{ et } \lambda x \leqslant Ax.$$

b) Soit λ une valeur propre complexe. Montrer $\mid \lambda \mid \in S$.
c) Montrer que S est majorée et expliciter un majorant
d) Montrer que S est une partie compacte.
indication Pour fermé on utilise des suites λ_n , qui donne des suistes x_i qui n'ont aucune raison de converger mais ces réels évoluent dans un compact donc BW
e) Justifier qu'il existe α =max$S$. Montrer que α est une valeur propre de A strictement positive associée à un vecteur propre strictement positif. (il faut considérer aussi $z = Ax$) Indication on a une égalité par définition de α, on suppose que α n'est pas une valeur propre alors considérer $y = Ax - \alpha x$ qui est alors non nul et qui devrait améliorer le record...(il faut considérer aussi $z = Ax$) tout cela est un peu difficile (exo oraux centrale mp)