1 Mardi

Exercice 1 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ soit bornée. On pose $B_p = \dfrac{1}{p}\left(I_n + A + \cdots + A^{p-1}\right)$

1. Etablir la convergence de $(B_p x)_{p\in\mathbb{N}}$ lorsque $x \in \ker(A-I)$ et lorsque $x \in \operatorname{Im}(A-I)$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^n = \ker(A-I) \oplus \operatorname{Im}(A-I)$.
3. Démontrer la convergence de $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et caractériser géométriquement sa limite.

2 mercredi

Exercice 2

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A^p)_{p\geqslant 0}$ converge. Montrer que sa limite est projecteur.
2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^2 = 2A + I_n$. Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $3A^3 = I_n + A + A^2$. Montrer que $(A^p)_p$ est une suite convergente. Déterminer sa limite.

3 jeudi

Exercice 3 Soit $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$, $k \in [0,1[$ et $\|\|$ une norme sur $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\quad \|Ax\| \leqslant k\|x\|$.

1. Montrer que la matrice $I_p - A$ est inversible.
2. On considère la suite définie par $X_0 \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et la récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\quad X_{n+1} = AX_n + B$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(I_p - A)^{-1}B$.

4 vendredi

Exercice 4 On considère les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1 + y_n + \sin(x_n)}{3} \\ y_{n+1} = \dfrac{2 + x_n + \sin(y_n)}{4} \end{cases}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \|(x_{n+1}, y_{n+1}) - (x_n, y_n)\|_\infty \leqslant \dfrac{2}{3}\|(x_n, y_n) - (x_{n-1}, y_{n-1})\|_\infty$.
2. Prouver que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 5

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\quad k \in \{0,..,n\},\quad \dbinom{n}{k} \leqslant \dfrac{n^k}{k!}$.
2. Montrer que $\forall A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{C}),\quad \forall n \in \mathbb{N}^\times,\quad \left\|e^A - \left(I_p + \dfrac{A}{n}\right)^n\right\| \leqslant e^{\|A\|} - \left(1 + \dfrac{\|A\|}{n}\right)^n$.
3. Etablir que la suite $\left(I_p + \dfrac{A}{n}\right)^n$ converge et préciser sa limite.