1 pour mardi

1) revoir le cours de première année et bien comprendre que l'on ne résout pas les équations différentielles : on récite le cours. reste à savoir trouver des primitives.
2) Résoudre sur $]1,+\infty[$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{x}{x^2-1}y = 2x$$

2 pour mercredi

On considère l'équation

$$(E) : (1-x)y' - y = g$$

où $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est donnée.
a) Résoudre l'équation homogène associée.
b) On suppose que la fonction g est développable en série entière

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

de rayon de convergence $R \geqslant 1$.
Montrer que (E) admet au moins une solution développable en série entière en 0,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

de rayon de convergence $R' \geqslant 1$ et exprimer les a_n en fonction de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 pour jeudi

On donne, pour $x > 0$, l'équation différentielle

$$y' - y + \frac{1}{x} = 0.$$

1. Montrer qu'il existe sur l'intervalle $]0,+\infty[$ une unique solution Y_0 bornée quand x tend vers l'infini et exprimer $Y_0(x)$ sous forme d'une intégrale.
Quelle expression donner à la solution générale Y_λ, où $\lambda \in \mathbb{R}$, l'indexation étant telle que pour $\lambda = 0$, on ait la solution bornée Y_0 ? Étudier le comportement de $Y_\lambda(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
On note $\mathbb{C}_\lambda$ la courbe représentative de la solution Y_λ.
Pour tout point $m\,(x_m, y_m)$ du demi-plan $x > 0$, on note Y_m la solution de l'équation vérifiant $Y_m\,(x_m) = y_m$ et $\mathbb{C}_m$ sa courbe représentative.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$ des points m tels que $Y'_m(x_m) = 0$. Même question pour l'ensemble $\mathcal{I}$ des m tels que $Y''_m(x_m) = 0$. Tracer une allure de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{I}$.
3. Quelle est la place de la courbe $\mathbb{C}_0$ représentative de la solution Y_0 par rapport aux courbes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{I}$?
4. Tracer sur un même dessin des ébauches des courbes $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$, $\mathbb{C}_0$, $\mathbb{C}_{\lambda_1}$, $\mathbb{C}_{\lambda_2}$, où λ_1 et λ_2 sont des réels respectivement négatif et positif.

4 pour vendredi

a) Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est définie pour tout $x \in [0,+\infty[$
b) Montrer que la fonction g définie par

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

est définie pour tout $x \in [0,+\infty[$ (on pourra faire une intégration par parties)

c) Montrer que f est de $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

d) Montrer à partir de l'expression obtenue au b) montrer que g est de $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et la même équation différentielle que f (on pourra encore une fois faire une intégration par parties).
e) Montrer que f est continue en 0
(on pourra dominer la fonction sous l'intégrale judicieusement)
f) Montrer que :

$$g(x) - g(0) = -x\int_0^1 \frac{sin(t)}{t(x+t)}\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{xsin(t)}{t(x+t)}\mathrm{d}t$$

et majorant chaque partie , montrer que g est continue en 0.
g) Que dire de l'ensemble des solutions de l'équations différentielles $y'' + y = \dfrac{1}{x}$? Si y_1 et y_2 sont deux solutions donner une expression de $y_1 - y_2$. A quelle condition $y_1 - y_2$ admet t elle une limite finie quand x tend vers $+\infty$?
h) Montrer que f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
I) Majorer $g"(x)$ pour tout x et à l'aide $g(x) = \dfrac{1}{x} - g"(x)$ montrer que g tend vers 0 également quand x tend vers $+\infty$. Conclure que $f = g$
k)Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$