

PROBLEME : Quelques utilisations des projecteurs

Notations et objectifs :

Dans tout le texte, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On note id l'endomorphisme identité de E , $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille n .

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$, on appelle projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 , l'endomorphisme p de E qui, à un vecteur x de E se décomposant comme $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, associe le vecteur x_1 .

On rappelle que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice exponentielle de A est la matrice :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

De même, si u est un endomorphisme de E , l'exponentielle de u est l'endomorphisme :

$$\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} u^k$$

Dans les parties II et III, on propose une méthode de calcul d'exponentielle de matrice à l'aide de projecteurs spectraux dans les cas diagonalisable et non diagonalisable. Dans la dernière partie IV, on utilise les projections orthogonales pour calculer des distances à des parties.

Les quatre parties sont indépendantes.

I. Questions préliminaires

1. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $\exp(A)$, $\exp(B)$, $\exp(A) \exp(B)$ et $\exp(A+B)$ (pour $\exp(A+B)$, on donnera la réponse en utilisant les fonctions ch et sh)

2. Rappeler sans démonstration, une condition suffisante pour que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient l'égalité $\exp(A) \exp(B) = \exp(A+B)$

II. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r$ où r désigne un entier vérifiant $1 \leq r \leq n$

3. *Polynôme interpolateur de Lagrange* : on note $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $r-1$.

On considère l'application linéaire ϕ de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^r$ définie par :

$$P \longmapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_r))$$

Déterminer le noyau de ϕ , puis en déduire qu'il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que pour tout i dans $\{1, \dots, r\}$, $L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.

4. Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}$$

- (a) Calculer $l_i(\lambda_j)$ selon les valeurs de i et j dans $\{1, \dots, r\}$.
 - (b) En déduire une expression du polynôme L comme combinaison linéaire des polynômes l_i avec $i \in \{1, \dots, r\}$
5. *Une propriété de l'exponentielle* : Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (a) Justifier que l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto P M P^{-1}$ est une application continue.
 - (b) En déduire que $\exp(P D P^{-1}) = P \exp(D) P^{-1}$.
6. Déduire des questions Q3 et Q5 que $\exp(A) = L(A)$
7. On suppose que E est muni d'une base $\mathcal{B}$ et on désigne par v l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est A . Soit λ une valeur propre de v , et x un vecteur propre associé. Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(v)(x) = P(\lambda) x$$

8. Soit $i \in \{1, \dots, r\}$, on note $E_i = \ker(v - \lambda_i \text{id})$ le sous-espace propre de v associé à λ_i
- (a) Démontrer que l'endomorphisme de E , $p_i = l_i(v)$ est le projecteur de e , parallèlement à $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r E_k$ (on dit que les p_i sont les projecteurs spectraux de v).
 - (b) En déduire une expression de $\exp(A)$ comme combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

III. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas non diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal est $(X - 1)^2(X - 2)$

- 9. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.
- 10. Écrire, sans justifier, un exemple de matrice triangulaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont l'endomorphisme canoniquement associé a pour polynôme minimal $(X - 1)^2(X - 2)$.
- 11. Démontrer, sans aucun calcul, que $E = \ker(u - \text{id})^2 \oplus \ker(u - 2\text{id})$
- 12. On considère les endomorphismes de E : $p = (u - \text{id})^2$ et $q = u \circ (2\text{id} - u)$. Calculer $p + q$.
- 13. Démontrer que l'endomorphisme p est le projecteur sur $\ker(u - 2\text{id})$, parallèlement à $\ker(u - \text{id})^2$. Que dire de q ?
- 14. Soit x un élément de E .

- (a) Préciser $(u - 2\text{id})(p(x))$.
 - (b) Déterminer un nombre réel α tel que pour tout entier k , $u^k \circ p = \alpha^k p$.
 - (c) En déduire que $\exp(u) \circ p = \beta p$ où β est un réel à déterminer.
15. Que vaut pour tout entier $k \geq 2$, $(u - \text{id})^k \circ q$?
 Démontrer que $\exp(u) \circ q = \gamma u \circ q$ où γ est un réel à déterminer (*on pourra écrire en justifiant que $\exp(u) = \exp(\text{id}) \circ \exp(u - \text{id})$*)
16. Écrire enfin l'endomorphisme $\exp(u)$ comme un polynôme en u .

IV. Calcul de distances à l'aide de projecteurs orthogonaux

Dans cette partie, on suppose en plus que l'espace E est muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle$, ce qui lui confère une structure d'espace euclidien. On rappelle que la norme euclidienne associée, notée $\|.\|$, est définie par :

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E , on note $F^\perp$ son orthogonal, et on appelle projecteur orthogonal sur F , noté p_F , le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

Enfin, si x est un vecteur de E , la distance euclidienne de x à F , notée $d(x, F)$ est le réel :

$$d(x, F) = \inf \{ \|x - y\| \mid y \in F \}$$

17. *Théorème de la projection orthogonale* : soit F un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E . Rappeler sans démonstration, la formule permettant de calculer $d(x, F)$ à l'aide du vecteur $p_F(x)$
18. *Cas des hyperplans* : soit n un vecteur non nul de E et H l'hyperplan de E orthogonal à n , c'est-à-dire $H = (\text{Vect}\{n\})^\perp$. Exprimer pour $x \in E$, la distance $d(x, H)$ en fonction de $\langle x, n \rangle$ et de $\|n\|$.
19. *Une application* : dans cette question uniquement, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique : si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en notant Tr la trace ,

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^t A B)$$

Enfin on note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

- (a) Justifier que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $H^\perp$.
 - (b) Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer la distance $d(M, H)$.
20. *Et pour une norme non euclidienne ?* Dans cette question $E = \mathbb{R}^2$ est muni de la norme infinie notée N_∞ : si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $N_\infty(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. On pose $F = \text{Vect}\{(1, 0)\}$ et $x = (1, 1)$. Déterminer la distance "infinie" du vecteur x à F , c'est-à-dire le réel :

$$d_\infty(x, F) = \inf \{ N_\infty(x - y) \mid y \in F \}$$

et préciser l'ensemble des vecteurs m pour lesquels cette distance est atteinte, c'est-à-dire $d_\infty(x, F) = N_\infty(x - m)$. Commenter.

Fin de l'énoncé