Année 2025

Compilation

1

Exercice Algèbre
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\langle PQ\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

1. Établir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes (P_n) formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1.
2. Étudier la parité des polynômes P_n.
3. Montrer qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}.$$

2
Exercice Algèbre

Soit E le sous ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ défini par $E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que E est une sous-algèbre de $M_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer dim (E).
2. Soit $M(a,b,c)$ un élément de E. Déterminer, suivant les valeurs des paramètres a, b et $c \in \mathbb{R}$ son rang. Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse $M(a,b,c)^{-1}$ de $M(a,b,c)$.
3. Donner une base de E formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

3
Exercice Algèbre
Soit $\phi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \phi(P,Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t)dt$$

1. Montrer que ϕ existe, et que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Calculer $\phi\left(X^i, X^j\right)$, en déduire que $((i+j)!)^2 \leqslant (2i)!(2j)!$.

4
Exercice algèbre
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme admettant 0 comme racine simple, tel que $P(u) = 0$.

Montrer de deux manières différentes que Ker(u)=Ker(u^2), dont l'une utilisant le théorème de décomposition des noyaux.

5
Exercice Algèbre
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C})$ une matrice nilpotente : $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1. Quel est le polynôme caractéristique de A ?
2. Démontrer que $A^n = 0$.
3. Prouver que $\det(A + I_n) = 1$.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C})$ inversible et commutant avec A.
   (a) Que dire de AM^{-1}.
   (b) Montrer que $\det(A + M) = \det(M)$.
   (c) Cette égalité reste-elle vraie pour toutes les matrices commutant avec A ?

6
Exercice Algèbre
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1, (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, et p un projecteur de E.
1. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si il est symétrique.
2. On suppose que p est un projecteur orthogonal. Calculer $\sum\limits_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2$.

7
Exercice Algèbre
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in O(n)$ une matrice orthogonale.

1. Montrer que : $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = n$.
2. Montrer que : $n \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

8

Exercice algèbre
Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. On se place dans $\mathbb{R}^n$ que l'on munit de son produit scalaire canonique. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Lorsque F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\delta(\mathrm{F}) = \max_{i \in [|1,n|]} \mathrm{d}(e_i,\ \mathrm{F})$$

1°) Montrer que l'ensemble

$$\mathrm{G} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Calculer $\dim(G)$ et $\delta(G)$.
2°) On suppose dans cette question que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.
a) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\left(e_i,\ \mathrm{F}\right)^2 = n-k$$

b) Montrer que l'on a $\delta(\mathrm{F}) = \sqrt{\dfrac{n-k}{n}}$ si et seulement si tous les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont équidistants de F.

9
Exercice algèbre
On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que son polynôme caractéristique est $(X-1)^2(X+1)$.
2. Est-elle diagonalisable ?
3. Montrer qu'elle est semblable à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

10
Exercice algèbre
Soient E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E ; on notera $(.\mid.)$ le produit scalaire.
a) On suppose que u possède deux valeurs propres réelles λ et μ de signes opposés. Montrer qu'il existe $z \in E$ non nul tel que $u(z)$ soit orthogonal à z.
b) On suppose u symétrique de trace nulle. Montrer qu'il existe $z \in E$ non nul tel que $u(z)$ soit orthogonal à z.

11
Exercice Algèbre
Pour chaque réel $h > 0$, on note W_h l'ensemble des applications f continues de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{x+h}^{x+2h} f(t)dt = 2\int_{x}^{x+h} f(t)dt.$$

1. Montrer que W_h est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.
2. W_h est-il de dimension finie ?
3. Prouver que $\bigcap_{h>0} W_h = \{0\}$.

12
Exercice Algèbre
Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme défini par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \langle u \mid x\rangle v + \langle v \mid x\rangle u$$

où (u, v) est une famille libre.
Montrer que f est un endomorphisme symétrique et déterminer ses éléments propres.

13

Exercice Algèbre

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A+X) = \det(A) + \det(X).$$

1) Montrer que A n'est pas inversible.
2) Montrer que A est nulle.

14

Exercice Algèbre

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ une application non nulle.
On note

$$G = \{h \in \mathcal{L}(E), f \circ h = 0\} \text{ et } H = \{h \in \mathcal{L}(E), \operatorname{tr}(f \circ h) = 0\}.$$

Prouver que G et H sont des sous-espaces vectoriels dont on donnera la dimension.

15

Exercice Algèbre

1) Rappeler la factorisation de $a^n - b^n$ où a et b sont des entiers.
2) Montrer que si $2^n + 1$ est un nombre premier alors n est une puissance de 2 .($n = 2^p$)
3) Montrer si p et q sont des entiers distincts alors $2^{2^p} + 1$ et $2^{2^q} + 1$ sont premiers entre eux.

16

Exercice Algèbre

Soient $c \in \mathbb{R}$ et $\Omega(c)$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n-1}) = cx_n$$

1°) L'ensemble $\Omega(c)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Le cas échéant, quelle est sa dimension ?
2°) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur c pour que toutes les suites de $\Omega(c)$ soient bornées.

17

Exercice Algèbre

Soient E un espace euclidien de dimension n et un entier naturel $p \geqslant 2$. On considère famille $(x_i)_{i\in[1,p]}$ qui possède la propriété $(\mathcal{O})$ suivante :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad (i \neq j) \quad \Longrightarrow \quad \langle x_i \mid x_j \rangle < 0$$

1°) On note p_1 la projection orthogonale sur $\{x_1\}^{\perp}$. Donner l'expression de $p_1(x)$ pour tout $x \in$ E. Montrer que $(p_1(x_i))_{i\in[2,p]}$ possède la propriété $(\mathcal{O})$.

2°) Montrer que si $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ possède la propriété $(\mathcal{O})$ alors on peut en extraire une famille libre de $p-1$ vecteurs. En déduire une inégalité reliant p et n.

18
Exercice algèbre
Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice $\mathrm{A} = [a_{i,j}]_{i,j\in[1,n]}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ lorsque le polynôme caractéristique de A vaut

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - a_{k,k})$$

On notera $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété P.
1) Montrer que $\mathcal{B}_n$ n'est pas vide.
2°) Soit $\mathrm{A} = [a_{i,j}]_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ une matrice symétrique réelle.
2) Montrer que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{\alpha\in\mathrm{sp(A)}} \alpha^2$$

3) En déduire l'ensemble $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

19
Exercice algèbre
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul. Soit E_X, l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admettent X comme vecteur propre.
(1) Montrer que E_X est un espace vectoriel.
(2) Déterminer l'espace E_X. Quel est sa dimension ?

20
Exercice algèbre
Soient E un espace euclidien, u un vecteur non nul et $H = u^\perp$. Soient p la projection orthogonale sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H.

1. Montrer que $\forall x \in E \qquad p(x) = x - \dfrac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u.$
2. Montrer que $\forall x \in E \qquad s(x) = x - 2\dfrac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u.$
3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le plan $(\Pi : x-y+z=0)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à Π.

21
Exercice Algèbre Soit $M \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(M) = 2n$ et $M^3 = 0$.

Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

22
Exercice Algèbre

Soit $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que la matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -10 \\ -10 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier : $\mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$.
2. Ecrire la matrice de f dans une base orthonormée directe de E formée d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. En déduire la nature géométrique de f.

23

Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endormorphismes antisymétriques c'est à dire
tel que $u^* = -u$.
1) Montrer que $u \in \mathcal{A}(E)$ si et seulement si $\forall x \in E\ (u(x) \mid x) = 0$.
Pour $u \in \mathcal{A}(E)$, quelles sont les valeurs possibles de $\det(u)$?
2) Si $u \in \mathcal{A}(E)$ que peut-on dire de la matrice de u dans une base orthonormée ?
3) Soit F un sous-espace stable par u, montrer que $F^\perp$ est stable par u.

24

Exercice algèbre

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour $P = \sum_{i=0}^{2} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{2} b_i X^i$,

on pose $(P \mid Q) = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i$ on admet que $(.|.)$ définit un produit scalaire.
On pose $F = \{P \in E, P(1) = 0\}$.
1) F est-il un sous-espace vectoriel de E ? Si oui, donner une base de F.
2) Soit $P = X$. Déterminer $\mathrm{d}(P, F)$. On pourra chercher une base orthonormée de F.

25

Exercice Algèbre

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$.
1) Calculer MM^T. En déduire $\det(M)$
2) Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, montrer que $\mathrm{rg}(M) = 4$.
Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, montrer que $\mathrm{rg}(M) = 2$.
3) Soit $w \in \mathbb{C}, w = b^2 + c^2 + d^2$. Quelles sont les valeurs propres de M ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

26

Exercice Algèbre

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Soit p un projecteur (p linéaire et $p^2 = p$). Montrer $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$ et que p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ de direction $\mathrm{Ker}(p)$.

2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = 0$ et $f + g \in GL(E)$ si et seulement si $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im(f)}$.

27

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle.

1) Montrer que si p est un projecteur orthogonaux alors p est auto-adjoint.

2) Soient p et q deux projecteurs orthogonaux.

a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est un endomorphsime auto-adjoint.

b) Montrer que $\Big(\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)\Big)^{\perp} = \mathrm{Im}(q) \bigcap \mathrm{Ker}(p)$.

28

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1) Justifier que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$.

2a) Énoncer des propriétés polynomiales de diagonalisation de matrices.

2b) On suppose que B est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable, puis que $A = 0$.

29

Exercice Algèbre

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si P est scindé, alors P' aussi. Pour cela :

1) Énoncer le théorèreme de Rolle.

2) Si a est une racine d'ordre k de P, quelle est son ordre dans P' ?

3) Montrer le résultat voulu.

30

Exercice algèbre

Soient E et F deux espaces de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

Montrer que

$\dim\big(\mathrm{Ker}(u+v)\big) \leqslant \dim\Big(\mathrm{Ker}(u) \bigcap \mathrm{Ker}(v)\Big) + \dim\ \Big(\mathrm{Im}(u) \bigcap \mathrm{Im}(v)\Big)$.

On pourra considérer la restriction de u à $\mathrm{Ker}(u+v)$

31

1) Soit $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer que $A = \alpha I_2 + N$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ et N telle que $N \neq 0$ et $N^2 = 0$.

2) Résoudre l'équation $M^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

32

Exercice algèbre

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$f\left(a + bX + cX^2\right) = (2a + c)(1 - X^2) + (a + b + c)X.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique.
2) Quelles sont les valeurs propres de A ? A est-elle inversible ?
3) Trouver les vecteurs propres de A.
4) Donner le polynôme minimal de A.

33

Exercice Algèbre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^{2024} = A^{2025}$

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = \mathrm{rg}(A)$.
2) Ce résultat demeure-t-il vrai si A est seulement diagonalisable ?

34

Exercice Algèbre

1) Énoncer le théorème du rang.

Soient f et g des endomorphismes de E un espace vectoriel de dimension finie.

2) On suppose que $g \circ f = 0$. Montrer que rg (f)+ rg$(g) \geqslant n$.
3) On suppose que $g + f$ est bijectif, montrer que rg (f)+ rg$(g) \geqslant n$.

35

Exercice Algèbre

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

a) Rappeler la définition de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
b) Démontrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

36

Exercice algèbre

Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien, on considère la sphère :

$$S_n = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \ ||\vec{x}|| = 1\}.$$

Soient $\vec{x}$, $\vec{y} \in S_n$ où $\vec{x} \neq \vec{y}$.

1) Montrer que $\forall t \in [0, 1], ||t\vec{x} + (1 - t)\vec{y}|| \leqslant 1$.
2) Montrer que $\forall t \in]0, 1[, ||t\vec{x} + (1 - t)\vec{y}|| < 1$.

37

Exercice Algèbre

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et f l'application définie par

$$f(M) = tr(A)M + tr(M)A.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

38

Exercice algèbre
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de f vérifiant :

$$P(0) = 0 \ P'(0) \neq 0.$$

Montrer que l'image et le noyau de f sont supplémentaires.

39

Exercice algèbre
Soient u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.
a) Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de $u \circ v$, montrer que λ est valeur propre de $v \circ u$.
b) En considérant $u(P) = P'$ et $v(P) = \displaystyle\int_0^X P(t)\mathrm{d}t$. endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ montrer que le résultat est faux pour $\lambda = 0$.

40
Exercice Algèbre
Soit u un endomorphisme d'une espace euclidien E. On suppose que $u^* \circ u = u \circ u^*$.
1) Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant cette propriété.
2) Montrer que les endomorphismes u et u^* ont les mêmes sous espaces propres.
3) Montrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

41

Exercice algèbre
Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.
a) Comparer les espaces $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^* \circ u)$.
b) Comparer $\mathrm{Im}\ (u)$ et $\mathrm{Im}(u \circ u^*)$.

42

Exercice Algèbre
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f^2 est un projecteur.
a) Quelles sont les valeurs propres possibles de f.
b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.

43

Exercice Algèbre

Soit p une projection vectorielle d'un espace euclidien. Montrer que la projection p est orthogonale si et seulement si :

$$\forall x \in E ||p(x)|| \leqslant ||x||.$$

44

Exercice Algèbre

Soit a un élément d'ordre n d'ordre d'un groupe multiplicatif $(G, *)$.
a) Montrer que si $d \in \mathbb{N}^*$ divise n alors a^d est d'ordre n/d.
b) Plus généralement, montrer que a^m est d'ordre $n/\text{pgcd}(n, m)$.

45

Exercice Algèbre

On munit $E = \mathcal{C}\Big([-1, 1], \mathbb{R}\Big)$ du produit scalaire :

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} fg.$$

Pour tout $n \in N$
on introduit le polynôme P_n défini par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big(\big(x^2 - 1\big)^n\Big).$$

a) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
b) Montrer que P_n est de degré n et est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur à n.

46

Exercice Algèbre

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ et

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$$

a) Quel est le rang de A ?
b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

47

Exercice algèbre

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par le produit matriciel. On suppose que $I_n \notin \mathcal{H}$.
1) Donner un supplémentaire de $\mathcal{H}$.
2) Montrer que si $M^2 \in \mathcal{H}$ alors $M \in \mathcal{H}$.
3) Aboutir à une contradiction et conclure.

48
Exercice Algèbre
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $f \circ f = 0$. Montrer que $\text{rg}(f) \leqslant 2$.

49
Exercice Algèbre
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M associe $AM - MA$.
1) Démontrer que f est un endomorphisme.
2) Montrer que f est diagonalisable et trouver ses éléments propres.

50
Exercice Algèbre
Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ (où E est un espace euclidien) et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$f\big(F^\perp\big) = \Big(f(F)\Big)^\perp.$$

51
Exercice Algèbre
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $u = f^* \circ f$. Montrer que $f \in \mathcal{S}(E)$. Que dire de ses valeurs propres ?

52
Exercice Algèbre
Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien. Démontrer le résultat du cours :

$$\forall x \in E\ (u(x) \mid x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$$

53
Exercice Algèbre
Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E.
a) Que peut on dire des valeurs propres réelles possibles de u ?
b) Montrer que les sous-espaces propres sont orthogonaux.

54

Exercice Algèbre
Soit $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et B sont orthogonalement semblables si et seulement si $\chi_A = \chi_B$.

55
Exercice Algèbre
Soient $A, B \in \mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\forall i, a_{i,i} \geqslant 0$.

b) Montrer que $\mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}\ (A)\mathrm{tr}(B)$.

56

Exercice Algèbre
Soient a et b deux vecteurs unitaires d'un espace euclidien. On considère l'endomorphisme φ de E défini pour tout $x \in E$ par

$$\varphi(x) = (a \mid x)a + (b \mid x)b$$

Montrer que φ est un endomorphisme auto-adjoint et donner ses éléments propres.

57
Exercice algèbre et analyse
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I un intervalle non réduit à un singleton de $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence :

$$\forall t \in I, \quad \mathrm{e}^{tA} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ ssi } A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

58
Exercice Algèbre
Soit $u : M \in \mathcal{M}_n(R) \mapsto -M + tr(M)I_n$.
1) Déterminer un polynôme annulateur de u.
2) En déduire que u est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres.

59
Exercice Algèbre
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On pose

$$\Gamma_f = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid uof = fou\}$$

a) Montrer que Γ_f est une sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$
b) Montrer que $u \in \Gamma_f \implies \forall \lambda \in Sp(f), E_\lambda(f)$ est stable par u.
c) En déduire la dimension de Γ_f.

60
Exercice algèbre
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A^2 - A$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

61
Exercice algèbre
Soient $A, B \in \mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\forall i, a_{i,i} \geqslant 0$.
b) Montrer que $\mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}\ (A)\mathrm{tr}(B)$.

62
Exercice algèbre
Soit f un endomorphisme de E de dimension 3 tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
Soit $e_1 \notin \ker f^2$, on pose $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = f(e_2)$.
1) montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E.
2) montrer que $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ uof = fou \Longleftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{K}^2,\ u = aId + bf + cf^2$.

63
Exercice Algèbre
Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie .
1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\,(u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable $) \Longrightarrow (u^n$ diagonalisable $)$.
2) Donner et démontrer une inclusion entre $\ker(u - \lambda Id_E)$ et $\ker(u^n - \lambda^n Id_E)$.
3) Soient u et v des endomorphismes de E diagonalisables tels que $u^3 = v^3$ montrer que $u = v$.
4) Est ce toujours vrai sans l'hypothèse de diagonalisabilité ?

64

Exercice Algèbre
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.
1) Quel est le rang de A ? La matrice est elle inversible ?
2) A est elle diagonalisable ?

65
Exercice Algèbre
1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \overline{P\bigl(e^{i\theta}\bigr)} = e^{-in\theta} Q\bigl(e^{i\theta}\bigr).$$

2) En déduire les ploynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P\text{fflbigl}(\mathbb{U}\bigr) = \mathbb{U}$.

66

Exercice algèbre
Soit E un espace euclidien de dimension n. On fixe deux vecteurs u et v de E.
1) Pour tout vecteur x de E, on pose

$$(u \otimes v)(x) = (v \mid x)u$$

a) Justifier que $(u \otimes v)$ est linéaire et donner son rang.
b) Déterminer les éléments propres de $(u \otimes v)$
c) L'endomorphisme $(u \otimes v)$ est-il diagonalisable ?
2) Calculer $\bigl(u \otimes v\bigr)^2$ et retrouver le résultat précédent.
3) Soit g un endomorphsime de E. On note g^* son adjoint.
Montrer que g commute avec $(u \otimes v)$ si et seulement si il existe un réel α tel que
: $g(u) = \alpha u$ et $g^*(v) = \alpha v$.

67

Exercice Algèbre
Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoajoint de E.
1) Soit $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $\forall x \in E\ (v(x) \mid x) = 0$, montrer que $v = 0$.
2) Montrer que tout projecteur orthogonal de E est autoadjoint. Montrer que tout projecteur de $\mathcal{S}(E)$ est un projecteur orthogonal.
3) Soient $u_1, \dots, u_p \in \mathcal{S}(E)$ tels que $rg(u_1) + \cdots + rg(u_p) = n$ et

$$\forall x \in E,\ \sum_{i=1}^{p} (u_i(x) \mid x) = (x \mid x).$$

Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = Id_E$

68
Exercice Algèbre
Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On pose $\varphi_A(X) = {}^T XAX$ où X est vecteur colonne.
1) Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda_1 ||X||^2 \leqslant \varphi_A(X) \leqslant \lambda_n ||X||^2$.
2) trouver une condition nécessaires et suffisante pour que $\varphi^{-1}(\{1\})$ soit un compact non vide.

69
Exercice Algèbre
Soient E un esapce vectoriel de dimension$n$et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples.
1) Montrer que $(Id, u, \dots u^{n-1}$ est libre.
2) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $u \circ v = v \circ u$.
Montrer que $v \in \text{Vect}\Big(Id, u, \dots, u^{n-1}\Big)$.

70

Exercice Algèbre
On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ On considère φ défini par

$$\forall P \in E,\ \varphi(P) = X(X+1)P' - nXP.$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2) Déterminer les éléments propres de . L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

100
Exercice Analyse
Soit $x \in [0, n]$. Montrer que $(1 - x/n)^n \leqslant e^{-x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{x=0}^{n} (1 - x/n)^n\, dx$.

101
Exercice Analyse

(a) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue de limite nulle en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = h$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + f'(x) = l$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

102

Exercice analyse

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in C^0\left([a, b], \mathbb{R}_+\right)$ telle que $\displaystyle\int_a^b f = 1$.

Comparer $\displaystyle\left(\int_a^b tf(t)dt\right)^2$ et $\displaystyle\int_a^b t^2 f(t)dt$.

103
Exercice 2
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle décroissante telle que $\sum u_n$ converge.
Soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = n(u_n - u_{n+1})$.

1. Montrer que $(nu_{n+1})_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. (on pourra étudier d'abord $(nu_{2n})_{n\geqslant 0}$)
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge et déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

104
Exercice Analyse

Soit g définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x(t-1)}{\ln(t)} dt$.

1. Montrer que g est définie sur $]-1, +\infty[$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$.
3. Calculer la limite de g en $+\infty$ et déterminer g.

105
Exercice analyse
On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$
(a) Trouver une relation entre u_n et u_{n+1}.
(b) Trouver le réel α tel que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n) + \alpha \ln(n)$ converge vers une limite ℓ, et donner un équivalent de $v_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

106
Exercice Analyse
Soient a, b deux réels strictement positifs. Déterminer si elle existe :

$$\lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\cos(t)}{t} \mathrm{d}t.$$

107

Exercice Analyse

(a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+b} = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a} \mathrm{d}t.$$

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

108

Exercice Analyse

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan(t))^x dt$

1. Domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est continue et décroissante. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Calculer $f(x) + f(x+2)$ et en déduire un équivalent de f en $+\infty$.

109

Exercice analyse

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

1°) Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2°) Étudier la convergence de $(\mathrm{I}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

110

Exercice

Soit pour $x \geqslant 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln(1 + \frac{x}{n}).$$

1. Justifier que f est bien définie sur $I = [0, +\infty[$ et qu'elle est dérivable sur I.
2. Donner un équivalent de f en 0^+.

111

Exercice 1

Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{1-\mathrm{e}^{-bx}} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$$

112
Exercice Analyse
1-a) Montrer que la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} u_n}$ est convergente. On note ℓ la limite.
b) Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n} (u_n - \ell)$.

113

Exercice Analyse
Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$.
Question 1 Montrer que l'application $x \mapsto F(x)$ est une application de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
Question 2
En remarquant que $F(x) \geqslant \displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$, déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 0$.

114
Exercice Analyse
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue.
Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leqslant ax + b$.

115
Exercice Analyse

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f d'une variable réelle x donnée par :

$$f(x) = \int_0^1 t^x \ln t \, \ln (1-t) \mathrm{d}t.$$

2. Montrer que :

$$\forall x \in]-2, +\infty[, \qquad f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(x+n)^2}$$

116
Exercice Analyse
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on considère l'application $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$.
1) Montrer la convergence simple de la série $\sum u_n$. On note f la somme de cette série.
2) Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

117
Exercice Analyse
a) Montrer que la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin u_n$ est convergente.
b) Trouver $\alpha > 0$ tel que la suite $\left(v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^{\alpha}} - \dfrac{1}{u_n^{\alpha}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive.

c) En déduire un équivalent de u_n, puis la nature de la série $\sum_n u_n$ et de la série $\sum_n (-1)^n u_n$.

118

Exercice Analyse
Soit $n \in \mathbb{N}$.
1) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \exp(n x_n) = 1$
2) Donner la limite de (x_n).

119
Exercice
Soit $\alpha \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^\alpha}$$

1) Etudier la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} u_n$.

2) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ dans le cas $\alpha = 1$.

120
Exercice analyse
On considère l'équation différentielle :

$$y" = (x^4 + 1)y.$$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 1$.
2. On admet dans cette question que $x \mapsto \dfrac{1}{(f(x))^2}$ est définie et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, montrer que $g : x \mapsto f(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{(f(t))^2}$ est solution de l'équation différentielle.

121
Exercice
1) Etudier la série $\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(\dfrac{n^3 + n}{n^3 + n^2}\right)$.
2) Soient P et Q deux polynômes qui n'ont pas de racines entières, étudier

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

.

122

Exercice Analyse
Soient α un réel et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$$

1. On suppose que $\alpha > 1$. Démontrer que la suite (u_n) converge vers 0 .
2. Déterminer, en discutant selon la valeur de α, la limite de la suite (u_n).

123
Exercice
On fixe dans cet exercice un réel $\lambda \in]-1,1[$. On note Ω l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développables en série entière et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x) + f(\lambda x).$$

Montrer qu'il existe des fonctions non nulles dans Ω. Montrer qu'il en existe une seule prenant la valeur 1 en 0 (on la notera g). Décrire Ω à l'aide de g.

124
Exercice analyse
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \left(x^2 + 2y^2\right) \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

a) Déterminer les points critiques de f.
b) Calculer, sous réserve d'existence, le maximum et le minimum global de la fonction f. Déterminer aussi les extremums locaux de f.

125

Exercice Analyse
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction ψ que l'on déterminera.

126
Exercice Analyse
Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

1. Domaine de définition de f. On étudie ensuite f sur $]1,+\infty[$.
2. Etudier la continuité de f et limites de f en 1 et $+\infty$.

s

127
Exercice Analyse

On définit sur $\mathbb{R}_+$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}.$$

1) Montrer que $(f_n)_{n\geqslant n}$ converge simplement vers une fonction notée f que l'on précisera.
2) On pose pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$I_n = \int_0^1 f_n \text{ et } J_n = \int_1^{+\infty} f_n.$$

Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$ et déterminer la limite de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

128
Exercice Analyse
On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).

129
Exercice Analyse
On pose, pour $n \geqslant 3, S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k}$.
(1) Quelle est la nature de cette série ?
(2) Donner un équivalent de S_n quand $n \to +\infty$.

130
Exercice Analyse
Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $\forall t \in [0, 1],\ f_n(t) = \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$ et $a_n = \int_0^1 f_n$.
1) Montrer que (f_n) converge simplement.
2) Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.
3) Etudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$.

131
Exercice analyse
On pose

$$a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{th} t}{t^2} \mathrm{d}t \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

1. Justifier l'existence de a_n.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$

132
Exercice analyse

On pose : $h : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln n}$. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de h, puis montrer que h est continue.

133

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \mathrm{d}t$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} \mathrm{d}t$

1) Justifier l'existence de ces intégrales.

On admet que I_n est constante.

2) Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t) \mathrm{d}t = 0$.

3) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} (I_n - J_n) = 0$ en déduire la valeur de $\lim_{n \to +\infty} J_n$.

134

Exercice Analyse

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x^2 n^2}$ où $x \in \mathbb{R}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de S ?

2) Montrer la continuité de S.

3) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} S(x)$.

4a) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} \mathrm{d}t$ pour $x \in]0, +\infty[$.

☞ On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4b) Donner un équivalent de S en 0.

135

Exercice Analyse

On considère l'équation différentielle :

$$4xy" + 2y' - y = 0 \quad (E).$$

Trouver l'unique solution développable en série entière à l'origine respectant la condition

$$y(0) = 1.$$

136

Exercice Analyse

$$\forall n \in \mathbb{N} \; f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1 + n^2 x^2} \quad \text{pour } x \in [0, 1],$$

$$\text{et } u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

1) (f_n) converge-t-elle simplement sur $[0,1]$? Uniformément ? Y-a-t-il convergnece uniforme sur $[a,1[$, $a>0$?
2) Donner la limite de (u_n) ?

137
Exercice analyse
On pose

$$F(x)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que F est définie sur $]0,+\infty[$.
2) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.
3) Calculer F' sur $]0,+\infty[$.

138
Exercice analyse
1) Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{it}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.
2) En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin(t^2)\mathrm{d}t$.
3) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\sin(t)}{t+\cos\,(t)}\mathrm{d}t$ converge.

139
Exercice Analyse
On définit pour tout $t>0$, $f(t)=\dfrac{\ln(t)}{(1+t)^2}$.
1) Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$, puis sur $[1,+\infty[$.
2) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$

140

Analyse
Soit $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x(1+xn^2)}\mathrm{d}x$.
1) Justifier l'existence de I_n.
2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} I_n$.
3) Trouver un équivalent de I_n.

141

Exercice analyse
On considère la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et

$$u_n=(-1)^n\frac{\cos(u_{n-1})}{n}\text{ pour tout } n\geqslant 1.$$

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

142
Exercice Analyse
Soit $r > 0$. Soit (a_n) la suite définie par

$$a_n = \begin{cases} r^{\sqrt{n}} & \text{si} \quad n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer le rayon de la série entière $\sum a_n x^n$.

143
Exercice Analyse
On note S l'ensemble des suites numériques $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $\sum a_n$ converge et T l'ensemble des suites vérifiant les deux conditions suivantes
1) Le rayon R de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.
2) $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ admet une limite finie quand x tend vers 1^-. Cette limite est notée $l(A)$.
1a) La série de terme $(-1)^n$ est-elle convergente ?
1b) La série de terme général $\dfrac{1}{n!}$ est-elle convergente ?
2a) La suite $(-1)^n$ est-elle dans T ? Si oui quelle est la valeur de $l(A)$
2b) Même question avec la suite $\dfrac{1}{n!}$.

144
Exercice analyse
Soit $f_n(x) = \dfrac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$.
1) Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction g.
2) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
3) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$. Peut on appliquer un des théorèmes du cours d'interversion limite et intégrale ?

145

Exercice analyse
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$.
1) Quel est le domaine de définition de f ?
2) Pour $x \in]0, 1[$, calculer $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+x^2}}$. On pourra utiliser le changement de variable $u = \dfrac{t}{x}$ et utiliser la fonction $t \mapsto \ln\big(t + \sqrt{1+t^2}\big)$.
3) Montrer que $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+x^2}} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.
4) Montrer que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

146

Exercice Analyse
Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\big(xt\big)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
1) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.
2) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leqslant |u|$.
3) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

147

Exercice analyse
1) Donner l'ensemble de définition de F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t} \cos(xt)\mathrm{d}t.$$

2) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition et préciser F'.
3) Exprimer F à l'aide fonctions usuelles.

148
Exercice Analyse
On suppose que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 1 + \int_0^x f(t)\cos\big(x-t\big)\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que f est deux fois dérivables.
2) Déterminer f

149
Soient a et b deux réels strictement positifs.
Déterminer le maximum de $f : (x,y) \mapsto xy$ sous la contrainte

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

150
Exercice Analyse
Trouver les extremums locaux et globaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

151
Exercice Analyse

Montrer que $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, en déduire que

$$\frac{8}{3} \leqslant \pi \leqslant \frac{52}{15}.$$

152

Exercice Analyse

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.
On étudie l'application $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = x^T Ax + b^T x + c.$$

a) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
b) Déterminer les points critiques de F.
c) Calculer la matrice hessienne de F en tout point de $\mathbb{R}^n$.
d) A quelle condition F admet elle un minimum ?

153

Exercice Analyse

Etudier l'intégrabilité de :

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}.$$

154

Exercice Analyse

Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$, l'ensemble de définition de la somme ainsi qu'une expression de la somme ? En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

155

Soit $f : (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$ définie sur :

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y \leqslant 1\}.$$

1) Justifier que f admet un maximum sur T.
2) Déterminer sa valeur.

156

Exercice Analyse et Algèbre

Donner les principales étapes pour résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_1' &= (t+3)x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= -4x_1 + (t-3)x_2 \end{cases}.$$

157

Exercice analyse

Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

158

Exercice Analyse

1) Donner le DSE de la fonction sin ainsi que son rayon de convergence. Indiquer également le mode de convergence d'une série entière

(cvs cvu cvn sur quels domaines ?)

2) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

159

Exercice Analyse

On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Calculer la différentielle de la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $(u(x) \mid x)$.

160

Algèbre et Analyse

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par : $\forall P \in E,\ \|P\|_\infty = \mathrm{Sup}\left\{\left|\dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

1. Vérifier brièvement que $\| \ \|_\infty$ est une norme sur E.
2. Soit f l'endomorphisme de E défini par $\forall P \in E,\ f(P) = XP$. Démontrer que l'application f est continue sur $(E, \| \ \|_\infty)$ et déterminer $|||f|||$.

161

Algèbre et Analyse

On munit $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées de la norme $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

On considère l' endomorphisme Δ de $\ell^\infty(\mathbb{C})$ défini par :

$\forall u \in E,\ \Delta(u) = v$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que Δ est continue sur $(E, \| \ \|_\infty)$ et calculer sa norme.

162

Algèbre et Analyse

On munit $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées de la norme $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

On considère l' endomorphisme φ $\ell^\infty(\mathbb{C})$ défini par :

$\forall u \in E,\ \varphi(u) = w$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que φ est continue sur $(E, \| \ \|_\infty)$ et calculer sa norme.

163

Exercice Algèbre et Analyse

On munit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme 1 définie par $\forall f \in E$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt$.

On pose $T : \begin{array}{ccl} E & \to & E \\ f & \mapsto & Tf : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt \end{array} \end{array}$

et on admet que T est un endomorphisme de E.
Démontrer que T est continu sur $(E, \| \ \|_1)$ et déterminer $|||T|||$.

164
Exercice analyse
Soient a et b deux réels strictement positifs.
Déterminer le maximum de la fonction. $f : (x, y) \mapsto xy$ sous la contrainte :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

165

Exercice Analyse
On note Γ la courbe du plan d'équation $x^3 + y^3 = 1$.
Déterminer le maximum de la fonction. $f : (x, y) \mapsto xy$ sous la contrainte sur Γ.

166
Exercice Analyse

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n z^n}{(n!)^2}$.
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$ où $x \in]-R, R[$. Montrer que f est dérivable et donner f'.
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!(n-1)!}$ satisfait les hypothèses du thérorème des séries alternées lorsque $x \in [0, 2]$.
   En déduire que
   $$-1 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!(n-1)!} \leqslant -1 + \frac{x}{2} \text{ pour } x \in [0, 2].$$
   Montrer que f s'annule une et une seule fois sur $[0, 2]$.

167
Exercice Analyse
Après avoir justifié l'existence donner un équivalent quand x tend vers $+\infty$ de

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

168
Exercice Analyse
Soit $\alpha > 0$ et $a > 0$, on définit pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = a^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}}$$

Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ en discutant suivant les valeurs de a et α.

169

Exercice Analyse
On définit pour $n \geqslant 0$:

$$u_n = \ln\Big(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\Big)$$

Donner le rayon de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$ et son ensemble de définition réel.

170
Exercice Analyse
Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\big(\frac{k}{n}\big)\sin\big(\frac{k}{n^2}\big).$$

171
Exercice Analyse
On pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}t^n\mathrm{d}t$ où $x \in \mathbb{R}$.
1) Etudier les différentes formes de convergence de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

2) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ lorsque qu'elle est définie.

172
Exercice Analyse
$\forall n \geqslant 2$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k)\big)^2$.

1) Montrer que $\sum u_n$ diverge
2) Montrer que $\forall n \geqslant 2$

$$\int_1^n \big(\ln(t)\big)^2 \mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \int_2^{n+1} \big(\ln(t)\big)^2 \mathrm{d}t.$$

3) Pour $x \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\int_1^n \big(\ln(t)\big)^2 \mathrm{d}t$ et en trouver un équivalent en $+\infty$.
4) Déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{u_n}$ et la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{u_n}$.

173
Exercice Analyse On considère une série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ à termes positifs et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ avec v_n définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}.$$

1) Dans cette question uniquement $u_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$
2) On suppose que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ convergent, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.
3) Montrer que si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

174
Exercice Analyse

Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^2(n)}$. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln^2(k)}$.

175
Exercice Analyse
Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x^2n^2}$ où $x \in \mathbb{R}$.
1) Quel est l'ensemble de définition de S ?
2) Montrer la continuité de S.
3) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
4a) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t$ pour $x \in]0,+\infty[$.
☞ On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
4b) Donner un équivalent de S en 0.

176
Exercice analyse
Pour $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Démontrer la convergence simple de la série de terme général f_n.
2. On note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}_+^*$? dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$?

3. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

177
Exercice analyse
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+t^3)^n} dt$.

1. Établir l'existence de u_n.
2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
3. Prouver la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$.

178
Exercice Analyse
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ et $u_0(x) = 1$.

1. Donner le rayon de convergence de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que S vérifie une équation différentielle du type $y'' + ay' + by = f$ où l'on précisera f et les réels a et b.
3. Résoudre l'équation et en déduire S.

179
Exercice analyse

1. Soit $\delta \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simplifiée de $S_n(\delta) \underset{\text{def}}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\delta)$. Exhiber un réel $M(\delta)$ indépendant de n tel que $|S_n(\delta)| \leqslant M(\delta)$.
2. On pose $u_n(\delta) = \dfrac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(n\delta)$ pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$.
   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$.
   (b) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, \pi]$. On pourra écrire $\cos(n\delta) = S_n - S_{n-1}$.
3. Étudier la convergence uniforme sur un segment inclus dans $]0, \pi]$.

180
Exercice analyse
Soit $u_n = \displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.
1) Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$.
2) Trouver l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n x^n$ converge.

181

Exercice analyse
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$.

1. Etudier la convergence simple.
2. Etudier la convergence uniforme.

182
Exercice analyse Soit $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1}\right) - \ln(n)$.

1. Donner un équivalent de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note α sa limite.
2. Etudier la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n (u_n - \alpha)$ et $\sum_n \frac{1}{n^{u_n}}$.
3. Proposer un équivalent simple de $u_n - \alpha$.

183
Exercice analyse

1. Convergence simple de la suite définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f_n(x) = n(\cos(x))^n \sin(x)$.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$? Sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$?
3. Montrer que, pour g continue, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} g(t) f_n(t)\, dt = g(0)$.

184
Exercice analyse

1. Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} S_n x^n$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
2. Exprimer sa somme f à l'aide de fonctions usuelles (on pourra poser $A_n = \sum_{k=0}^{n} x^n$ et remarquer que $x^n = A_n - A_{n-1}$.

185
Exercice analyse
On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2} dt$.

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Calculer $F(1)$.
3. Calculer $F(x)$ pour tout x.

186
Exercice Analyse
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n$$

1) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.
2) Calculer f' en déduire f.

187
Exercice Analyse
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, \frac{1}{2}]$, on pose $f_n(t) = \dfrac{1+t^n}{\sqrt{1-t^2}}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n$ de deux manières.

188
Exercice analyse
Montrer que
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = 2.$

189
Exercice Analyse
1) Déterminer l'intervalle de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$ Donner un équivalent de f en 0.
2) Mêmes question pour $g : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)}$

190
Exercice Analyse
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $d_n = \dfrac{1!+2!+\dots n!}{n!}$.

1) Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $d_n \leqslant 2$.

3) La suite (d_n) est elle convergente ?

4) Donner la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{d_n}{n!}$.

191
Exercice analyse

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n S_n = 1$

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $(S_n)_{n\geqslant 0}$ diverge.
2) Montrer que $S_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n$.

192
exercice Analyse et algèbre
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une unique valeur propre λ.
1) Montrer que $A - \lambda I_n$ est nilpotente.
2) Soit le système différentiel $Y' = AY$.
Montrer que les solutions de ce système sont toutes bornées si seulement si $A = \lambda I_n$ et $\lambda \in i\mathbb{R}$.

193

Exercice Analyse
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$$

1) Déterminer la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Déterminer la limite de $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

240
Exercice Probabilité
Soit $p \in]0, 1[$ et $M \in \mathcal{M}_3(\{0, 1\})$ une matrice dont les coefficients X_{ij} sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
1. Donner la loi de $\mathrm{Tr}(M)$.
2. Calculer l'espérance du déterminant de M.

241
Exercice Probabilité
Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. On pose $M = \begin{bmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$.
(1) Soit la variable aléatoire $Z = \mathrm{tr}(M)$. Donner la loi de Z.
(2) Déterminer la probabilité p que la matrice M soit diagonalisable.

242

Exercice Probabilité
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p.
On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.
1) Montrer que A est inversible.
2) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable.

243

Exercice Probabilité

On considère n urnes numérotées par un indice j de 1 à n. L'urne j contient j boules numérotées de 1 à j. On tire successivement et avec remise une boule : si on obtient au k-ième tirage une boule numérotée i alors le $(k+1)$ ième tirage sera effectué dans l'urne i.

On note $X_k = i$ l'événement *on tire une boule numérotée i au k-ième tirage.*

• Exprimer $P\big(X_{k+1} = i\big)$ en fonction de $P\big(X_k = j\big)$ pour $j = 1$ à n.

• On pose $W_k = \begin{pmatrix} P\big(X_k = 1\big) \\ P\big(X_k = 2\big) \\ \vdots \\ P\big(X_k = n\big) \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice A telle que $W_{k+1} = AW_k$. En étudiant cette matrice montrer que $\Big(W_k\Big)_k$ converge.

244

Exercice Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un univers probabilisé fini.Soient (X, Y) deux variables aléatoires.

Soit $(i, j) \in \{1, \ldots, n+1\}^2$. On définit

$$a_{i,j} = P(X = i, Y = j) = \frac{1}{2n} \text{ si } \mid i + j - (n+2) \mid = 1 \text{ et } 0 \text{ sinon .}$$

1) Expliciter $A = (a_{i,j})$, la matrice dont les coefficients sont les $a_{i,j}$ et montrer que A est diagonalisable.

2) Montrer que $\Big(a_{i,j}\Big)_{(i,j)\in\{1,\ldots,n+1\}^2}$ définit une loi de probabilité de couple.

3) Donner les lois marginales de X et Y.

4) On pose $b_{i,j} = P(X = i \mid Y = j)$ les coefficients d'une matrice B.

Exprimer B et montrer que $v = \begin{pmatrix} P(X = 1) \\ P(X + 2) \\ \vdots \\ P(X = n+1) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B

245

Exercice Probabilité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on considère les deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans $[|1, n+1|]$ dont la loi du couple est donnée par

$$\forall (i, j) \in [|1, n+1|]^2 \ P(X = i, Y = j) = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

1) Montrer que $\lambda = \dfrac{1}{4^n}$.

2) Déterminer les lois marginales de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

3) Déterminer l'espérance et la variance de X.

4) Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $b_{i,j} = P(X = i, Y = j)$

Justifier que B est diagonalisable. En calculant B^2 déterminer les valeurs propres de B et donner la dimension des sous-espaces propres associés.

250

Exercice Probabilités

On considère deux entiers n et p strictement positifs.
On dispose de n tiroirs $T_1, \cdots, T_n$ et de p boules $B_1, \cdots, B_p$.
On dispose les p boules dans les tiroirs, les rangements étant équiprobables et indépendants.
On note X_k la variable aléatoire comptant le nombre de boules dans le tiroir T_k et Y le nombre de tiroirs vides.
1) Soit k un entier entre 1 et n. Déterminer la loi de X_k.
2) Les variables $X_1, \cdots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
3) Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.
4) Déterminer la loi de Y.

251
Exercice Probabilité
On considère un meuble à 8 tiroirs, dans lequel il peut se trouver un objet avec la probabilité p. Lorsque cet objet est dans le meuble il a autant de chance de se trouver dans un tiroir que dans l'autre. On a ouvert 7 tiroirs du meuble sans trouver l'objet. Calculer la probabilité que l'objet soit dans le meuble.

252

1 Exercice Probabilités

Soient a et b deux entiers strictement positifs. Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire une poignée de n boules dans l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans la poignée.

1. Déterminer la loi de X.
   On admet la formule suivante
   où $n \leqslant a+b$:
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$
2. Calculer l'espérance de X.

253

Exercice Probabilité
Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(p)$(loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$).

1. Déterminer la loi de la somme $S = X + Y$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(S = k)$ où k est un élément de $S(\Omega)$.

254
Exercice Probabilité

Pour fidéliser ses clients, une marque de chocolat décide de placer dans chaque tablette une pièce de puzzle. Le puzzle est composé de n morceaux distincts ($n \geqslant 1$). Le morceau qui se trouve dans la tablette est supposé suivre une loi uniforme sur les n morceaux possibles. Le client est supposé acheter les différentes tablettes au hasard. On note N la variable aléatoire égale au nombre d'achats à réaliser pour obtenir toutes les pièces du puzzle.

1. Déterminer $N(\Omega)$ où Ω est un espace de probabilité décrivant l'expérience.
2. La première pièce étant obtenue au premier achat, on note N_2 le nombre d'achats supplémentaires pour obtenir la deuxième pièce. Donner la loi de N_2.
3. Montrer que N est la somme de n variables aléatoires qui suivent des lois géométriques. Démontrer que N admet une espérance et déterminer la.

255

Exercice Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, suivant la loi de Bernouilli de paramètre $1/2$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} kX_k \quad \text{et} \quad a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Déterminer l'espérance et la variance de Y_n.
2. Démontrer que pour tout $k \in [\![0; a_n]\!]$, $P(Y_n = k) = P(Y_n = a_n - k)$.
3. Déterminer les valeurs prises par Y_n.

256

2 Exercice Probabilités

1. Calculer la fonction génératrice et l'espérance de la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, 2n\}$.
2. Existe-t-il deux variables aléatoires, X_1,X_2 indépendantes suivant la même loi, prenant toutes deux leurs valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$ et telles que $X_1 + X_2$ suivent une loi uniforme.

257

Exercice Probabilité

Soit a et n deux entiers naturels non nuls, on pose $N = an$. On dispose aléatoirement N boules dans n urnes. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre d'urnes vides. Déterminer l'espérance de Y et donner un équivalent de cette espérance quand n tend vers $+\infty$. Interpréter.

258

Exercice Probabilité

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p. Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{1+X}$.

259

Exercice Probabilité

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs de boules dans l'urne suivant le protocole suivant : après chaque tirage la boulé tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée. On note pour tout entier naturel n non nul X_n le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.
1) Déterminer la loi de X_1 et de X_2.
2) Donner la loi de X_n.

260
Exercice Probabilité
Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise dans cette urne.
On appelle X le rang du tirage de la première boule blanche, et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1) Déterminer la loi de X et $\mathbb{E}(X)$.
2) Exprimer Y en fonction de X et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

261
Exercice Probabilité
Une urne contient initialement une boule blanche.
On effectue un ou plusieurs lancers indépendants d'une pièce équilibrée.
• Si on obtient pile : on ajoute une boule noire et on lance de nouveau la pièce,
• Si on obtient face, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête.
On note X le numéro du lancer auquel on arrête l'expérience.
1° Déterminer la loi de X.
2° Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche à la fin de l'expérience.

262
Exercice Probabilités
Soient X, Y deux variables alátoires indépendantes suivant
la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = \mathrm{Min}(X,Y)$ et $V = \mathrm{Max}(X,Y)$.
1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner $P\big(X \leqslant n\big)$ et $P\big(X \geqslant n\big)$.
2) Donner $P\big(U = n\big)$ et $P\big(V = n\big)$.
3) Que peut-on dire des événememnts
$\big(X = n\big) \bigcap \big(Y = n\big)$ et $\big(U = n\big) \bigcap \big(V = n\big)$? Les variables aléatoires sont-elles indépedantes ?

263

Exercice Probabilité
1) Donner la définition d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
2) Que vaut $E(X)$ pour un telle loi ainsi que $V(X)$?

3) Soient X et Y deux lois de Poisson indépendantes qui suivent une loi de poisson de paramètre λ et μ. Expliciter la loi de $X+Y$.

264

Exercice Probabilité

On considère un dé à six faces équilibré.

1) Dans cette première expérience, on effectue 10 lancers indépendants. Soit T la variable aléatoire qui donne le premier lancer où l'on obtient un 6 (si l'on obtient pas un 6 on dira que $T = 0$). Déterminer la loi de T.

Dans les questions suivantes, on ne limite plus le nombre de lancers de dé.

Notons T_n la variable aléatoire renvoyant le numéro du lancer où on obtient le n-ième 6.

2a) Déterminer la loi de T_1

Déterminer la fonction génératrice de T_1, on précisera sa somme et son rayon de convergence.

2b) Déterminer la loi de $T_2 - T_1$.

Déterminer la fonction génératrice de $T_2 - T_1$, on précisera sa somme et son rayon de convergence.

En déduire la loi de T_2.

265

Exercice probabilité

Soient X ,Y des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}+_*$.

1) Déterminer la fonction génératrice de X et de $3Y$.

2) En déduire la fonction génératrice de $Z = X + 3Y$.

3) En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$

4) X et Z sont elles indépendantes ?

4) Déterminer le minimun de la fonction $t \mapsto V(X + tY)$.

266

Exercice Probabilité

On lance une pièce de monnaie ayant une probabilité p de faire *pile* . On note N la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un pile.

1) Donner la loi de N, son espérance et sa variance.

Si il a fallu N lancers pour obtenir *pile* on relance N fois la pièce et on note le nombre de fois où l'on a obtenu pile dans cette deuxième partie de l'expérience.

Finalement on note X le nombre de pile obtenu au total .

2) Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.

267

Exercice Probabilité

On suppose que X suit la loi binomiale de paramètre n et p.

Montrer que

$$\mathbb{P}\Big(\frac{X}{n} - p \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

268

Exercice Probabilité

Soit $a > 0$.

Si $n \in \mathbb{N}$, on considère que $p_n = a\dfrac{2^n}{n!}$ est la probabilité qu'une famille ait n-enfants. On considère que la probabilité qu'un enfant soit une fille ou un garçon est la même.

1) Déterminer a.

2) Quelle est la probabilité que la famille ait au moins un garçon.

3) La famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité que la famille ait 2 enfants.

269

Exercice Probabilités

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour t réel convenable, on pose :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

a) Montrer que la fonction G_X est définie et continue sur $[-1, 1]$.

b) Justifier que la fonction G_X est croissante et convexe sur $[0, 1]$.

270

Exercice Probabilités

Soient $(a, b) \in]0, 1[\times\mathbb{R}_+^*$, et X , Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{cases} P(X = i, Y = j) = 0 & \text{si} \quad i < j \\ P(X = i, Y = j) = \dfrac{\mathrm{e}^{-b} b^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer les lois de X et Y, ainsi que $E(x)$ et $E(Y)$ les lois sont elles indépendantes ?

271

Exercice Probabilités

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p et Y suivant la loi géométrique de paramètre q. Les lois sont indépendantes.

1) Sans calcul, pour $n \in \mathbb{N}$, donner $P(X > n)$ (on utilisera l'expérience type associée à une loi géométrique).

2) Soit $Z = \text{Min}(X, Y)$, déterminer la loi et l'espérance de Z.

272

Exercice Analyse et Algèbre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$

1) Justifier l'existence de $d = \inf_{X \in \mathbb{R}^n} ||AX - B||$ et montrer que c'est un minimum.

2) Soit X_0 tel que $d = ||AX_0 - B||$, montrer que $A^T Y = A^T B$ où $Y = AX_0$.

273

Exercice Probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{N}^*$ et $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'éléments de $]0, 1[$. On considère une famille de variables aléatoires X_i mutuellement indépendantes suivant la loi binomiale : $X_i \sim \mathcal{B}(m_i, p_i)$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale si et seulement si les p_i sont égaux.

274

Exercice probabilité

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $P\big(\{n\}\big) = \dfrac{1}{n(n+1)}$, montrer que l'on définit ainsi une probabilité. Donner la fonction génératrice associée ainsi que son domaine de définition.

275

Exercice probabilité

1) Donner la définition d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
2) Que vaut $E(X)$ pour une telle loi ainsi que $V(X)$?
3) Soient X et Y deux lois de Poisson indépendantes qui suivent une loi de poisson de paramètre λ et μ. Expliciter la loi de $X + Y$.

277

Exercice Probabilité

Une urne contient 7 boules blanches et 3 rouges. On effectue des tirages avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages avant la première boule blanche tirée.
1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Donner l'espérance de X et sa variance.
3. Quelle est la loi de la variable aléatoire donnant le rang de la troisième boule blanche tirée ?

278

Exercice Probabilité

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{U}(1, n)$.
Soit $S = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.
a) Déterminer la loi et espérance de S.
b) Déterminer espérance de T.
c) S et T sont-elles indépendantes ?

279

Exercice Probabilité

Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, et Y une loi indépendante de X suivante une loi de Poisson de paramètre λ.
On pose $Z = XY$.
1) Déterminer $E(Z)$
2) Quel est la loi de Z ?
3) Quel est la variance de Z ?

280

Exercice Probabilités

On effectue des lancers successifs et indépendants d'un pièce équilibrée. On convient que l'on gagne 1 points à l'issue d'un lancer si celui-ci est différent du précédent, 0 point sinon. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui renvoie le gain au total des n lancers.
1) Déterminer $E\big(X_2\big)$ et $E\big(X_3\big)$.
2) Soit $n \geqslant 2$, déterminer $P\big(X_n = 0\big)$ et $P\big(X_n = n-1\big)$.
3) Pour k convenable exprimer $P\big(X_{n+1} = k\big)$ en fonction de $P\big(X_n = k\big)$ et $P\big(X_n = k-1\big)$.
4) Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $Q_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)x^k$, montrer que $Q_{n+1}(x) = \Big(\dfrac{1+x}{2}\Big)Q_n(x)$.
5) En déduire une expression de $Q_n(x)$ puis la loi de X_n.
