Devoir des vacances d'été

A rendre le premier jour de la rentrée

Problème : autour de l'exponentielle des matrices

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $A_{i,j}$ désigne le coefficient de A à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.
- Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $J(\lambda)$ la matrice carrée d'ordre n définie par

$$J(\lambda) = \left(u_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{ avec } \begin{cases} \forall i \in [\![1,n-1]\!],\ u_{i+1,i} = 1 \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ u_{i,i} = \lambda \\ u_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on rappelle que

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

- L'espace $E = \mathbb{C}^n$ est rapporté à sa base canonique $\left(e_j\right)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ et on rappelle que toute matrice carrée d'ordre n représente dans cette base un endomorphisme de E appelé endomorphisme canoniquement associé.

- Dans la suite, on dit qu'une suite $(M_m)_{m \geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ converge vers $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ lorsque, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la suite complexe $\left((M_m)_{i,j}\right)_{m \geqslant 0}$ converge vers $M_{i,j}$.

Question préliminaire

Soient $(A_m)_{m \geqslant 0}, (B_m)_{m \geqslant 0}$ deux suites d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ convergeant respectivement vers $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que les suites $(A_m + B_m)_{m \geqslant 0}$ et $(A_m B_m)_{m \geqslant 0}$ convergent respectivement vers $A + B$ et AB.

Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, soit $\alpha(M)$ la matrice :

$$\alpha(M) = \lim_{m \to +\infty} S_m \text{ avec } S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{M^k}{k!}$$

On admettra et on utilisera sans le démontrer que cette matrice existe toujours et que si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors $\alpha(A+B) = \alpha(A)\alpha(B)$.

Partie I : quelques calculs préliminaires

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Déterminer des bases de $\ker(A-2I_3), \ker(A+I_3)$ et $\ker(A+I_3)^2$.

2. Vérifier que $\ker(A+I_3)^2 \oplus \ker(A-2I_3) = \mathbb{C}^3$.

3. On note a l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A.

Trouver une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle la matrice de a est $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En déduire que A et B sont semblables.

Partie II : Quelques propriétés de la matrice $J(0)$

1. Rappeler la définition du rang d'une matrice, puis déterminer le rang de $J(0)$.

2.

2.1. Déterminer $J(0)^k$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, puis pour tout entier $k \geqslant n$. *On pourra introduire l'endomorphisme j canoniquement associé à $J(0)$ et considérer l'action de j^k sur $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$.*

2.2. Montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, $J(0)^l$ est une matrice nilpotente.

3. Déterminer $\alpha(J(0))$ puis $U = \alpha(J(0)) - I_n$.

4. Montrer que toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.

5. En déduire que U est une matrice nilpotente de rang $n-1$.

Partie III : Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme de E.

1. Prouver que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$.

2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim(\ker(u^m))$. Prouver l'existence de

$$r = \min\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\}$$

3. Montrer que :

(i) $\forall m < r$, $\ker(u^m)$ est strictement inclus dans $\ker(u^{m+1})$,

(ii) $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$,

(iii) $\forall m \geqslant r,\ \ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.

Partie IV : Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

Soit V une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, **de rang** $n-1$ et vérifiant $V^n = O_n$. On note v l'endomorphisme de E canoniquement associé à V.

1. Soient p et q deux entiers naturels. En considérant w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$, montrer que :

$$\dim(\ker(v^{p+q})) \leqslant \dim\left(\ker(v^p)\right) + \dim\left(\ker(v^q)\right).$$

2. Montrer que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \dim\left(\ker(v^i)\right) \leqslant i$$

3. Démontrer qu'en fait $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \dim\left(\ker(v^i)\right) = i$.

4. **4.1** Prouver alors que v^{n-1} n'est pas l'endomorphisme nul.

4.2 Il existe donc un vecteur e de E tel que $v(e) \neq 0$. Montrer que

$$B_1 = (e, v(e), v^2(e), \ldots, v^{n-1}(e))$$

est une base de E.

5. Ecrire la matrice de v dans cette base.

6. Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de rang $n-1$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est égal à l'ensemble des matrices semblables à $J(0)$.

Partie V : Résolution de l'équation $J(\mu) = \alpha(X)$, d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{C})$

1. Montrer que : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,

$$P^{-1}\alpha(M)P = \alpha(P^{-1}MP)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$e^z = i,\ e^z = -1,\ e^z = -3-4i$$

3. Plus généralement, soit $\mu \in \mathbb{C}$. Déterminer, lorsque cela est possible, tous les nombres complexes $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tels que $e^z = \mu$.

4. On prend alors $\mu \neq 0$ et on note s un des nombres complexes tel que $e^s = \mu$.

4.1. Déterminer $\alpha(sI_n)$.

4.2. On écrit alors $J(s)$ sous la forme : $J(s) = sI_n + J(0)$. Exprimer $\alpha(J(s))$ à l'aide de $\alpha(J(0))$ et de μ.

4.3. Vérifier que la matrice $\mu(\alpha(J(0)) - I_n)$ est nilpotente de rang $n-1$.

4.4. En déduire qu'il existe une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$Q^{-1}\alpha(J(s))Q = J(\mu)$$

5. Donner alors dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une solution à l'équation proposée $\alpha(X) = J(\mu)$.

6. En déduire dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une solution à l'équation $\alpha(X) = {}^tJ(\mu)$.

7. Applications.

7.1. On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Déterminer une matrice X_1 telle que $\alpha(X_1) = T$.

7.2. On va chercher une matrice $X_2 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(X_2) = A$ où A désigne la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ définie à la partie I.

7.2.1 Déterminer une matrice $B_1 \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(B_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7.2.2 Déterminer alors une matrice $X_2 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(X_2) = A$

Sujet analyse Probabilités

1 Suite définie implicitement et développement limité

1.1 Définition de $(x_n)_{n\geq 1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$f_n(x) = \cos(x) - nx.$$

1. Tracer sur le même graphique la représentation de $x \mapsto \cos(x)$, et $x \mapsto nx$ pour quelques valeurs de n.
2. Tracer le tableau de variations de f_n. Montrer que l'équation $f_n = 0$ admet une unique solution. On précisera le théorème utilisé avec ses hypothèses.
   On note dans toute la suite x_n cette solution.
3. Sur le même graphique, placer quelques valeurs de x_n.

1.2 Étude de la suite (x_n) : première approche

4. À l'aide de la définition de x_n , montrer que :

$$x_n = O(\frac{1}{n}) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

en déduire que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 puis que $x_n \sim \frac{1}{n}$. Ce résultat était-il prévisible ?

2 Étude de séries

5. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} x_n$ est divergente. Là encore on précisera le théorème utilisé.

On s'intéresse maintenant à la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n x_n$.

2.1 Un exemple pour ne pas dire de bêtises après.

6. On pose pour $n \geq 1$, $v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

Donner un développement asymptotique en $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ de v_n. Donner également un équivalent de v_n. Montrer que $\sum_{n\geq 1} v_n$ est divergente. Expliquez pourquoi un des théorèmes du cours ne peut pas s'appliquer.

2.2 Étude de $\sum_{n\geq 1}(-1)^n x_n$ à l'aide d'un Dl.

7. Montrer que la suite (x_n) admet un développement limité en puissances de $1/n$ jusqu'à l'ordre 2, c'est-à-dire qu'il existe des constantes réelles a, b, c telles que :

$$x_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{(lorsque } n \to +\infty\text{)}.$$

Exprimer explicitement les constantes a, b, c.

Remarques :
— Toute justification rigoureuse du développement limité est attendue.
— Vous pourrez utiliser les développements classiques de la fonction cosinus en 0.
En déduire que $\sum_{n\geq 1}(-1)^n x_n$ est convergente.

2.3 Etude de $\sum_{n\geq 1}(-1)^n x_n$ à l'aide du CCSA

8. En calculant $f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n)$, montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. En déduire la nature de $\sum_{n\geq 1}(-1)^n x_n$.

3 Une autre série définie par récurrence.

On définit la suite par u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \sin u_n$.

9. Montrer que $\forall n,\ u_n \in [0,1]$, puis en utilisant une inégalité classique sur le sinus, montrer que u est décroissante.
10. En déduire que la suite u est convergente vers un réel l. Puis, déterminer l en précisant bien les hypothèses pour le passage à la limite.
11. Trouver $\alpha > 0$ tel que la suite $\left(v_n = \frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive. (on utilisera le Dl du ln en justifiant que l'on peut l'utiliser .)

On admet le théorème de Césaro, qui est au programme de deuxième année dans une version plus générale :

Théorème Césaro Si u est une suite convergente vers l non nul, alors la suite v définie par

$$\forall n \geq 0 \ v_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}{n}$$

est également convergente vers l.

12. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim \frac{n}{3}$.
13. Simplifier l'expression de $\sum_{k=0}^{n} v_k$ et en déduire un équivalent de u_n.

14. Montrer la série $\sum_n u_n$ est divergente puis que la série $\sum_n (-1)^n u_n$ est convergente.

Exercice Probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers successifs et indépendants d'une pièce équilibrée. On convient que l'on gagne 1 point à l'issue d'un lancer si celui-ci est différent du précédent, 0 point sinon. On note X_n la variable aléatoire qui renvoie le gain au total des n lancers.

Ainsi pour $n = 4$, le lancer $Pile, Pile, Face, Pile$ rapporte 2 points (le premier Pile ou Face ne rapporte jamais de points). Et le lancer $Pile, Face, Pile, Face$ rapporte 3 points.

1) Déterminer la loi de X_2 ainsi que la loi de X_3.

2) Soit $n \geq 2$, déterminer $P\big(X_n = 0\big)$ et $P\big(X_n = n-1\big)$.

3) Pour k convenable exprimer $P\big(X_{n+1} = k\big)$ en fonction de $P\big(X_n = k\big)$ et $P\big(X_n = k-1\big)$.

On pourra utiliser la formule des probabilités totales, en précisant le système complets d'événements. On conseille de refaire la démonstration, en décrivant l'univers Ω à l'aide de la variable aléatoire X_n.

4) Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)x^k$, montrer que $Q_{n+1}(x) = \Big(\frac{1+x}{2}\Big)Q_n(x)$.

5) En déduire une expression de $Q_n(x)$ puis la loi de X_n.