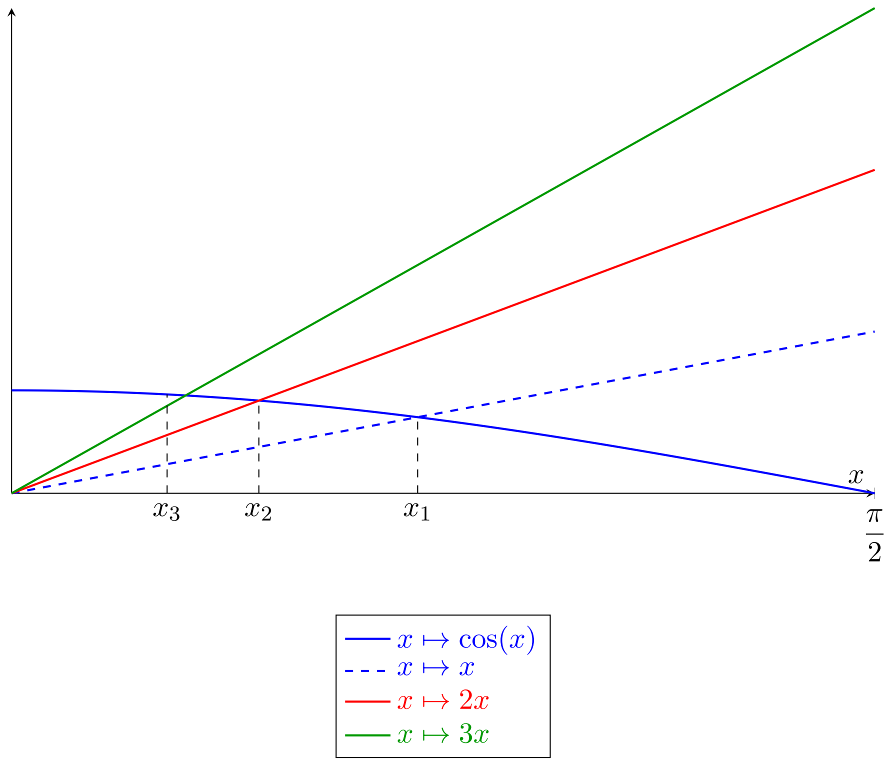

1.

2. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \forall n \geq 1, \quad f_n'(x) = \sin(x) - n \leq 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f_n'(x)$	$-$	
$f_n(x)$	$1 \searrow$	$-\infty$

On va utiliser le théorème de la bijection strictement monotone qui donne l'existence et l'unicité. Comme vu dans le tableau de variations, les fonctions f_n sont strictement décroissantes, continues, définies sur un intervalle I, ce sont donc des bijections de I vers $f_n(I)$ qui est lui même un intervalle (c'est ici que l'on utilise une des formes du théorème des valeurs intermédiaires), le tableau de variations permet de conclure que $0 \in f_n(I)$.

Il existe un unique x_n tel que $\cos(x_n) = nx_n$.

3. Voir le premier graphique.

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x_n) = 0$$

c'est à dire

$$\forall n \geq 1, \frac{\cos(x_n)}{n} = x_n$$

or $\cos(x_n) = O(1)$ donc

$$\underline{x_n = O(\frac{1}{n}) \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

La suite (x_n) est dominée par une suite qui converge vers 0, elle converge également vers 0. On peut alors utiliser un équivalent de $\cos(x_n) \sim 1$.

Remarque importante pour la suite de l'année en analyse On pourrait écrire rapidement la suite (x_n) converge vers 0 donc $(\cos(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers 1. Mais ce serait oublier de citer la continuité du cos (caractérisation séquentiellle de la continuité). Si pour la fonction cos on peut espérer que les jurys soient indulgents, ce ne sera pas le cas si la fonction est une fonction *originale* et surtout si la continuité de la fonction a été démontrée juste avant. Progresser sur ces justifications qui peuvent vous paraître fastidieuse voire inutiles est l'objectif principal en analyse . L'utilisation des Dls et des équivalents est plus souples.

Finalement

$$\underline{x_n \sim \frac{1}{n}}$$

Le résultat est quasi évident si on regarde graphiquement la situation.

5. On peut conclure grâce au théorème de comparaison des séries dont l'une des séries est **à termes positifs** , la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est référencée divergente, il en est donc de même de $\sum_{n\geq 1} x_n$.

6. Par composition de Dls (la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\geq 1}$ converge vers 0) donc

$$\ln\big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \times \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$$

$$\ln\big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + 0(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est référencée convergente, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} 0(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$ l'est également.

D'après le théorème des séries alternées , $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente. C'est presque la série harmonique alternée, je ne sais pas si elle est référencée convergente. Sur un début de sujet, je précise les hypothèses : elle est alternée en signe , en valeur absolue décroissante et convergente vers 0.

Enfin, la série harmonique est référencée convergente.

Finalement , on a deux séries convergentes et une divergente (ce théorème n'est pas explicitement au programme mais beaucoup de travail en amont permet de conclure un peu plus vite) :

$$\underline{\text{La série} \sum_{n\geq 1} \ln\big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big) \text{ est divergente.}}$$

On a $v_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et cependant $\sum v_n$ est divergente et $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente : les séries ne sont pas à termes positifs. On retiendra :

Le théorème des séries alternées ne se marie pas avec le théorème de comparaisons des séries à termes positifs

Mais un calcul local bien détaillé permet souvent de conclure.

7. On refait le même genre de calcul licite car on a démontré d'abord que la suite (x_n) est convergente vers 0 :

   $cos(x_n) = 1 - \dfrac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)$, or $\dfrac{\cos(x_n)}{n} = x_n$ donc $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{x_n^2}{2n} + o(\dfrac{x_n^2}{n})$

   or $x_n = O(\dfrac{1}{n})$ et d'après les règles sur la composition de o et 0 on obtient : $o(\dfrac{x_n^2}{n}) = 0(\dfrac{1}{n^3})$ donc $\dfrac{x_n^2}{2n} = o(\dfrac{1}{n^2})$

   $$\underline{x_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n^2}), \quad a = 1, b = 0.}$$

   donc $(-1)^n x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + o(\dfrac{1}{n^2})$ (pas de signe dans les petits o), on a la somme de deux suites convergentes, donc

   $$\underline{\sum_{n\geq 1}(-1)^n x_n \text{ est convergente}}$$

8. On a pour tout n (il vaut mieux faire le calcul suivant)

   $$f_n(x_{n+1}) - f_n(x_n) = cos(x_{n+1}) - nx_{n+1} = x_{n+1} \geq 0$$

   Or les fonctions f_n sont décroissantes donc $x_{n+1} \leq x_n$ pour tout n.

   La suite (x_n) est décroissante positve, donc $\sum_{n\geq 1}(-1)^n x_n$ converge.

9. On montre rapidement par récurrence que $\forall n \geq 1, u_n \in [0,1]$, l'initialisation est assurée par $u_0 = 1$, et si pour un n fixé $u_n \in [0,1] \subset [0,\pi]$ on a $\sin(u_n) \geq 0$ (plus petit que 1 est évident).

   $\underline{\forall n,\ u_n \in [0,1]}$, de plus $\mid \sin(x) \mid \leq \mid x \mid$ mais ici $u_n \geq 0$ donc , $\forall n, u_{n_1} \leq u_n$:

   <u>La suite (u_n) est décroissante</u>

10. La suite (u_n) a été vue décroissante minorée par 0. Elle est convergente vers un réel l. Par caractérisation séquentielle de la continuité (de la fonction sinus) on a la suite $(\sin(u_n))$ converge vers $\sin(l)$ et par unicité de la limite $\sin(l) = l$. Or cette égalité n'admet qu'une solution $l = 0$ (voir la courbe représentative du sinus).

    Remarque Il est essentiel de citer la continuité du sinus , on peut se passer de citer l'unicité de la limite.

    <u>la suite (u_n) converge vers 0</u>

11. Il s'agit encore de faire un calcul local. Il y a une difficulté technique : ce n'est pas un dl car $\dfrac{1}{u_n^\alpha}$ diverge vers $+\infty$. On peut mettre au même dénominateur mais il préférable de factoriser par le terme dominant :

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} = \frac{1}{\sin(u_n)^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} = \frac{1}{(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3))^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}$$

$$v_n = \frac{1}{u_n^\alpha}\Big(\frac{1}{(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2))^\alpha} - 1\Big)$$

$$v_n = \frac{1}{u_n^\alpha}\Big(1 + \alpha\frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) - 1\Big)$$

$$v_n = \frac{\alpha}{6}u_n^{2-\alpha} + o\big(u_n^{2-\alpha}\big)$$

On a utilisé le dl du sinus au voisinage de 0 (désolé pour la coquille pas le ln ..) et celui de $(1+u)^\beta$ où $\beta = -\alpha$! Conclusion :

$\underline{\text{Pour } \alpha = 2 \text{ on obtient } v_n \sim \frac{1}{3}}$

Dans toute la suite $\alpha = 2$

12. Par lemme de Césaro, comme la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{3}$, $\frac{\sum_{k=0}^{n-1} v_k}{n}$ converge également vers $\frac{1}{3}$ ou encore

$$\underline{\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim \frac{n}{3}}$$

13. On utilise ici le lien suite série très efficace pur trouver des équivalents de somme partielle divergente.

    On a une somme télescopique

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n^2} - 1$$

    Le -1 est négligeable devant $\frac{1}{u_n^2}$ donc

    $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$

    Pour finir il y a une subtilité, on n'a pas le droit de composer les équivalents, il faut repasser par un dl. Mais, attention donner directement l'équivalent n'est pas une grosse faute , c'est incomparable avec l'oubli des arguments de continuité et faute de temps ne pas hésiter à donner le résultat

    $\frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + o\big(\frac{n}{3}\big)$

    $u_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{3} + o\big(\frac{n}{3}\big)}} = \sqrt{\frac{3}{n}}\frac{1}{\sqrt{1 + o(1)}}$

    donc $\underline{u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}}$.

14. La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann référencée divergente, par comparaison de série à termes postifs, $\underline{\sum u_n \text{ est divergente.}}$

La suite $((-1)^n u_n)$ est alternée en signe car la suite (u_n) est positive, décroissante en valeur absolue vers 0, d'après le critère spécial des séries alternées , $\underline{\sum (-1)^n u_n \text{ est convergente.}}$

Exercice Probabilités

1) On precise toujours $X_2(\Omega)$ avant de débuter (les valeurs prises par la variable aléatoire). Il n'y a que deux lancers donc au plus un changement de faces.

Les lancers (pile,pile) et (face,face) rapporte 0 points, et ce sont les seuls :

donc $(X_2 = 0) = \{(pile, pile), (face, face)\}$ (c'est un ensemble d'événements) et $(X_2 = 1) = \{(pile, face), (face, pile)\}$, étant données l'indépendance des lancers et l'équiporbabilté de pile ou face (pièce équilibrée), on a

$$\underline{X_2(\Omega) = \{0, 1\} \text{ et } P(X_2 = 1) = \frac{1}{2},\ P(X_2 = 0) = \frac{1}{2}}$$

(la somme des probabilités vaut bien 1)

Pour X_3, toujours un peu de bon sens, on a 8 lancers possibles, au plus deux changements de faces :

$(X_3 = 0) = \{(P, P, P), (F, F, F),\ (X_3 = 2) = \{(P, F, P), (F, P, F)\}$

$(X_3 = 1) = \{(F, F, P), (P, P, F), (P, F, F), (F, P, P)\}$, (on pourrait se passer de décrire le troisième cas), chaque tirage a une probabilité $\frac{1}{8}$ d'apparaitre, donc

$$\underline{X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}, P(X_3 = 0) = P(X_3 = 2) = \frac{1}{4},\ \text{et } P(X_3 = 1) = \frac{1}{2}.}$$

2) Si on veut obtenir 0 point , il ne faut obtenir que des piles ou que des faces, et sur n tirages

$$\underline{P(X_n = 0) = 2 \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

pour obtenir le gain maximum, il faut changer à chaque tirage, là encore que 2 tirages possibles :

$$\underline{P(X_n = n - 1) = 2 \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

3) On choisit le système complet d'événements associés à la variable aléatoire X_n, $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots n - 1\}$ (on admet plus ou moins que toutes les valeurs sont possibles mais si ce n'est pas le cas ce n'est pas grave on aura des événements impossibles.) Donc $(X_n = k)$ pour $k = 0, .., n-1$ est un système complet d'événements. Pour ceux qui comprennent vite la situation, on pourrait dire que si on gagne k points en n coups, on avait gagné k ou $k - 1$ points en $n - 1$ coups : c'est vrai ! Mais, on conseille de toujours d'écrire le système complets d'événements (qui ne dépend pas de k) puis d'interpréter les probabilités conditionnelles.

On reprend la démonstration de la formule des probabilités totales.

On considère $k \geq 1$ le cas $k = 0$ est connu.

On a $\Omega = \bigcup_{j \in [\![0, n-1]\!]} (X_n = j)$ or $(X_{n+1} = k) = (X_{n+1} = k) \bigcap \Omega$

$= (X_{n+1} = k) \bigcap \Big(\bigcup_{j \in [\![0, n-1]\!]} (X_n = j) \Big)$

$(X_{n+1} = k) = \bigcup_{j \in [\![0, n-1]\!]} \Big((X_n = j) \cap (X_{n+1} = k) \Big)$

maintenant si j est différent de k ou $k - 1$ l'événement $\Big((X_n = j) \cap (X_{n+1} = k) \Big)$ est impossible. Donc

$(X_{n+1}=k)=\Big((X_n=k)\cap(X_{n+1}=k)\Big)\bigcup\Big((X_n=k-1)\cap(X_{n+1}=k)\Big)$
Puis en passant aux probabilités conditionnelles :
$P(X_{n+1}=k)=P\Big((X_{n+1}=k)\mid X_n=k\Big)P(X_n=k)+P\Big((X_{n+1}=k\mid X_n=k-1)\Big)P(X_n=k-1)$
4) On utilise la formule de récurrence précédente, en faisant attention aux cas $k=0$:
$Q_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}P(X_{n+1}=k)x^k=P(X_{n+1}=0)+\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n}P(X_n=k)x^k+\sum_{k=1}^{n}P(X_n=k-1)x^k\Big)$

Or $P(X_{n+1}=0)=\frac{1}{2}P(X_n=0)$ et $P(X_n=n)=0$, puis par changement d'indices et factorisation pas x on obtient :

$$\underline{Q_{n+1}(x)=\Big(\frac{1+x}{2}\Big)Q_n(x).}$$

Remarque : Il faut faire les questions 3 et 4 avant de rédiger , car elle sont trop liées, de plus l'égalité est donnée dans la question 4 donc permet de corriger ses erreurs. Enfin, une question qui est égalité donnée dans l'énoncé est normalement facile.

5) Pour x fixé Q_n est une suite géométrique donc (pas de recurrence nécessaire)

$$\forall x\ Q_n(x)=\Big(\frac{1+x}{2}\Big)^{n-1}Q_1(x)$$

et $Q_1(x)=P(X_1=0)=1$ on ne gagne pas après le premier lancer.

$$Q_n(x)=\Big(\frac{1+x}{2}\Big)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k$$

et par unicité des coefficients d'un polynôme ,

$$\underline{\forall k\in[0,n-1]\ \ P(X_n=k)=\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k}.}$$

On retrouve une loi binomiale.