Exercice de cours

On considère les 2 sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

$$G = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}\right\}$$

1) Donner en justifiant les dimensions de F et G.

2) Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

On peut donc définir la projection p sur F parallèlement à G

3) Donner une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de p est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Expliquer à l'aide d'une matrice de changement de bases que l'on explicitera et d'une jolie formule que l'on rappellera, comment on peut trouver la matrice de p dans la base canonique. Il n'est pas demandé de finir les calculs.

4) Soit $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, expliciter λ_1 et λ_2 des scalaires tels que

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \in G$$

En déduire la matrice de p dans la base canonique. Vérifier votre calcul en calculant par exemple la trace.

1 Exercice

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}-$ algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme P, on note P' son polynôme dérivé.

Soit f l'application :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ \quad P \mapsto P - P' \end{array}$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n

1) Démontrer que f induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme. On note f_n cet endomorphisme.

2) Expliciter la matrice de f_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Démontrer que f_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, \ldots, s_n$ telle que :

a) $\forall i \in [\![0, n]\!], f_n(s_i) = \dfrac{X^i}{i!}$,

b) $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5) On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :

$$(\mathrm{id} - \delta) \circ (\mathrm{id} + \delta + \cdots + \delta^n) = \mathrm{id}$$

6) En déduire l'expression de s_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0, n]\!]$.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème 1

1.1

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1) a) Calculer $f(e_1)$, $f^2(e_1)$.

b) Montrer que la famille $\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big)$ est liée.

2) Montrer de même que la famille $\big(e_2, f(e_2), f^2(e_2)\big)$ est liée.

3) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

4) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$.

5) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

1.2

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^d$. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} & x_0 = x \\ \forall n \geqslant 0 & x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

et on note $E_x = \mathrm{vect}(x_n, n \in \mathbb{N})$.

1) Montrer que E_x est stable par f.

2) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ contenant x et stable par f. Montrer que $E_x \subset F$.

3) Soit p le plus grand entier tel que $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ soit une famille libre.

a) Justifier l'existence d'un tel entier p.

b) Montrer qu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ tels que

$$x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i.$$

c) On note $E'_x = \ \mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_{p-1})$. Montrer que E'_x est stable par f.

d) En déduire que $E_x = E'_x$ et que la famille $\mathcal{B}\ _p = (x_0, \ldots, x_{p-1})$ est une base de E_x.

4) On note $\hat{f}$ l'endomorphisme de E_x obtenu comme restriction de f à E_x. Donner la matrice de $\hat{f}$ dans la base $\mathcal{B}_p$.

5) Montrer que la famille $(\,\mathrm{Id}, \hat{f}, \hat{f}^2, \dots, \hat{f}^{p-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E_x)$.

6) **a)** Montrer que pour tout $k < p$,

$$\hat{f}^p(x_k) = a_0 x_k + a_1 \hat{f}(x_k) + \cdots + a_{p-1}\hat{f}^{p-1}(x_k).$$

b) En déduire que l'on a

$$\hat{f}^p - a_{p-1}\hat{f}^{p-1} - \cdots - a_0 \,\mathrm{Id} = 0.$$