Question partie I h iii)

On souhaite montrer que $\lim_{n \to +\infty} H(x+n) = 0$, on sait que cette limite existe par décroissance positivité

On remarque que $t \mapsto \dfrac{t\ln(t)}{1-t}$ est prolongable par continuité sur le segment $[0,1]$ elle est donc bornée sur ce segment par un réel M alors

$$\forall x \geq 2,\ \mid H(x) \mid \leq \int \mid t^{x-1} \frac{t\ln(t)}{t-1} \mathrm{d}t \mid \leq M \int_0^1 t^{x-1} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{x}.$$

d'où le résultat par passage à la limite

Partie 2 question b)

J'ai déliré sur mes primitives

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+t^2} = [-\frac{1}{x+t}]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}$

et

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+t^2} = [-\frac{1}{x+t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{x+1}$

finalement

$H(x) \sim \dfrac{1}{x}$