

ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 2

Thème

L'exercice, très court, avait pour objet la mise en œuvre des propriétés élémentaires des congruences modulo 11.

Le problème faisait étudier la diagonalisabilité et les vecteurs propres d'un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Observations générales

Les questions étaient de difficulté très progressive avec de nombreuses questions faciles. Même s'ils ne les ont pas toutes traitées, la plupart des candidats sont arrivés au bout du sujet car les quatre parties du problème étaient indépendantes.

En général, les copies sont bien présentées. Il faut cependant insister sur le fait que faire ressortir clairement la numérotation des questions, ainsi que les résultats, facilite nettement la lecture d'une copie et que cela ne peut que favoriser son auteur. Les copies peu lisibles ou relevant du brouillon ont été systématiquement sanctionnées.

Les candidats qui connaissaient bien le cours (notamment les conditions de diagonalisabilité) et les techniques élémentaires de calcul pouvaient facilement obtenir une note bien supérieure à 10.

Ce sujet a permis de bien classer les candidats, la moyenne de 12,07 est très convenable et les notes sont bien étalées (écart-type de 3,67).

Remarques détaillées par question

Exercice

Il a été assez bien traité par les candidats qui l'ont abordé.

Certains candidats ont pensé que le petit théorème de Fermat permettait de répondre à la question 1 et ont donné $p = 10$ comme réponse sans plus de réflexion.

La question 2 pouvait se résoudre avec un raisonnement par récurrence mais un calcul direct était plus rapide à condition de ne pas faire des disjonctions de cas inutiles.

Problème

1. Question facile et bien traitée. Cependant, certains candidats étourdis oublient de vérifier que A appartient au noyau de φ_A .

2. La question était facile à résoudre à condition de bien voir que la matrice demandée était d'ordre 4.
3. Question réservée aux candidats qui avaient trouvé la matrice de la question 2.
Ceux qui ont des difficultés pour calculer les déterminants devraient au moins pouvoir utiliser une calculatrice.
4. De nombreux candidats ont fourni des démonstrations trop imprécises voire fausses. Il était certainement plus sûr de démontrer les deux implications séparément.
Beaucoup pensent qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.
On a souvent vu que le polynôme $X^2(X^2 - \alpha)$ n'a que des racines simples.
5. Une erreur fréquente a été d'affirmer qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé à racine simple.
6.
 - (a) Calcul facile. De rares erreurs de signe.
 - (b) Il ne fallait pas oublier de préciser que $B_{i,j} \neq 0$.
 - (c) De nombreux candidats ont justifié la diagonalisabilité de φ_A par le fait que les $\lambda_i - \lambda_j$ donnaient n^2 valeurs propres distinctes ce qui n'a aucune raison d'être. D'autres pensent qu'il suffit de trouver n^2 vecteurs propres distincts sans se préoccuper de savoir s'ils forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
7.
 - (a) i. Question facile mais les réponses proposées ne sont pas toujours claires.
 - ii. Beaucoup de candidats concluent que λ est une valeur propre de tA à partir de l'égalité ${}^tX {}^tA = \lambda {}^tX$.
 - iii. Comme en 6(b), il ne fallait pas oublier de vérifier que $X {}^tY \neq 0$.
 - (b) Une erreur de logique très fréquente : les candidats ont utilisé la question 7(a)iii sans se placer sous les hypothèses qui permettaient de conclure.
 - (c) Question facile.
 - (d) C'était certainement la question qui demandait le plus de recul de la part des candidats.
En tout cas, ceux qui ont écrit que la famille $(P_{i,j}X)_{i,j}$ est une base, auraient mieux fait de réfléchir un minimum en se demandant dans quel espace ils travaillaient.
8. C'est une question classique. Néanmoins, le caractère générateur de la famille a été souvent mal démontré.
9. Question facile et bien traitée en général.
10.
 - (a) Les candidats ont bien vu la démonstration en général. La différence s'est faite au niveau de la rédaction.
 - (b) Pour démontrer l'égalité des deux endomorphismes, il fallait montrer qu'ils coïncidaient sur une base et pas seulement, comme on l'a trop souvent vu, sur le seul vecteur y .
 - (c) Question ne posant pas de difficulté.

11.

- (a) Une des deux implications a été plus souvent démontrée que l'autre.
- (b) C'est presque une question de cours.
- (c) Question a priori facile pour qui a bien vu la question (b) mais qui a cependant suscité de nombreuses réponses fausses.
- (d) Cette question était réservée aux candidats qui avaient trouvé le résultat de la question (c). Elle a été relativement peu traitée.

12. Question bien traitée en général.

13. Question facile et bien traitée.

Les questions **14** et **15** ont été assez peu traitées.

Exercice

1) Soit M est solution de l'équation $(\mathcal{E}_{p,q})$ et soit matrice $M' \in E(M)$ que l'on écrit $M' = PMP^{-1}$ où $P \in GL_n(\mathbb{R})$ alors

$$P(M^2 + pM + qI_n)P^{-1} = 0 \text{ donc } (PMP^{-1})^2 + p(PMP^{-1}) + qI_n = 0 \text{ donc } M' \text{ est aussi solution.}$$

2.

a. On reconnaît un polynôme annulateur de M : $P = X^2 - (a+b)X + ab$ celui ci est scindé à racines simples car ses racines sont a et b deux réels distincts. Donc M est diagonalisable. Et les spectre est inclus dans $\{a, b\}$.

b. On a vu que si M est solution toute matrice semblable est solution (et inversement), la question affirme que M est semblable à

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & \\ & & \ddots & \\ & & & b \\ & & & & \ddots \\ & & & & & b \end{pmatrix}$$

(on peut avoir que des a ou que des b).

Cette matrice est effectivement solution de l'équation.

Les solutions de $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$ sont $E\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right)$.

3a) Soit $x \in \text{Im}(f)$, on dispose de $y \in E$, tel que $x = f(y)$, alors $f(x) = f \circ f(y) = 0$

$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$

3b) Le théorème du rang stipule que si F est un supplémentaire du noyau alors la restriction de f à F vers $\text{Im}(f)$ est une bijection, on en déduit la formule du rang.

3c) $\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = n$ et $\text{rg}(f) \leq \dim(\text{Ker}(f))$ donc

$$\text{rg}(f) \leq \frac{n}{2}.$$

3d) On choisit $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ une base de $\text{Im}(f)$, et on note $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ des antécédents associés. Cette famille est libre car les images sont libres (cours de première année), $(y_1, \dots, y_p)$ est une famille libre du noyau (car $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$), on complète cette famille en une base du noyau par des vecteurs $z_1, \dots, z_{n-2p}$. On obtient alors la matrice souhaitée dans la base $(e_1, \dots, e_p, y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_{n-2p})$. Mais attention il faut vérifier que l'on a bien une base, donc, au vu du nombre de vecteurs que la famille est libre.

Si on prend une combinaison linéaire qui annule ces vecteurs,

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^p \mu_i y_i + \sum_{i=1}^{n-2p} \alpha_i z_i$$

On applique f , on obtient $\sum_{k=1}^p \lambda_k y_k = 0$ (les autres vecteurs sont dans le noyau) or la famille a été pris libres

donc $\forall i \lambda_i = 0$, et on trouve une nouvelle relation de dépendance entre des vecteurs libres. On a une base!

Conclusion

Il existe $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_p & 0 \end{array} \right)$$

Remarque une analyse synthèse permet de trouver la construction de cette base.

e) On a les classes d'équivalence des solutions / Mais encore une fois il faut vérifier qu'elles sont solutions

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_p & 0 \end{array} \right)^2 = 0$$

(l'image est inclus dans le noyau, on a tout fait pour)

Donc

$$\mathcal{E}_{0,1} = \bigcup_{p=0}^{\frac{n}{2}} E\left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ I_p & 0 \end{array}\right)\right)$$

4a) On pourrait appliquer le cours (polynôme annulateur + lemme des noyaux) mais c'est beaucoup plus simple

On pose $N = M - aI_n$ alors un calcul direct donne $N^2 = 0$.

4b) Les classes d'équivalence de la matrice I_n c'est I_n , donc d'après la question précédente M est semblable à

$$M_a \left(\begin{array}{ccc|c} a & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ \hline & & I_p & a \end{array} \right)$$

Donc les solutions sont les matrices semblables à la précédente.

5 On a $M^2 - I_n = 0$ et $\det(M^2) = \det(M)^2 = (-1)^n$, ce qui est impossible si n est impair.

6a) Le polynôme $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est annulateur, donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

6b) On se propose de montrer le résultat par récurrence (assez rapidement), on note u l'endomorphisme canoniquement associé.

Soit $a \in E$ non nul alors $u(a)$ est non nul car u est bijectif (déterminant non nul) et $(a, u(a))$ est stable par u , car $u \circ u(a) = -a$. Pour $n = 2$ on a le résultat. (on note $F_a = \text{Vect}(a, u(a))$).

Pour $n = 2p$, et on suppose avoir construit $(p-1)$ plans en somme directe $F_{a_1}, F_{a_2}, \dots, F_{a_{p-1}}$, la dimension de cette somme directe est $n-2$ il existe donc $a_p \notin \bigoplus_{i=1}^p F_{a_i}$, on considère $F_{a_p} = \text{Vect}(a_p, u(a_p))$, on montre sans difficulté que la famille des $(a_i, u(a_i))$ est libre.

On obtient pas tout à fait la forme voulue, mais on regroupe les a_i comme premiers vecteurs et $u(a_i)$ après.

Conclusion $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}MP = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{array} \right)$$

c) Les matrices ci dessus sont solutions, il suffit de faire le calcul

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{array} \right)^2 = -I_{2p}$$

Les solutions de $\mathcal{E}_{0,1}$ sont les matrices semblables à $\left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{array} \right)$

Pour utiliser les notations de l'énoncé :

$$\mathcal{E}_{0,1} = E\left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{array}\right)\right).$$

Problème

Partie I : Étude du cas $n = 2$.

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi_A(\lambda M + N) = \lambda \varphi_A(M) + \varphi_A(N)$. Un calcul direct donne I_2 et A appartiennent à $\text{Ker } \varphi_A$.

2) On obéit en calculant

$$\varphi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \varphi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}, \varphi_A$$

$$(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}, \varphi_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ est $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}$

- 3) Calcul pénible, j'avais ajouté le résultat pour qu'il ne soit pas bloquant. $\Delta(X) = X(X^2 - (a-d)^2) - 2bc(X - (a-d)) - 2bc(X + (a-d)) = X(X^2 - (a-d)^2) - 4bcX$.

Ainsi $\chi_{\varphi_A}(X) = X^2(X^2 - ((a-d)^2 + 4bc))$

- 4) Si $(a-d)^2 + 4bc < 0$ alors χ_{φ_A} n'est pas scindé donc φ_A n'est pas diagonalisable.

Si $(a-d)^2 + 4bc = 0$ alors $\chi_{\varphi_A}(X) = X^4$ si φ_A était diagonalisable son polynôme minimal serait X donc $\varphi_A = 0$ ce qui a été exclu par l'énoncé,

Si $(a-d)^2 + 4bc > 0$ alors φ_A admet deux valeurs propres réelles non nulles de multiplicité 1 et 0 comme valeur propre double. φ_A est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker } \varphi_A$ est de dimension 2 (au moins 2). Inutile d'étudier les deux autres valeurs propres de multiplicité 1. Or I_2 et A appartiennent à $\text{Ker } \varphi_A$ et sont linéairement indépendantes par hypothèse. Donc $\dim \text{Ker } \varphi_A \geq 2$ et donc $\dim \text{Ker } \varphi_A = 2$ et ainsi φ_A est bien diagonalisable.

(deuxième critère de diagonalisation). $A \neq \lambda I_2$ alors φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

5. $\chi_A(X) = X - (a+d)X + ad - bc$ dont le discriminant a pour valeur $(d-a)^2 + 4bc$.

Si $(d-a)^2 + 4bc < 0$, le polynôme caractéristique n'est pas scindé donc A n'est pas diagonalisable.

Si $(d-a)^2 + 4bc = 0$ alors A admet une seule valeur propre λ d'ordre 2 donc n'est pas diagonalisable. En effet si elle l'était elle serait semblable à λI_2 donc égale λI_2 ce qui est exclu dans l'énoncé.

Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$ alors A admet deux valeurs propres réelles distinctes donc est diagonalisable. φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Partie II : Étude du cas général.

- 6) a) Si M est une matrice quelconque, $ME_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la colonne j qui constitue de la colonne i de M de sorte que $DE_{i,j} = \lambda_i E_{i,j}$ (on peut faire un dessin pour justifier.

$E_{i,j}M$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la ligne i qui constitue de la ligne j de M de sorte que $E_{i,j}D = \lambda_j E_{i,j}$.

Donc $DE_{i,j} - E_{i,j}D = (\lambda_i - \lambda_j) E_{i,j}$

b) On obtient $P^{-1}APE_{i,j} - E_{i,j}P^{-1}AP = (\lambda_i - \lambda_j) E_{i,j}$ d'où en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} $AB_{i,j} - B_{i,j}A = (\lambda_i - \lambda_j) B_{i,j}$

Or $B_{i,j} \neq 0$ car $E_{i,j} \neq 0$ donc $\lambda_i - \lambda_j$ est une valeur propre :

Démontrer que, pour tout couple (i, j) , $B_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_A .

c) L'image d'une base par un isomorphisme est une base, donc les $(B_{i,j})$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a trouvé une base de diagonalisation.

D'après le premier critère de diagonalisation

φ_A est diagonalisable.

- 7) a) - Comme φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toutes ses valeurs propres sont réelles.

— A et tA ont même polynôme caractéristique.

— $\varphi_A(X^tY) = AX^tY - X^tYA = AX^tY - X^t({}^tAY) = zX^tY - X\bar{z}^tY = (z - \bar{z})X^tY$.

Reste à montrer que $M = X^tY$ est non nul comme en colle avec M Menard, donc avec des notations évidentes $m_{i,j} = x_i y_j$, comme X et Y sont non nuls, l'un au moins des coefficients de X^tY est non nul donc $X^tY \neq 0$ et ainsi $z - \bar{z}$ est bien valeur propre de φ_A .

b) Si A admet une valeur propre complexe non réelle z alors $\bar{z}$ est également valeur propre de A .

La question précédente peut donc s'appliquer et il en découle que φ_A admet une valeur propre imaginaire pure ($z - \bar{z}$ est un imaginaire pur) or toutes les valeurs propres de φ_A sont réelles (7ai) (Ainsi si φ_A est diagonalisable alors toutes les valeurs propres de A sont réelles).

c) De $AP_{i,j} - P_{i,j}A = \lambda_{i,j}P_{i,j}$ et $AX = \lambda X$ on tire $AP_{i,j}X = P_{i,j}AX + \lambda_{i,j}P_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})P_{i,j}X$

$\mu_{ij} = \lambda + \lambda_{i,j}$ convient

d) On a beaucoup trop de candidats vecteurs propres les $P_{i,j}X$, mais la famille des $P_{i,j}$ engendrent les matrices, donc l'ensemble image formés par les $P_{i,j}X$ est le même que l'image de $M \mapsto MX$ pour X fixé non nul. (attention $P_{i,j}X$ n'est pas toujours un vecteurs propre de A car il peut être non nuls mais on a assez de vecteurs propres à la fin). Or tous vecteur de $\mathbb{R}^n$, disons Y on peut trouver une matrice qui envoie Y sur X (et même beaucoup).... Donc $\text{Vect}(P_{i,j}X = \mathbb{R}^n)$. Donc $\mathbb{R}^n$ est engendré par des vecteurs propres (encore certains vecteurs sont nuls mais ce n'est pas grave).

La question est subtile est ne sera pas traitée par beaucoup de monde.

Comme $(P_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que X est non nul, $\text{vect}(P_{i,j}X)_{1 \leq i,j \leq n} = \text{vect}(MX)_{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \mathbb{R}^n$. En effet l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\phi(M) = MX$ est linéaire et surjective : si Y est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$ il existe un endomorphisme transformant X en Y (comme $X \neq 0$ on peut le compléter en une base $\mathcal{B}$ et il suffit de considérer l'endomorphisme défini par le fait qu'il s'annule sur tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ sauf en X transformé en Y).

On extrait n couples pour avoir une famille génératrice, on a une base de vecteurs propres de A . Ainsi φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

remarque cet énoncé n'est pas au programme : si on trouve une famille génératrice de vecteurs propres alors la matrice est diagonalisable. Mais bon

Partie III : Étude des vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

8) Cours = question de colle de M Françoise saint Omer.

9) Si $P \in \mathbb{R}[X]$ on a $P(A)$ qui commute avec A donc $\mathbb{R}[A] = \mathbb{R}_{m-1}[A] \subset \text{Ker } \varphi_A$ donc $\dim \text{Ker } \varphi_A \geq m$.

10) Un cas d'égalité.

a) Question traitée 10 fois depuis de l'année.

b) Question du devoir à la maison Notons $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}$. En vertu de la question précédente, pour prouver que $v = w$ il suffit d'établir que $v(e_i) = w(e_i)$ pour tout i de 1 à n c'est à dire encore $v(u^k(y)) = w(u^k(y))$ pour tout k de 0 à $n-1$.

Or par définition des α_i on a $v(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(y) = w(y)$ (1) donc c'est bien vérifié pour $k = 0$.

En outre comme $B \in \text{Ker } \varphi_A$ on a v qui commute avec u donc avec u^k et ainsi de (1) on tire pour k de 1 à $n-1$: $v(u^k(y)) = u^k(v(y)) = u^k\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(y)\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n+k-i}(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(u^k(y)) =$

$w(u^k(y))$ Ainsi on a bien $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}$

c) On a vu dans les questions 8 et 9 que $\mathbb{R}(A) = \mathbb{R}_{m-1}(A)$ est de dimension m et est toujours inclus dans $\text{Ker } \varphi_A$. La question précédente montre que lorsque A est nilpotente d'indice n alors $\text{Ker } \varphi_A \subset \mathbb{R}_{m-1}(A)$.

Ainsi dans ce cas a-t-on $\text{Ker } \varphi_A = \mathbb{R}(A) = \mathbb{R}_{m-1}(A)$ et est donc de dimension m .

11) Cas où u est diagonalisable.

Question traitée en classe. a) $B \in \text{Ker } \varphi_A$ si et seulement si v commute avec u donc si et seulement si $v(u(x)) = u(v(x))$ pour tout $x \in E_u(\lambda_k)$ et pour tout k de 1 à p puisque $\mathbb{R}^n = E_u(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E_u(\lambda_p)$. Or pour $x \in E_u(\lambda_k)$ il vient $v(u(x)) = v(\lambda_k x) = \lambda_k v(x)$ donc $v(u(x)) = u(v(x))$ si et seulement si $v(x) \in E_u(\lambda_k)$. Ainsi $B \in \text{Ker } \varphi_A$ si et seulement si tout sous-espace propre de A est stable par B .