# 24 janvier

**Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.**

## Exercice 1 : probabilités et algèbre linéaire

Dans tout l'exercice, $N$ désigne un nombre entier supérieur ou égal à 1.

1. **Étude d'un endomorphisme**

On note $\mathbb{R}_N[X]$ l'espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à $N$ et du polynôme nul ; on désigne par $Id$ l'application identique de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$.

(a) Soit $a$ un nombre réel non nul et $P$ un élément de $\mathbb{R}_N[X]$.

Justifier que $P(aX+1-a)$ (c'est-à-dire la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ : $x \mapsto P(ax+1-a)$) est un polynôme de même degré que $P$.

| Dans toute la suite de l'exercice, pour tout réel $a$ non nul, on note $f_a$ l'application de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$ qui à un polynôme $P$ associe le polynôme $P(aX+1-a)$. |
|---|

(b) Soient $a$ et $b$ des nombres réels non nuls.

i. Déterminer la composée $f_b \circ f_a$ de $f_a$ par $f_b$.

ii. Démontrer que $f_a$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$, et préciser sa bijection réciproque, notée $(f_a)^{-1}$.

iii. On pose : $(f_a)^0 = Id$ et, pour tout entier naturel $n$ : $(f_a)^{n+1} = (f_a)^n \circ f_a$.

Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ : $(f_a)^n = f_{a^n}$.

(c) Pour tout réel $a$ non nul, on note $M_a$ la matrice de $f_a$ dans la base canonique $\left(1, X, \dots, X^N\right)$ de $\mathbb{R}_N[X]$.

i. Expliciter $M_a$ dans le cas $N = 3$.

Dans le cas général, donner le coefficient de la $(i+1)$-ième ligne et $(j+1)$-ième colonne de $M_a$ ($i$ et $j$ entiers compris au sens large entre 0 et $N$).

ii. $n$ désignant un entier naturel, justifier l'égalité : $(M_a)^n = M_{a^n}$.

Ce résultat reste-t-il valable si $n$ est un entier négatif ?

(d) Préciser l'ensemble des valeurs propres de $f_a$.

Pour tout entier $k$ compris au sens large entre 0 et $N$, calculer $f_a\left((X-1)^k\right)$.

L'endomorphisme $f_a$ est-il diagonalisable ?

2. **Étude d'une expérience aléatoire**

On dispose de $N$ pièces de monnaie, chacune ayant la probabilité $p$ d'amener pile $(0 < p < 1)$ et $1-p$ d'amener face. On pourra poser : $q = 1-p$.

On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer des lancers successifs selon le protocole suivant :

— à l'étape 1, on lance les $N$ pièces ;
— à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 1 (s'il en existe) ;
— à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 2 (s'il en existe),
et ainsi de suite.

À chaque étape, les lancers des pièces sont supposés indépendants.

On considère les variables aléatoires suivantes :

— $X_0$ est la variable aléatoire certaine égale à $N$,
— pour tout entier naturel $n$ non nul, $X_n$ est le nombre de côtés pile apparaissant à l'étape $n$, avec la convention que, si à une certaine étape $n_0$ aucun côté pile n'apparaît, on considère que pour tous les entiers $n$ supérieurs ou égaux à $n_0$ l'événement $(X_n = 0)$ est réalisé.

(a) **Étude des variables aléatoires $X_n$**

Soit $n$ un entier naturel, soient $i$ et $j$ des entiers compris au sens large entre 0 et $N$.

i. Préciser la loi conditionnelle de $X_{n+1}$ sacahnt que l'événement $(X_n = j)$ est réalisé.

En déduire l'expression de $P(X_{n+1} = i)$ en fonction de $P(X_n = 0), P(X_n = 1), \dots, P(X_n = N)$.

ii. On pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice $M$ telle que : $U_{n+1} = MU_n$.

En déduire l'expression de $U_n$ en fonction de $p$, $n$ et $U_0$, puis la loi de $X_n$. Vérifier la cohérence des résultats pour $n = 0$ et $n = 1$.

iii. Déterminer le nombre moyen $m_n$ de pièces lancées au cours des $n$ premières étapes ($n \geq 1$).

(b) **Étude d'un temps d'attente**

On suppose les $N$ pièces numérotées de 1 à $N$, et on note $T_1, \ldots, T_N$ les variables aléatoires donnant le temps d'attente de la première apparition de face respectivement pour la première, deuxième ..., $N$-ième pièce. De plus, on pose : $T = \sup(T_1, \ldots, T_N)$.

i. Préciser la loi et l'espérance des variables aléatoires $T_1, \ldots, T_N$.

Quel est le nombre total moyen de pièces lancées au cours de l'expérience aléatoire ? Vérifier la cohérence de ce résultat avec celui de la question **II.1.c)**.

ii. Interpréter la variable aléatoire $T$. Justifier brièvement que $T$ admet une espérance.

iii. Pour tout entier naturel $k$ non nul, calculer la probabilité de l'événement $(T \leq k)$ en fonction de $k$, $N$ et $p$. En déduire la loi de $T$.

iv. Rappeler la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1}$.

Démontrer, dans le cas $N = 2$ : $E(T) = \dfrac{1+2p}{1-p^2}$, puis dans le cas général : $E(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{(1)^{i+1}\binom{N}{i}}{1-p^i}$.

---

# PROBLÈME 2
# Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On considère une particule se déplaant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial $t = 0$ est $k = 0$. À chaque instant $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, elle se déplace aléatoirement de sa position $k \in \mathbb{Z}$ à la position $k+1$ ou $k-1$.

Soit $p \in ]0,1[$. On définit sur un espace probabilisé $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$ une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_t)_{t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathrm{P}(X_t = 1) = p, \quad \text{et : } \quad \mathrm{P}(X_t = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_t$.

Pour tout $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la variable aléatoire $X_t$ modélise le déplacement de la particule à l'instant $t$. Si $X_t = 1$, la particule se déplace vers la droite. Si $X_t = -1$, la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $S_n$ modélise la position de la particule après $n$ déplacements.

## Partie I – Un développement en série entière

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle $x \mapsto (1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence.
2. En déduire que pour tout $x \in ]-1,1[$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n.$$

## Partie II – Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = \mathrm{P}(S_n = 0).$$

1. Pour tout $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X_t+1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}$ suit la loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

$$u_n = \begin{cases} \dbinom{n}{n/2} (p(1-p))^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ selon les valeurs de $p$ et interpréter le résultat.

## Partie III – Nombre de passages par l'origine

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note $O_{2j}$ la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j$, et 0 sinon. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{j=0}^{n} O_{2j}$. On note $\mathrm{E}(T_n)$ l'espérance de la variable aléatoire $T_n$.

Dans cette partie, on souhaite déterminer : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(T_n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que modélise la variable aléatoire $T_n$ ?
2. Soit $j \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $O_{2j}$. En déduire que :

$$\mathrm{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j} (p(1-p))^j.$$

3. On suppose dans cette question que $p \neq \frac{1}{2}$. En utilisant le résultat de la 2, calculer : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(T_n)$, et interpréter le résultat.
4. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(T_n)$.