Table des matières

Chapitre 1

Démonstration

Année 2024-2025

Démonstrations de cours susceptibles de tomber à l'écrit

Réduction

• $\boxed{1}$ En premier lieu théorème de décomposition des noyaux.
☞ Sujet ccinp 2023.

• $\boxed{2}$ Les sous-espaces propres d'un endomorphismes sont en somme directe.
☞ On peut utiliser le lemme des noyaux, ou une récurrence ou des polynômes de Lagrange.

• $\boxed{3}$ Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ et (x, λ) un couple de vecteur propre, valeur propre associé alors

$$P(u)(x) = P(\lambda)x.$$

(pas obligé de rédiger la récurrence)

• $\boxed{4}$
Les valeurs propres sont incluses dans les racines de n'importe quel polynôme annulateur.
☞ Facile à partir du résultat précédent.

• $\boxed{5}$
Les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.
☞ On écrit des équivalence avec $\lambda \in$Sp(u) ssi ... et non injectivité $=(det(u)) = 0$.

• $\boxed{6}$ Si u et v commutent alors tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.
☞ Application classique : base commune de diagonalisation.

• $\boxed{7}$ Si on note d le degré du polynôme minimal de u alors $\mathbb{K}[u]$ l'algèbre des polynômes en u et de dimension d.
☞ Division euclidienne.
☞ Question 17 ccinp mp. 2023.

• $\boxed{8}$ Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ alors

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda(u)$$

☞ $F = E_\lambda(u)$ est stable par u, donc on peut considérer $\tilde{u} = u_{|F}$ et $\chi_{\tilde{u}}$ divise χ_u mais $\tilde{u} = \lambda Id_{|F}$ donc $\chi_{\tilde{u}}(X) = (X - \lambda)^{\dim(F)}$ donc $\dim(F) \leqslant m_\lambda(u)$

• $\boxed{9}$ Critère géométrique : u est diagonalisable ssi χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et la dimension des sous-espaces propres est égale à la multiplicité.
☞ La somme des dimensions des sous espaces propres (qui sont en somme directe) est alors n car c'est le degré du polynôme caractéristique, donc les sous espaces propres sont en somme directe égale à E.

• $\boxed{10}$ L'indice de nilpotence est majoré par $\text{din}(E)$
☞ En effet $P = X^p$ est annulateur donc le polynôme minimal divise X^p mais le polynôme minimal est de degré $\leqslant \dim(E)$.

• $\boxed{11}$ Les racines du polynôme minimal sont exactement le spectre.
☞ Le polynôme minimal est annulateur donc le spectre est inclus dans ses racines. Mais le polynôme minimal divise tous les polynômes annulateurs donc en particulier le polynôme caractéristique qui est annulateur d'après le théorème de Cayley Hamilton.

Espaces euclidiens

• $\boxed{12}$ En premier lieu la démonstration de l'inégalité de Cauchy Schwarz .

• $\boxed{13}$ Expression de la projection orthogonale sur un sous espace F de dimension finie (à l'aide d'une base orthonormée de F.)
☞ Programme de première année revu cette année.

• $\boxed{14}$ Théorème sur la distance (et expression) à un sous espace de dimension finie.
☞ Programme de première année revu cette année, le point clef est le théorème de Pythagore.

• $\boxed{15}$ La matrice de u^* en **Base orthonormée** est la transposée de la matrice de u.
☞ Prérequis la matrice d'un endomorphisme en base orthonormée est
$a_{ij} =< u(e_j), e_i >$.

• $\boxed{16}$ Un endomorphisme est symétrique ssi dans une base (dans toutes les bases) orhonormées sa matrice est symétrique.
☞ Prérequis la matrice d'un endomorphisme en base orhonormée est
$a_{ij} =< u(e_j), e_i >$.

• $\boxed{17}$ Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs auto-adjoints. Si $p \circ p = p$ alors p est une projection orthogonale ssi $p^* = p$

• $\boxed{18}$ Si F est stable par u alors F est stable par u^*
☞ Hyper important, le résultat est au programme mais si on en a besoin la démonstration sera redemandée.
☞ Plus agréable avec des endomorphismes qu'avec des matrices.

• $\boxed{19}$ Le plus souvent demandé : Soit u un endomorphisme symétrique. On définit symétrique positif et symétrique défini positif à partir du produit

scalaire. Montrer u est positif ssi le $Sp(u) \subset [0, +\infty[$. Savoir le faire aussi avec des matrices.
☞ Ne pas chercher à faire des équivalences.

• $\boxed{20}$ Une isométrie est définie à partir de la conservation des normes. Montrer que u est une isométrie ssi elle conserve le produit scalaire.
☞ Pour le sens qui n'est pas évident, il faut connaître l'égalité de polarisation

$$(u \mid v) = \frac{1}{2}\Big(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\Big).$$

• $\boxed{21}$ Les matrices orthogonales sont définies par $A^T A = I_n$. On a heureusement : la matrice d'une isométrie **en base orthonormée** est orthogonale.
☞ On a le droit d'écrire une matrices à l'aide de ses colonnes (par ex) .

• $\boxed{22}$ Les valeurs propres d'une isométrie sont de valeurs absolues égales à 1 (voire en module si on considère les valeurs propres complexes)
☞ Facile mais à retenir.
• $\boxed{23}$ En dernier lieu théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien.
☞ Pas la plus facile, mais c'est classique : on construit une application entre deux espaces de même dimension qui est injective donc bijective.

Probabilité

• $\boxed{24}$ Rayon de convergence d'une série génératrice.
☞ Voir exo ccinp écrit 2019.

• $\boxed{25}$ Somme de deux variables aléatoires indépendantes
et fonctions génératrices .
☞ Voir exo ccinp écrit 2019 deux méthodes imposées $E(t^X)$ et produit de Cauchy.
☞ Les fonctions génératrices des lois usuelles doivent pouvoir être retrouvées rapidement.

• $\boxed{26}$ Deuxième formule de l'espérance pour X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant 1).$$

☞ C'est une application des familles sommables.

• $\boxed{27}$ Continuité et dérivabilité d'une fonction génératrice.
☞ Pour la continuité soit pas le théorème radial d'Abel (pour la variable réelle), soit par convergence normale (comme indiqué dans le programme officiel)
☞ Pour la dérivabilité le sens facile au programme.

• $\boxed{28}$ Inégalité de Markoz, Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres.
☞ Surtout l'enchaînement des trois.

Analyse

0.1 séries numériques

• $\boxed{29}$ Règle de d'Alembert pour les séries à termes tous non nuls.
☞ Exo 6 banque ccinp.

• $\boxed{30}$ TSSA.
☞ Exo 8 banque ccinp.

• $\boxed{31}$ Critère de comparaison pour les séries à TERMES POSITIFS.
☞ Exo 7 banque ccinp.

0.2 suites et séries de fonctions

• $\boxed{32}$ Continuité de la somme d'une série de fonctions continue qui converge uniformément.
☞ Exo 12 banque ccinp.

• $\boxed{33}$ Interversion limite intégrale sur un segment.
☞ Exo 15 banque ccinp.

• $\boxed{34}$ La convergence normale implique la convergence uniforme (difficile).
☞ Exo 14 banque ccinp.

0.3 Topologie

• $\boxed{35}$ un compact est une partie fermée et bornée.
☞ Exo 14 banque ccinp.

• $\boxed{36}$ Une partie fermée F d'un compact K est compact. (facile)
☞ Une suite de ce fermé admet une suite extraite qui converge dans le compact K, mais la limite est dans F car F est fermée.

• $\boxed{37}$ Caractérisation séquentielle d'un point d'adhérent.
☞ exo 34 banque ccinp
☞ Dans les exercices, utiliser plutôt la caractérisation.

• $\boxed{38}$ Caractérisation séquentielle de la continuité.
☞ exo 35 banque ccinp

• $\boxed{39}$ Image réciproque d'une partie fermée par une fonction continue.
☞ L'espace de départ doit être l'espace E en entier.

☞ On le fait pour les fermés , on déduit par complémentaire le résultat pour les ouverts.
☞ On utilise caractérisation séquentielle de la continuité, question de cours précédente, et caractérisation séquentielles des fermées, donc c'est facile.

• $\boxed{40}$ L'image directe par une fonction continue d'une partie compacte est une partie compacte.
☞ On construit une suite d'antécédents, puis une suite extraite qui converge dans K et on utilise la caractérisation séquentielles de la continuité.

0.4 Série entières pas mal de choses

• $\boxed{41}$ Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.
☞ La norme infinie de $x \mapsto a_n x^n$ est facilement majorée sur le disque ouvert.

• $\boxed{42}$ Rayon de convergence de la somme de deux séries entières.
☞ Banque ccinp 22.

• $\boxed{43}$ Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.
☞ On applique le résultat 41 la cvn implique cvu et on n'oublie pas de dire que les fonctions $x \mapsto a_n x^n$ sont continues.

• $\boxed{44}$ Dérivabilité termes à termes de la somme d'une série entière sur $]-R, R[$.
☞ Ne pas oublier de dire que les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$

0.5 Etude de la continuité des applications linéaires

• $\boxed{45}$ Caractérisation de la continuité d'une application linéaire.
☞ Banque ccinp 36.

• $\boxed{46}$ Une norme triple est sous-mulitplicative :$|||u \circ v||| \leqslant |||u||| \times |||v|||$.
☞ C'est l'objet du début du sujet mines ponts 2023 mp

0.6 Systèmes différentiels

• $\boxed{47}$ Existence $exp(A)$.
☞ L'acv implique cv en dimension finie et bien comprendre ce que veut dire acv .

• $\boxed{48}$ Continuité de $A \mapsto exp(A)$.

☞ Une des rares fois où l'on utilise le cours sur les séries de fonctions dans les evns.
• $\boxed{49}$ Dérivabilité de $t \mapsto exp(tA)$.

Et histoire de faire 50 questions.
• $\boxed{50}$ Théorème de la limite de la dérivée.
☞ Exo banque ccinp 4.

Quelques démonstrations

$\boxed{1}$ u un endomorphisme de E et P et Q deux polynômes premiers entre eux.

$\triangleright$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(u))$ donc $P(u)(x) = 0$ et $(QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$ donc $[(QP)(u)](x) = Q(u)(P(u)(x)) = 0$ ce qui donne $x \in \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$, ainsi $\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$).

$\triangleright$ On applique le théorème de Bézout : Il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$. Ce qui donne

$$\mathrm{Id}_E = (AP + BQ)(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$$

Donc si $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$, on a :

$$\begin{aligned} x &= (A(u) \circ P(u))(x) + (B(u) \circ Q(u))(x) \\ &= \underbrace{A(u)(P(u)(x))}_{=0} + \underbrace{B(u)(Q(u)(x))}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\ker P(u) \cap \ker Q(u) = \{0\}$.

$\triangleright$ On a $\ker (P \times Q)(u) \subset \ker P(u) + \ker Q(u)$ et si $x \in \ker (P \times Q)(u)$, alors :

$$x = \underbrace{(A(u) \circ P(u))(x)}_{\in \ker Q(u)} + \underbrace{(B(u) \circ Q(u))(x)}_{\in \ker P(u)}.$$

En effet, $Q(u)(P(u) \circ A(u)(x)) = (A(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$ et $P(u)(Q(u) \circ B(u)(x)) = (B(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}[(PQ)(u)] = \mathrm{Ker}(P(u)) + \mathrm{Ker}(Q(u))$

Finalement on a montré : $\mathrm{Ker}[(PQ)(u)] = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$.

1

Année 2025

Où l'on apprend à utiliser le TFA

Source cours première année

Montrer que la fonction $\psi : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ de classe $\mathcal{C}^1$en vertu du théorème fondamental de l'analyse car $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$est continue sur $\mathbb{R}$, la dérivée de φ est $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Or pour tout réel x , $\psi(x) = \varphi(x^2) - \varphi(x)$, par composition de fonctions dérivables :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^4} - \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Année 2025

Où l'on apprend à majorer une intégrale

Source devoir été

Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est majorée sur sur $\mathbb{R}^+$

☞Pour majorer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ il faut que les inégalités soient vérifiées pour tous les "t" entre a et b (et que $a \leqslant b$) . Donc si 'lintégrale est $\displaystyle\int_0^x$ se protéger en supposant que x est assez grand ne suffit pas . Heureusement , il y a la relation de Chasles
On sait si $t \in [1, +\infty[$ alors $t^2 \geqslant t$ et donc $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$
Or pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad (1)$$

Donc pour $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$$

Donc pour $x \geqslant 1$

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-1}$$

(le lecteur avisé expliquera pourquoi cette formule n'est valable que pour $x \geqslant 1$ bien que (1) soit valable pour tout x.)
Mais, il a été vu que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est croissante donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-1}$$

donc la fonction considérée est bien majorée.
☞En fait avec le cours de cette semaine par domination on peut démontrer l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ car $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-t}\right)$ la fonction est positive elle majorée par $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$. Merci les relations de comparaison mes amis pour la vie.

Année 2025

Le corollaire de la limite de la dérivée

Source devoir été

$$\forall x > 0, \psi'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{x}}.$$

Comment en déduire que ψ n'est pas dérivable en 0 ?

Rappel du cours
Si f est une fonction continue sur $[0,1]$ (par exemple) et dérivable sur $]0,1]$ et si la dérivée de f admet une limite **finie** en 0 alors f était dérivable en 0 de nombre dérivée en 0 $f'(0) = \lim\limits_{x \mapsto 0} f'(x)$ (et on a la classe $\mathcal{C}^1$)
Si la dérivée admet une limité infinie alors f n'est pas dérivable en 0 et la courbe représentative de f admet une tangente verticale.
Si la dérivée n'admet pas de limite la fonction f peut cependant être dérivable (on aura une fonction dérivable mais pas de classe $\mathcal{C}^1$
Pour le dernier cas $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité, dérivable en 0 (car admet un DL1) mais la dérivée n'admet pas de limite.

Dans le devoir d'été
$\forall x > 0,\ \psi'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{x}}$ et ψ est continue en 0. $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \psi'(x) = +\infty$. Le corollaire du théorème de la limite de la dérivée assure que ψ n'est pas dérivable en 0 .
On pourra également penser aux fonctions Arcsin et Arccos . Pour $\sqrt{.}$ cela marche aussi mais le taux d'accroissement est facile à former.
☞La démonstration du théorème de la limite de la dérivée est l'objet de l'exo 4 de la banque

Chapitre 2

Algebre

2.1 Réduction

10

Savoir calculer un polynôme caractéristique de degré n

☞ **Il faut ABSOLUMENT dire comment on calcule le déterminant**
☞ **Attention aux fautes de signe $(-1)^{i+1}$ donc le terme en bas de la première colonne...**

extrait du ds3 E3A 2006

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $E = M_n(\mathbf{C})$. La matrice identité de E est notée I_n.
Soit $F = (f_{ij})$ la matrice de E définie par:

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_n$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de F est $X^n - 1$ et déterminer les valeurs propres de F.

   On note $\{\lambda_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ les valeurs propres de F.

2. La matrice F est-elle diagonalisable dans E ? La matrice F est-elle inversible ?

3. Calculer F^p où $p \in \mathbf{Z}$.

   Soit $G = \{F^p, p \in \mathbf{Z}\}$.

4. Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Vect}(G)$.

Correction et rédaction

1. Pour tout z de $\mathbb{C}$, on a

$$\chi_F(X) = \det\left(-F + X \cdot I_n\right) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}_n$$

   et en développant suivant la première colonne, on a

$$\chi_F(X) = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ X & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X & -1 \end{vmatrix}_{n-1},$$

   c'est-à-dire finalement $\chi_F(X) = (X^n - 1)$

   Les valeurs propres de F sont donc les n racines n-ièmes de l'unité : $\lambda_k = \exp\left[\dfrac{2ik\pi}{n}\right]$, pour $k \in \{1, \cdots, n\}$ (numérotée ainsi pour la suite)

2. La matrice F ayant un polynôme caractéristique scindé à racines simples, F est diagonalisable (et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles). Comme 0 n'est pas valeur propre, F est inversible

3. Avec le théorème de Cayley-Hamilton on a $F^n = I_n$, et donc $F^p = F^r$ où r est le reste de la division euclidienne de p par n.

4. D'après la question précédente $G = \operatorname{Vect}\left\{F^k, 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$. De plus le polynôme minimal de F a les mêmes racines que son polynôme caractéristique , c'est donc son polynôme caractéristique (n racines distinctes). Le théorème du cours nous dit que l'agèbre $\mathbb{C}[F]$ est de dimension n.

Générateurs de $\mathcal{O}(E)$

Groupes et matrices

Montrer que $\mathcal{O}(E)$, l'ensemble des isométries d'un espace euclidien E est engendré par les réflexions (symétries par rapport à un hyperplan).

☞ **S'inspirer de la démonstration de : les transpositions engendrent S_n.**
☞ **Sans indication ce serait difficile, prendre chaque étape comme un exercice**
Etape 1 Lemme
Si u et v sont deux vecteurs non nuls de E vérifiant $||u|| = ||v||$ alors il existe une reflexion σ (ou l'identité si $u = v$) telle que

$$\sigma(u) = \sigma(v).$$

On considère $n = u - v$ et $H = \Big(\text{Vect}(n)\Big)^{\perp}$. On remarque $u - v$ et $u + v$ sont orthogonaux ($(u + v \mid u - v) = ||u||^2 - ||v||^2 = 0$) et de plus

$$u = \frac{u+v}{2} + \frac{u+v}{2}.$$

or $\dfrac{u-v}{2} \in \text{Vect }(n)$ et donc $\dfrac{u+v}{2} \in \Big(\text{Vect}(n)\Big)^{\perp}$.
et donc si note σ la réflexion par rapport à $\Big(\text{Vect}(n)\Big)^{\perp}$, on a $\sigma(u) = v$.
On peut alors montrer le résultat par récurrence sur la dimension de E. Pour E de dimension 1 il y a deux isométries Id et $-Id$, on peut considérer que les reflexions engendrent $\mathcal{O}(E)$. Donnons nous un espace de dimension n et supposons le résultat vrai au rang $n - 1$. **Etape 2** Soit $\sigma \in \mathcal{O}(E)$, si $\sigma = Id$ alors σ appartient bien au groupe engendré par les réflexions. Sinon, il existe u et v tel que $\sigma(u) = v$. Mais σ conserve les normes, donc $||u|| = ||v||$: il existe une réflexion notée : τ telle que $\tau(v) = u$. Mais alors $\tau \circ \sigma$ admet $Vect(u)$ comme droite stable, et donc son orthogonal est stable

$$\text{Vect}(u) \bigoplus H = E$$

on a noté $H = \Big(\text{Vect}(n)\Big)^{\perp}$. Donc $\tau \circ \sigma$ est un élément de $\mathcal{O}(H)$ (sa restriction) donc se décompose en produit de réflexions τ_i de $\mathcal{O}(H)$. Mais on définit les réflexions de $\mathcal{O}(E)$ comme étant égales à τ_i sur H et l'identité sur $\text{Vect}(u)$ (ce sont des isométries et elles laisent toujours un hyperplan stable)

$$\tau \circ \sigma = \tau_1 \circ \ldots \tau_k \text{ ce qui donne } \sigma = \tau \circ \tau_1 \circ \ldots \tau_k.$$

2.2 Espaces euclidiens

$< u(x)|x >$ pour u est symétrique

☞ **Un calcul à savoir refaire aux conséquences nombreuses.**

Soit u un endomorphisme autoajoint : une jolie formule

Soit u un endomorphisme autoadjoint positif de E euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres (λ_i la valeur propre associée. Calculer

$$< u(x), x >$$

Correction.

On écrit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} < x|e_i > e_i$ et en vertu de l'orthonormalité de la base :

$$< u(x), x >=< \left(\sum_{i=1}^{n} < x|e_i > u(e_i)\right) | \sum_{i=1}^{n} < x|e_i > e_i >=$$

$$< \sum_{i=1}^{n} < x|e_i > \lambda_i e_i | \sum_{i=1}^{n} < x|e_i > e_i >= \sum_{i=1}^{n} < x|e_i >^2 \lambda_i.$$

Soit u un endomorphisme autoadjoint positif une équivalence

u un endomorphisme autoadjoint est positif ssi ses valeurs propres sont positives.

Corrrection En effet supposons que pour tout $x \in E$ $< u(x), x > \geqslant 0$, c'est en particulier vrai pour les vecteurs propres de u, donc $\lambda_i ||e_i||^2 \geqslant 0$ et les vecteurs propres sont non nuls, donc les valeurs propres sont positives.

Réciproquement $\forall x \in E$ $< u(x), x >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} < x|e_i >^2 \lambda_i$. donc si les valeurs propres sont positives on a le résultat.

Soit u un endomorphisme autoadjoint : Norme triple

Soit u un endomorphisme autoadjoint , on considère la norme triple de u subordonnée à la norme euclidienne :

$$|||u||| = \mathbf{Sup}_{||x||=1}\{||u(x)||, x \in E\}$$

Montrer que $|||u||| = Sup\{|\lambda|, \lambda \in \mathbf{Sp}(u)\}$.

Pour tout $x \in E$ **,**$< u(x), u(x) >= ||u(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} < x|e_i >^2 \lambda_i^2$ **et** $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} < x|e_i >^2$**.**
Si on pose $k = Sup\{|\lambda|, \lambda \in \mathbf{Sp}(u)\}$ **on a alors.**

$$||u(x)|| \leqslant k||x|| \qquad (1)$$

Donc $|||u||| \leqslant k$ **mais l'inégalité 1 est une égalité dans le cas d'un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre en valeur absolue ! D'où la conclusion.**
On peut donc en déduire que $u \mapsto \rho(u)$ **est une norme sur les endomorphismes symétriques et que cette norme est sous multiplicative car c'est une norme triple.**

21

Année 2024-2025

Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Episode 1.

☞ **Sans quantificateur cela ne vaut pas grand chose.**
☞ **On raisonne soit par analyse synthèse soit inclusion plus égalité des dimensions**

exemple écrit ccinp 2021

On désigne, pour n entier naturel, $n \geqslant 2$:

1. **$M_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.**
2. **$D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.**

On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique ($\langle A|B\rangle = \text{trace}(A^T.B)$), déterminer $(D_n(\mathbb{R}))^{\perp}$, l'orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

Correction : je donne ici une correction d'une collègue et après la correction les remarques du rapport
$M_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique :

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \quad < A|B >= \text{Tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

On note $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les matrices de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.
$D_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales. $(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $D_n(\mathbb{R})$ et est de cardinal n donc $D_n(\mathbb{R})$ est de dimension n.
Alors $D_n(\mathbb{R})^{\perp}$ est le supplémentaire orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$, donc

$$\dim(D_n(\mathbb{R})^{\perp}) = \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(D_n(\mathbb{R})) = n^2 - n.$$

Posons $F = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \forall i \in [|1,n|], a_{i,i} = 0\} = \mathbf{vect}(\{E_{i,j}, (i,j) \in [|1,n|]^2, i \neq j\})$.
$(E_{i,i})_{(i,j)\in[|1,n|]^2, i\neq j}$ est une base de F et est de cardinal $n^2 - n$ donc F est de dimension $n^2 - n$.

$$\forall A \in F, \quad \forall B \in D_n(\mathbb{R}), \quad < A|B >= \sum_{(i,j)\in[|1,n|]^2} a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{i,i}}_{=0} b_{i,i} + \sum_{i\neq j} a_{i,j} \underbrace{b_{i,j}}_{=0} = 0.$$

Donc $F \subset D_n(\mathbb{R})^{\perp}$. De plus ces deux sous-espaces vectoriels sont de même dimension $n^2 - n$, donc sont égaux. Finalement

$$\boxed{D_n(\mathbb{R})^{\perp} = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \forall i \in [|1,n|], a_{i,i} = 0\} = \mathbf{vect}(\{E_{i,j}, (i,j) \in [|1,n|]^2, i \neq j\}).}$$

Le rapport dit :

Exercice assez peu réussi. On pouvait procéder par équivalence, en particulier en utilisant une base de l'espace des matrices diagonales. Certains ont fait une démarche par condition nécessaire oubliant la réciproque. Enfin, peu savent que le produit scalaire ici est le même que le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Année 2024-2025

Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Episode 2.

☞ **une question très classique mérite tout de même une rédaction.**
☞ **A priori rien n'est connu sinon autant admettre le résultat complet comme dans le sujet E3A 2022**

exemple écrit centrale 2017

Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs dimensions.

Correction
Je donne ici le corrigé d'un collègue et une autre solution après.
• L'application $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\psi^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$
Il s'agit donc d'une symétrie or $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = E_1(\psi)$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = E_{-1}(\psi)$ donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
De plus soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,
avec les propriétés de la trace et par caractère symétrique du produit scalaire, on a :

$$\mathrm{tr}(S^\top A) = \mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(-A^\top S) = -\mathrm{tr}(A^\top S) = -\mathrm{tr}(S^\top A)$$

donc $\mathrm{tr}(S^\top A) = 0$ et ainsi $S \perp A$
d'où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux
En notant pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients valent 0 sauf celui situé à la ligne i et colonne j qui vaut 1.
la famille $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ est une base (libre et génératrice) de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ constituée de $\dfrac{n(n+1)}{2}$ vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension n^2
d'où $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$
•
On remarque que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

la première matrice est symétrique et la seconde est antisymétrique.
Donc $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
De plus soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,
avec les propriétés de la trace et par caractère symétrique du produit scalaire, on a :

$$\mathrm{tr}(S^\top A) = \mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(-A^\top S) = -\mathrm{tr}(A^\top S) = -\mathrm{tr}(S^\top A)$$

donc $\mathrm{tr}(S^\top A) = 0$ et ainsi $S \perp A$
d'où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux et la somme est donc directe. Ce sont des supplémentaires orthogonaux.
On pourrait aussi dire que l'application introduite au début est autoadjointe pour le produit scalaire usuel et donc orthodiagonalisable.

23

Année 2024-2025

Généraliser des méthodes vues lors de de démonstrations.

☞ On rappelle que si F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u^*.
☞ Il n'est pas interdit de raisonner par récurrence sur les dimensions.
☞ Si u est auto-adjoint, orthogonal, antisymétrique alors les restrictions aussi.

endomorphismes antisymétriques bijectifs journalier

Soit f un endormorphisme de E tel que $f^* = -f$.
1) Ecrire l'égalité vérifiée pour tout $x \in E$ $y \in E$ que l'on déduit de $f^* = -f$.
2) Montrer que pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ sont orthogonaux. En déduire les valeurs propres réelles possibles de f.
3) Montrer que $s = f \circ f$ est symétrique.
4) On suppose maintenant que f est bijective.
Soit λ une valeur propre de s et x un vecteur propre associé. Montrer que

$$(s(x) \mid x) = \lambda ||x||^2 = -||f(x)||^2.$$

En déduire que $\lambda < 0$.
5) On considère toujours x vecteur propre de s pour λ.
Montrer que les espaces $F =$Vect$(x, f(x))$ et $F^\perp$ sont stables par f et que l'endomorphisme induit par f sur F a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ où } b > 0.$$

dans une base orthonormale bien choisie. On précisera la valeur de b en fonction de λ.
6) Conclure que la dimension de E est paire.

Correction 1) $\forall x \in E$, $\forall y \in E$, $(f(x)|y) = -(x|f(y))$.
2) $\forall x \in E$, $(f(x)|x) = -(x, f(x))$ **donc** $2(x|f(x)) = 0$. **Soit** λ **une valeur propre et** x **un vecteur propre associé, alors** x **et** $f(x)$ **sont orthogonaux donc** x **et** λx **sont orthogonaux,** x **étant non nul il faut** $\lambda = 0$
3) $(f \circ f)^* = (-f) \circ (-f) = f \circ f$ **donc** $s \in \mathcal{S}(E)$.
4) f **est supposée bijective donc** 0 **n'est pas valeur propre de** f **donc** f **n'admet de valeur propre.Sp**$(f) \subset \{0\}$.
Soit λ **valeur propre de** s **et** x **vecteur propre associé.**

$$(s(x)|x) = \lambda ||x||^2 = (f(f(x))|x) = (f(x)|f^*(x)) = -(f(x)|f(x)) = -||f(x)||^2.$$

Or $||x||^2$ **est non nul donc** $\lambda < 0$.

5) On sait que $f\Big(\mathbf{Vect}(x, f(x))\Big) = \mathbf{Vect}(f(x), f(f(x)))$.
of $f(f(x)) = \lambda x$ **donc** $f(F) \subset F$**.** F **est stable par** f **donc** $F^{\perp}$ **est stable par** $f^* = -f$ **donc par** f**. Dans une base orthonormale, la matrice de** f **est antisymétrique donc de la forme demandée et il faut** $-b^2 = \lambda$ **donc** $b = \sqrt{-\lambda}$ **(** λ **avait été vu négatif.)**
6) On démontre par récurrence sur la dimension de E **qu'il existe une base orthonormée telle que**

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & -b_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \begin{pmatrix} 0 & -b_p \\ b_p & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

On finit par récurrence (forte)sur la dimension de E **Le cas** $n = 2$ **a été vu, et de** $F \oplus F^{\perp} = E$ **on applique le résultat à** F **pour** $i = 2$ **et à** $F^{\perp}$ **pour** $i = n - 2$**. C'est possible car** $f_{|_F}$ **et** $f_{|_{F^{\perp}}}$ **sont encore antisymétrique. D'où la forme de la matrice donc** n **est pair.**
Plus rapidement pour n **pair :** $det(A^T) = det(A) = det(-A) = (-1)^{\mathbf{dim}(E)} det(A)$ **et** $\mathbf{det}(A)$ **est non nul d'où** $\mathbf{dim}(E)$ **est pair.**

Autour de $A^T A$

☞ **On pourra revoir le ds7 sujet E3A**
☞ **On pourrait avoir le même genre de question avec $u^* \circ u$.**
☞ **SIl faut apprendre le vocabulaire : définie positive cela veut dire $\mathcal{S}_n^{++}$.**

sujet ds 7

Soit A dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A inversible.
(i) Justifier que $A^T A$ est une matrice symétrique définie positive.

Correction
On montre d'abord symétrique $\left(A^T A\right)^T = (A^T)(A^T)^T = A^T A$, donc A est symétrique.
Pour la suite soit on montre que les valeurs propres sont positives ou la propriété du produit scalaire (les deux sont équivalentes d'après le cours et la fiche 20)
On calcule

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad (A^T AX \mid X) = (X^T A^T X)(AX) = ||AX||^2 \geqslant 0$$

donc $A^T A$ est positive. De plus A est inversible donc $A^T A$ également et il est connu que

$$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \bigcap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$$

(ou encore 0 n'est pas valeur propre)

rang de $A^T A$

Montrer que rg$\left(A^T A\right)$=rg(A)

Correction : il faut penser à passer aux noyaux. Tout d'abord Im$(f \circ g)$ $\subset$Im(f), donc rg$\left(A^T A\right)$$\leqslant$ rg$\left(A^T\right)$ =rg(A).
Soit $X \in$ Ker$A^T A$ alors $A^T AX = 0$ et en multipliant par X^T à gauche, on obtient

$$X^T A^T AX = 0 \text{ c'est à dire } ||AX||^2 = 0 \text{ donc } AX = 0$$

finalement $X \in$ Ker$A$, Ker$A^T A \subset$ Ker(A). La formule du rang permet de dire que
rg$(A^T A)$$\geqslant$ rg(A).
(attention on pourrait avoir AA^T au départ....)

25

Année 2024-2025

racine carrée d'une matrice symétrique positive (ou définie positive)

☞ **On pourra revoir le ds7 sujet E3A**
☞ **L'existence est facile**
☞**Dans le cas $\mathcal{S}_n^{++}$, on a l'unicité. On lit dans un rapport centrale mp, que l'unicité n'a été montrée que par 10 pour cent des candidats, donc ne pas passer trop de temps dessus. C'est hyper classique. on donne ici la démonstration par le lemme des noyaux. On peut aussi utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.**

sujet ds 7 modifié un peu

Soit A dans $\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe B symétrique positive telle que $B^2 = A$
Dans le ds on l'applique à $A^T A$ voir fiche 24

Correction
En vertu du théorème spectral, il existe une matrice orthogonale de diagonalisation P, telle que

$$A = P^T \mathbf{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) P$$

les valeurs propres λ_i sont positives par caractérisation des matrices symétriques positives (fiche 20). On pose alors
$B = P^T \mathbf{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P$.
On a alors $B^2 = A$, B est symétrique (à vérifier rapidement) et les valeurs propres de B sont positives.

sujet ds 7 modifié un peu

Soit A dans $\mathbb{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer l'unicité dans la question précédente.

Correction : on se donne deux matrices B et B' symétriques définies positives telles que $B^2 = B'^2 = A$.
Pour toute valeur propre α de B (par exemple) , celle-ci est non nulle , donc $(X - \alpha)$ et $(X + \alpha)$ sont premiers entre eux. On peut appliquer le lemme des noyaux :

$$ker(B - \alpha I_n) \oplus ker(B + \alpha I - n) = ker(B^2 - I_n) = ker(B'^2 - I_n) = ker(B' - \alpha I_n) \oplus ker(B' + \alpha I_n)$$

Mais les valeurs propres de B et B' sont imposées positives (sinon il n'y a pas unicité d'ailleurs),
donc $ker(B + \alpha I_n) = \{0\}$. On obtient l'égalité des noyaux de deux endomorphismes diagonalisables. Ces noayux sont en somme directe égale à tout l'espace. Donc $B = B'$.

Chapitre 3

Analyse

Beaucoup de théorèmes d'analyse dans le devoir 5

TCD

On définit l'intégrale pour $n \geqslant 1$

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n}\, dt.$$

Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Faire attention

☞ La limite simple doit être détaillée.
☞ La fonction qui domine doit être mise en valeur.
☞ Si oubli de valuer absolue = 0 point.

Corrigé
On note pour tout $n \geqslant 1$ entier et tout réel $t \geqslant 0$, $f_n(t) = \frac{t^2}{(1+t^4)^n}$.
• La suite de fonction f_n converge simplement vers la fonction nulle. En effet, si $t = 0$, alors $f_n(t) = 0$ pour tout n. Pour $t \neq 0$, $(1+t^4) > 1$, la suite géométrique converge vers 0 .
• La fonction nulle est continue par morceaux (hyp qui peut être omise)
• On avait vu que les fonction f_n était intégrale que $[0, +\infty[$ on le redémontre par la domination :

$$\forall n \geqslant 1, \forall t \geqslant 0 \mid f_n(t) \mid \leqslant f_1(t) =_{\text{def}} \varphi(t)$$

or f_1 a été vue intégrable (et est indépendante de n), le tcd permet d'intervertir les symboles intégrale et limite.

TCD

Après changement de variable (refait en td ce mercredi).

$$u_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} \int_0^{+\infty} \frac{u^{-\frac{1}{4}}}{(1+\frac{u}{n})^n}\, du.$$

Donner un équivalent de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Année 2024

Lien suites séries

À retenir

☞ La formule D'euler est obtenue ainsi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(k) + \gamma + o(1)$.
☞ Les calculs sont parfois pénibles.
☞ On peut aussi utiliser la sommation des relations de comparaisons, attention à l'hypothèse à termes positifs et les cas convergentes ou divergentes.
Théorème La série $\sum_{n \geqslant 0} \left(u_{n+1} - u_n\right)$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$ converge. Dans le cas de convergence on retrouve la somme à partir de la limite de u_n.

exemple ds4 sujet 2 mines

Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge.

Correction
On pose $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)$. On étudie alors la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ On a

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}(1 + \frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{n}(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}(1 - \frac{2}{n} + O(\frac{1}{n^2})) - 2\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})\right) + 2\sqrt{n}$$

$$= -\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + O(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$$

Donc $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ par comparaison de série à termes de signe constants , $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ est convergente donc la suite (u_n) est convergente.
On peut aller plus loin en donnant un équivalent du reste de Riemann voir la fiche 41

41

Année 2024

Comparaison séries intégrales épisode 1

À retenir

☞ On présente ici le cas des suites numériques voir la fiche 79 pour le cas des séries de fonctions et 82 pour le cas à trois lettres.
☞ Il n'y a plus de théorème au programme .
☞ On conseille de repasser par des sommes partielles ou des restes partiels dans le cas convergnetes. En effet, la relation de Chasles est fausse pour un infinité d'intervalles.
☞ On traite ici le cas des séries convergentes voir fiche 42 pour divergentes.
☞ Le points clef est la décroissance de la série
☞ Le cas $\alpha = 1$ ne change que par le calcul de la primitive, on retrouve la formule d'Euler pour son premier terme

Divergences des séries de Riemman $\alpha < 1$

Soit $\alpha < 1$ alors la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$$

Pour le cas $\alpha \leqslant 0$ le terme général ne tend pas vers 0 c'en est réglé.
Pour $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, où $x > 0$ et $\alpha < 1$, on sait que f est une fonction décroissante. On peut donc utiliser l'inégalité classique de comparaison entre une série et une intégrale :

$$\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx.$$

L'inégalité de gauche est vraie pour tout $n \geqslant 1$, et celle de droite pour $n \geqslant 2$.
Pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, considérons la somme partielle S_N donnée par :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}.$$

En utilisant la comparaison série-intégrale, nous avons :

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant S_N \leqslant 1 + \int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

Calculons l'intégrale pour $\alpha < 1$:

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^N = \frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

Ainsi,

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\,dx \sim \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Comme $\alpha < 1$, l'intégrale diverge lorsque $N \to \infty$, ce qui implique que la série diverge également et par pincement d'équivalent (au programme) :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$$

Comparaison séries intégrales épisode 2

À retenir

☞ On traite ici le cas des séries convergentes voir fiche 41 pour divergente.
☞ Le points clef est la décroissance de la série

Convergence des séries de Riemman $\alpha > 1$

Soit $\alpha > 1$ alors la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Pour $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, où $x > 0$ et $\alpha > 1$, on sait que f est une fonction décroissante. On peut donc utiliser l'inégalité classique de comparaison entre une série et une intégrale : Pour tout $k \geqslant n \geqslant 2$.

$$\int_k^{k+1} f(x)\, dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{n} f(k)\, dx.$$

Pour la série $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha})$, considérons le reste partiel R_N donnée par :

$$R_N = \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha}.$$

En utilisant la comparaison série-intégrale, nous avons :

$$\int_n^N \frac{1}{x^\alpha}\, dx \leqslant S_N \leqslant \int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\, dx.$$

Calculons l'intégrale pour $\alpha < 1$

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^N = \frac{N^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha}.$$

Ainsi,

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\,dx \sim \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

43

Année 2024

Sommation des relations de comparaison

À retenir

☞ L'hypothèses à termes positifs est essentiel.
☞ Ne pas confondre le cas des séries convergentes (on compare les restes) et des séries divergentes (on compare les sommes partielles).

deux exemples faciles

Donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$$

et

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k}.$$

Correction

Notons que les deux séries sont à termes positifs et convergente pour la deuxième divergente pour la seconde or

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et

$$\frac{1}{n^2+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

par sommation des relations de comparaison des séries à termes positifs :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

le dernier équivalent n'est pas au programme mais voir fiche 41.

44

Année 2024

Continuité par convergence normale sur tout segment

Ce que permet le cours

☞ **On peut vérifier l'hypothèse de convergence uniforme sur tout segment inclus dans l'ensemble de définition.**
☞ **Si l'ensemble de définition est un intervalle ouvert en une borne finie ($]0,+\infty[$, $]1,+\infty[$) on le fait quasi systématiquement**
☞ **On tente la convergence normale sur tout segment sauf le cas des séries alternées voir fiche 45**
☞ **Ne pas oublier de citer l'hypothèse de continuité des f_n**

exemple issu devoir libre suites et séries de fonctions

Pour tout $\varepsilon > 0$, établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(x \mapsto e^{-xn^\alpha}\right)$ sur $[\varepsilon,+\infty[$. En déduire la continuité de la fonction S_α sur $]0,+\infty[$ (on explicitera le théorème utilisé).

Correction

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [\varepsilon,+\infty[$, on a: $\left|e^{-xn^\alpha}\right| = e^{-xn^\alpha} \leqslant e^{-\varepsilon n^\alpha}$. On en déduit:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant e^{-\varepsilon n^\alpha},$$

où la norme infinie est considérée sur $[\varepsilon,+\infty[$ (nous avons défini f_n en préambule).

Or nous avons démontré dans la question 2.(b) que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-\varepsilon n^\alpha}$ converge (prendre $x = \varepsilon$). D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[\varepsilon,+\infty[$.

Puisque la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$ (c'est la composition de l'application polynomiale $x \mapsto -xn^\alpha$, continue sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de l'exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$), on en déduit que la somme $S_\alpha = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]0,+\infty[$.

45

Année 2024

Continuité par convergence uniforme grâce au tssa

Ce que permet le cours

☞ **Lorsque la série de fonctions ne converge pas absolument il ne peut pas y avoir de convergence normale (même sur tout segment) .**
☞ **Il faut connaître la majoration du reste d'une série alternée en signe**
☞ **Obligation d'écrire la norme uniforme du reste , on rappelle le résultat du cours : il y a cvu ssi il y a cvs et cvu vers 0 du reste**
☞ **Ne pas oublier de citer l'hypothèse de continuité des f_n**

exemple classique

Pour tout $x > 0$, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

Montrer que S est définie, continue sur $]1, +\infty[$.
☞ Dans la fiche 46 on montre que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ mais on peut montrer la continuité par la convergence uniforme.
Soit $x > 0$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ vérifie (facilement) les trois hypothèses du TSSA, elle est donc convergente. De plus pour tout $n \geqslant 0$

$$\forall x > 0, |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1+x)} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Le majorant est indépendant de x donc :

$$\left|R_n\right|\infty^{]0,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Le reste converge uniformément vers 0 sur $]0, +\infty[$, pour tout n f_n est continue
$\underline{S \text{ est continue sur }]0, +\infty[}$

Remarque : on peut en déduire un équivalent de S en 0, on ne

peut pas appliquer le th de la double limite qui ne donne pas d'équivalent et surtout f_0 **n'admet de limite en 0. Mais,** $S(x) - \frac{1}{x}$ **va vérifier le th de la double limite car il y a cvu sur** $]0, +\infty[$ **donc** $S(x) - \frac{1}{x}$ **tend vers une limite fine (** $-\mathbf{ln}(2)$**) donc**

$$S(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x} - \mathbf{ln}(2) + o(1).$$

46

Année 2024

Dérivation termes à termes

L'exemple vu en td très classique

☞ **Voir la fiche 44 pour continuité)** Pour $x > 0$, on définit :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

a) Justifier que S est définie de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Préciser le sens de variations de S.

Correction et rédaction

☞ **les points clefs**

- **Hypothèse classe $\mathcal{C}^1$ des f_n (et pas seulement dérivable).**
- **Conclusion sur le signe qui s'applique à la somme.**
- **convergence normale pour avoir la convergence uniforme.**

On note pour $x > 0$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$, pour tout n f_n est de classe $\mathcal{C}^1$, la série, pour x fixé, $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ vérifie les hypothèses du TSSA donc est convergente. Pour tout n pour tout $x > 0$. :

$$|f_n'(x)| = \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Donc $|| \ f_n' \ ||_\infty \leqslant \frac{1}{n}^2$ or la série $\sum \frac{1}{n}^2$ est convergente donc la série $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[0, +\infty[$.
Finalement S est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x > 0$:

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}.$$

b) La série définissant S' vérifié également le TSSA (mais pour la cvu on peut éviter d'utiliser le TSSA dans ce cas) mais on a en conclusion que les restes sont du signe de leur premier terme ainsi que la somme. Le premier terme de S' est négatif, S est décroissante.

Année 2024

Utilisation du théorème de la double limite en $+\infty$

Enoncé du théorème

soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers S sur A, et soit a un point adhérent à A; si, pour tout n, u_n admet une limite l_n en a, alors $\sum_{n\geqslant 0} l_n$ converge vers l et $\lim_{x\to a} S(x) = l$.
Dans l'exemple qui suit $a = +\infty$, $A =]0, +\infty[$ et $F = \mathbb{R}$

exemple

☞ **les points clefs**

- **Interdiction d'utiliser ce théorème en vérifiant l'hypothèse sur tout segment inclus dans...**
- **On peut (comme pour tout calcul de limite) vérifier les hypothèses sur UN voisinage de $+\infty$**
- **convergence normale pour avoir la convergence uniforme.**
- **Attention à la limite de f_0**

On note pour $x \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x}$,
On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
1) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. (voir fiche correspondante)
2) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Correction

$||f_n||_\infty^{[1,+\infty[} = \frac{1}{n^2}$ la série converge normalement donc uniformément sur $[1, +\infty[$, $\forall n \geqslant 1$, $f_n(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et la première est égale à 1 le théorème de la double limite permet de conclure.

$$f \quad \text{tend vers 1 quand } x \text{ tend vers } +\infty.$$

48

Année 2024

Intégration termes à termes

À retenir

☞ Il y a trois théorèmes possibles, un seul permet de montrer qu'une somme est égale à $+\infty$
☞ L'exercice peut commencer par un petit DSE
(souvent série géométrique)
☞ Dans le cas des séries géométriques on peut tout faire à la main

Premier exemple (voir fiche 49 pour le deuxième) ccinp 2019 écrit

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour tout $t\in]0,+\infty[$,

$$f(t)=\frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

Q1. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$ puis, à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt$.

Correction Au brouillon on fait un DSE de la fonction f puis on rédige en introduisant la bonne série de fonctions.
Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie sur $]0,+\infty[$ par
$f_n(t)=te^{-(n+1)t}$.
• $\forall n\geqslant 0$, f_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ car $f_n(t)\underset{+\infty}{=}o\left(1/t^2\right)$ et sont continues en 0 (on ouvre en 0 pour la somme de fonctions pour obtenir l'expression de f qui n'est pas définie en 0, on peut également prolonger par continuité f en 0.)
• la série de fonctions converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers f qui est continue sur $]0,+\infty[$.
• Pour tout n, f_n est une fonction positive. On peut donc inverser les symboles intégrales et somme

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)dt.$$

On finit par des calculs de primitives classiques.
Par double intégration par parties , on trouve (ou en retrouvant $\Gamma(2)$ par changement de variables.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Finalement
On pourra aussi voir le sujet 2021 ccinp. Comme quoi le concours aime bien ce genre d'exercices. Attention des fonctions f_n sont négatives donc introduire $-f_n$ et au moins le notifier. Et pour casser en 2 la somme faire appel aux familles sommables.

ccinp 2012 proposé cette année en ds ou dns

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(t) = \frac{\ln t}{t^2-1}$$

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale

$$I_k = \int_0^1 t^{2k} \ln t \; dt$$

Q2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que :

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{\pi^2}{8}$$

On pourra utiliser librement que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

49

Année 2024

Intégration termes à termes : contraposée

À retenir

☞ Il y a trois théorèmes possibles, un seul permet de montrer qu'une somme est égale à $+\infty$
☞ Ici les fonctions f_n ne sont pas positives.
☞ L'hypothèse la plus importante du théorème d'intégration terme à terme est la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} \mid f_n \mid$. L'exercice suivant illustre ce point .

Deuxième exemple (voir fiche 48 pour le premier) ccinp 2015 écrit

On note $I =]0,+\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I,\ f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} - 2\mathrm{e}^{-2nx}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, les fonctions f_n sont intégrables sur I et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$. Que vaut alors la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right)$?

2. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur I. Déterminer sa fonction somme S et démontrer que S est intégrable sur I. Que vaut alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$?

3. Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x\right)$.

Correction

1° Les fonctions f_n sont continues sur $[0,+\infty[$ (l'énoncé ouvre en 0 encore une fois pour la somme) et intégrables car $\mid f_n(t) \mid \underset{+\infty}{=} o\,(1/t^2)$
Le calcul des primitives ne pose pas de problèmes

$$\forall n \geqslant 1 \quad \int_0^{+\infty} f_n = [-\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} + 2\frac{\mathrm{e}^{-2nx}}{2n}]_0^{+\infty} = 0.$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{dx} = 0$$

2) Pour $x > 0$ les séries géométriques $\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{e}^{-nx}$ et $\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{e}^{-2nx}$ sont convergentes , et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} - 2\mathrm{e}^{-2nx} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} - 2\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1 - \mathrm{e}^{-2x}} = S(x).$$

La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement vers S une fonction continue par morceaux et après simplification

$$S(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}.$$

S est positive , on démontre son intégrabilté et on calcule l'intégrale en même temps :$(\frac{u'}{u})$

$$\int_0^{+\infty} S = [-\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)]_0^{+\infty} = \ln(2).$$

$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{dx} = \ln(2)$

3) On a
$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{dx} \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{dx} \Big),$
la conclusion du théorème d'intégration terme à terme est fausse donc une des hypothèses est fausse. Vu les questions précédentes cela ne peut être que :
$\sum_{n \geqslant 1} \left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{dx} \right)$ est divergente.

50

Année 2024

Tcd

À retenir

☞ Le tcd s'applique pour les suites de fonctions. Pour les séries voir une autre fiche , on passe par les sommes partielles.
☞ La fonction dominante doit avoir trois propriétés : l'inégalité doit être juste, φ indépendant de n et φ intégrale.
☞ Il existe une version à variable continue (x au lieu de n) chapitre intégrale à paramètre.
☞ On peut utiliser ce théorème sur un segment.

TCD sur un segment

On note pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\mathrm{d}t.$$

Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Correction

On introduit la suite de fonctions f_n définies pour tout $n \geqslant 0$ et pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ par $f_n(t) = \tan^n(t)$. Pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}[$, on a une suite géométrique de raison < 1 et pour $t = \frac{\pi}{4}$ la suite est constante égale à 1. La suite f_n converge simplement vers la fonction f continue par morceaux égale à 0 sur $[0, \frac{\pi}{4}[$ et à 1 en $\frac{\pi}{4}$.
Reste à dominer, or

$$\forall n \geqslant 0, \forall t \in [0, \frac{\pi}{4}], \mid f_n(t) \mid \leqslant 1$$

La fonction $t \mapsto 1$ est évidement intégrale sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure :

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f = 0.$

51

Année 2024

Tcd

À retenir

☞ Le tcd s'applique pour les suites de fonctions. Pour les séries voir une autre fiche , on passe par les sommes partielles.
☞ La fonction dominante doit avoir trois propriétés : l'inégalité doit être juste, φ indépendant de n et φ intégrale.
☞ Il existe une version à variable continue (x au lieu de n) chapitre intégrale à paramètre.
☞ On peut utiliser ce théorème sur un segment.

TCD sur un intervalle variable

a) Soit $x \in [0, n]$. Montrer que $(1 - x/n)^n \leqslant e^{-x}$.
b) En déduire $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{x=0}^{n} (1 - x/n)^n \, dx$.

Correction
a) On a $\forall x \in [0, n]$, $\dfrac{x}{n} \in [0, 1]$ puis $\ln(1 - x/n) \leqslant -x/n$ puis par composée par des fonctions croissantes : $\underline{(1 - x/n)^n \leqslant e^{-x}}$.
b) On introduit les fonctions f_n définies par morceaux par

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} (1 - \dfrac{x}{n})^n \text{ si } x \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}.$$

alors

$$\int_{x=0}^{n} (1 - x/n)^n \, dx = \int_0^{+\infty} f_n.$$

La suite f_n converge simplement vers la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$. En effet pour $x \geqslant 0$ il existe un N tel que $\forall n \geqslant N$, $f_n(x) = (1 - \dfrac{x}{n})^n$ et un DL permet de conclure.
On a vu

$$\forall n, \quad \forall x, | \, f_n(x) \, | \leqslant \mathrm{e}^{-x},$$

car cette inégalité est vraie pour $x > n$, et a été vue au a) pour $x \leqslant n$. De plus $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable, indépendant de n sur $[0, +\infty[$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure
$\lim_{n\to\infty} \int_{x=0}^{n} (1 - x/n)^n \, dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = 1.$

52

Année 2024

Tcd

À retenir

☞ Le tcd peut s'appliquer pour les séries : on passe par les sommes partielles .
☞ A utiliser quand les f_n ne sont pas de signes constants, et que la série numérique finale est seulement convergente et pas absolument convergente.
☞ On peut parfois (souvent) se passer du tcd en majorant grossièrement le reste. Par ex dans le cas des séries géométriques.
☞ On ouvre parfois les intervalles d'intégration car on peut avoir des problèmes de convergences des séries
Bilan ...c'est bien pratique le tcd

TCD par les sommes partielles

(a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+b} = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a} \mathrm{d}t.$$

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Correction

Encore une fois on débute par un dse et on introduit les bonnes fonctions :
On considère $\forall n \geqslant 0\; f_n(t) = (-1)^n t^{na+b-1}$ définies sur $]0,1[$. La série de fonctions converge vers une somme S connue et continue (par morceaux) et

$$\forall t \in]0,1[, S(t) = \frac{t^{b-1}}{1+t^a}$$

De plus $\forall n \geqslant 0\; S_n(t) = \dfrac{1-(-1)^{n+1}t^{(n+1)a}}{1+t^a} \times t^{b-1}$ et par définition la suite (S_n) converge vers S. On domine facilement sur le segment $[0,1]$ cette suite

$$\mid S_n(t) \mid \leqslant 2t^{b-1} = \varphi(t)$$

Or φ est intégrable sur $]0,1]$ car équivalente en 0 à la fonction de Riemman intégrable t^{b-1}.Le théorème de convergence dominée de Lebesque permet de conclure

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 S(t)\mathrm{d}t.$$

Ou encore
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{an+b} = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a}\mathrm{d}t.$

A noter : on a un problème d'intégrale impropre en 0 à cause de t^{b-1} et de convergence de série géométrique en $t=1$.
b) Le calcul donne
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$ sauf erreur.
On peut se passer du TCd en majorant l'intégrale du reste, et en inversant les symboles sur les sommes partielles.

Comparaison série intégrale pour la fonction ζ

Rappels

☞ **les points clefs**

• La monotonie des fonctions est essentielles.

• La relation ce Chasles infinie n'existe pas, donc revenir à des sommes partielles ou au moins le dire.

Enoncé et corrigé d'après ds 2

On a défini pour $x > 1$:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Etude des limites en $+\infty$ et 1.

Fixons $x > 1$ et $n \geqslant 2$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ (qui est bien continue par morceaux...) sur les intervalles $[n; n+1]$ et $[n-1; n]$, on obtient :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x}$$

ainsi que

$$\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x} \geqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x}$$

Cela donne l'encadrement voulu :

$$\underline{\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}}$$

Fixons un réel $x > 1$ et un entier $N \geqslant 2$. En sommant les inégalités obtenues en . pour $n = 2 \cdots N$, on obtient :

$$\sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$$

c'est-à-dire (par la relation de Chasles)

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant \int_1^{N} \frac{dt}{t^x}$$

ou encore
$$\frac{(N+1)^{1-x}-2^{1-x}}{1-x} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{N^{1-x}-1}{1-x}$$
En faisant tendre $N \to +\infty$ et en ajoutant 1 , on obtient (puisque $1-x<0$) :
$$1-\frac{2^{1-x}}{1-x} \leqslant 1+\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant 1-\frac{1}{1-x}$$
c'est-à-dire
$$1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1+\frac{1}{x-1}$$
Puisque $\lim_{x\to 1^+}\left(1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\right) = +\infty$, la minoration de $\zeta(x)$ obtenue montre que $\lim_{x\to 1^+}\zeta(x) = +\infty$
Puisque $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right) = 1$, l'encadrement obtenu montre que $\lim_{x\to +\infty}\zeta(x) = 1$

Comparaison série intégrale à trois lettres

Le crucial problème des trois lettres

Il est important de bien définir les fonctions

☞ **Dans le ds9 le sujet était très détaillé ici moins plus dans l'esprit MP.**
☞ **Encore une fois sans introduire des fonctions des bonnes variables pas d'espoir.**
☞ **On peut trouver la limite en $+\infty$ par le théorème de la double limite par convergence normale sur $[1, +\infty[$.**
☞ **On peut démontrer la continuité par convergence normale sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ voir fiche correspondante.**

d'après DS9

On considère $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2}$. Montrer que F est définie sur $]0, +\infty[$ et à l'aide d'une comparaison série intégrale, donner un équivalent de F en 0^+ et la limite de F en $+\infty$.

éléments de correction

Pour tout $x > 0$, Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\left| \dfrac{1}{1+4n^2x^2} \right| \leqslant \dfrac{1}{4n^2x^2}$, terme général d'une série de Riemann référencée convergente. D'après le théorème de comparaison des séries à termes postifs, F est définie pour $x > 0$.

On introduit pour tout $x > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_x(t) = \dfrac{1}{1+4t^2x^2}$ cette fonction est décroissante en t donc

$$\forall x > 0,\ \forall n \geqslant 1 \quad \frac{1}{1+4n^2x^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+4t^2x^2}\mathrm{d}t.$$

$$\forall x > 0,\ \forall n \geqslant 0 \quad \int_{n}^{n+1} \frac{1}{1+4t^2x^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1+4n^2x^2}.$$

En sommant la première inégalité de 1 à N la seconde de 0 à N, puis en faisant tendre N vers $+\infty$, l'intégrale a été vue convergente en $+\infty$ (dans un sujet de concours dans une question précédente) et la série convergente , on a

$$\forall x > 0 \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} - 1 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}.$$

Or l'intégrale se calcule à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} = \frac{\pi}{4x}.$$

finalement

$$\frac{\pi}{4x} - 1 \leqslant F(x) \leqslant \frac{\pi}{4x}.$$

F est clairement positive dominée par une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$. Les parties gauche et droite sont équivalentes en 0^+ à $\frac{\pi}{4x}$, par pincement d'équivalent :

$$F(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{4x}.$$

Série entière :le théorème radial d'Abel.

☞ **Le lecteur avisé remarquera que ce théorème permet de conclure des questions qui étaient assez délicates avant 2022.**
☞ **Attention uniquement les cas réels : on peut citer ainsi le théorème . La somme d'une série entière est continue sur son ensemble de définition réel.**

L'exemple très classique

Montrer que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Correction

Tout dépend ce que l'on considère comme du cours, mais partons de la série géométrique

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}.$$

Par primitivation d'une série entière, sur $]-R,R[$ **, on obtient :**

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = S(x).$$

Or la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ **est convergente en** $x=1$ **d'après le TSSA (on laisse les vérifications), donc l'ensemble de définition de la somme est** $]-1,1]$**, et elle y est continue :**

$\displaystyle\lim_{x\to 1} \ln(1+x) = \lim_{x\to 1} S(x) = S(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$

c'est à dire

$$\underline{\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.}$$

Année 2024

Application des séries entières pour les suites numériques.

☞ **Les théorèmes d'interversion de symbole s'appliquent aux séries entières sur** $]-R, R[$
☞ **Bien lire les questions, montrer qu'un rayon est plus grand qu'un réel (par ex 2) cela revient à majorer le terme général (en valeur absolue) par** 2^n**. Donc pas si difficile.**

L'exemple vu en td

Pour $n \in \mathbb{N}$, **on pose** $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$. **Prouver que le rayon de convergence de** $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ **est non nul et calculer sa somme.**

Correction

On a
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ \left|\frac{t^n}{1+t}\right| \leqslant 1$ **donc** $|a_n| \leqslant 1$ **et** $R \geqslant 1$.
Pour tout $x \in]-1,1[$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\Big)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_0^1 \frac{(tx)^n}{1+t}\mathrm{d}t\Big)$$
On pose $f_n(t) = \frac{(tx)^n}{1+t}$ **et** $||f_n||_{[0,1],\infty} \leqslant |x^n|$ **, la série** $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ **converge normalement donc uniformément sur** $[0,1]$ **un segment, on peut inverser les deux symboles.**
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tx)^n}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1-tx)}.$$
On fait une décomposition en éléments simples :
$$S(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\Big(\frac{1}{1+t} + \frac{x}{1-tx}\Big)\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x}\big[\ln(1+t) - \ln(1-tx)\big]_0^1 = \frac{1}{1+x}\big(\ln(2) - \ln(1-x)\big)$$
On pourrait décomposer S **en série entière pour retrouver par unicité du DSE l'expression de** a_n**.**

Série entière : étude aux bornes.

☞ **Le lecteur avisé remarquera que la démonstration s'adapte à de nombreux cas.**
☞ **Le point clef est la monotonie de la fonction somme.**

L'exemple vu en td très classique

On considère $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.
Donner le rayon de convergence, on note S **la somme. Montrer que :**

$$\lim_{x\to 1^-} S(x)=+\infty.$$

Correction et rédaction

Le rayon est égal 1 résultat du cours, de plus comme pour tout n, $\sqrt{n}\geqslant 0$ **on a**

$$x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}} \text{ est croissante }.$$

De deux choses l'une soit S **est majorée et admet une limite en** $+\infty$ **soit** S **tend vers** $+\infty$.
Supposons S **majorée par** M **alors**

$$\forall n, \forall x\in[0,1[, \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{\sqrt{k}}\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{\sqrt{k}}\leqslant M$$

.
Donc

$$\forall n, \forall x\in[0,1[, \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{\sqrt{k}}\leqslant M$$

On peut passer à la limite dans la somme finie qui est polynomiale donc continue en 1 :

$$\forall n,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1^k}{\sqrt{k}}\leqslant M.$$

Les sommes partielles de la série de Riemann avec $\alpha=\frac{1}{2}$ **serait majorée, contradiction. Finalement**

$$\lim_{x\mapsto 1^-} S(x)=+\infty.$$

Remarque il n'y a donc pas cvu sur $[0,1]$ **mais on le savait dèjà à cause du th de la double limite qui ne peut pas s'appliquer.**

Produit de Cauchy de deux séries entières à reconnaitre .

☞ **On conseille fortement de revenir aux produit de Cauchy des séries numériques.**
☞ **Le terme a_0x^0 existe toujours pour les séries entières, donc faire débuter les séries à 0 et bien noter si besoin $a_0 = 0$.**

L'exemple vu en td

On pose $a_0 = 1$ puis $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k$.On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que la série entière $\sum u_n x^n$ converge sur $]R, R[$ et on note $S(x)$ sa somme.

1. **Pour $x \in]-R, R[$, calculer $(S(x))^2$ et en déduire que**
$$\forall x \in]-R, R[, \quad x(S(x))^2 - S(x) + 1 = 0.$$
2. **Montrer que $S(0) = 1$ et que $\forall x \in]-R, R[\setminus \{0\}, \quad S(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.**
3. **En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ et que $R = \dfrac{1}{4}$.**

Correction
1) Dans l'énoncé original l'équation fonctionnelle n'était pas donnée mais au niveau ccinp elle le sera.
On effectue, pour $x \in]-R, R[$, le produit de Cauchy de S par elle même, licite car il y a absolue convergence.
$S(x) \times S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ **où**
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$
Pour $n = 0$ $c_0 = a_0^2 = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $c_n = a_{n+1}$ donc
$$S(x)^2 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1}x^n$$
puis
$$xS(x)^2 = x + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = S(x) - 1$$
2) On résout l'équation du second degré pour $x \neq 0$, $xX^2 - X + 1$, on trouve
$$\text{si } x < 1/4,\ \forall x \neq 0,\ S(x) = \frac{1-\sqrt{1+signe(x)4x}}{2x}$$
où $signe(x) = \pm 1$. Mais $signe(x) = \dfrac{2xS(x)-1}{\sqrt{1-4x}}$ qui est continue $]0, \min(R, 1/4)[$, ne prend que 2 valeurs donc est constante. Mais S est définie en 0, il faut avoir une forme indéterminée pour espérer une limite finie en 0 donc $signe(x) = -1$ pour tout x.

rem : On a ce genre de raisonnement pour déterminer une expression de la fonction réciproque du ch.

$$\forall x \neq 0,\ S(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \ \textbf{ et } S(0) = 1$$

3) Après développement en série entière de $\sqrt{1-4x}$ on obtient

$$\forall x \in]-1/4, 1/4[,\ \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

et en récrivant les coefficients du binôme généralisé, on trouve un coefficient du binôme classique :

$$b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Or la somme de la série entière $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ définie sur $]-1/4, 1/4[$ vérifie l'équation fonctionnelle , par unicité de la définition des a_n , on a pour tout n
$a_n = b_n$ et le rayon de la série initiale est bien $1/4$ (si le rayon était $> 1/4$ touts les calculs seraient valable sur un intervalle incompatible avec l'équation fonctionnelle.
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$ **et** $R = \dfrac{1}{4}.$

Tout ceci n'aurait pas beaucoup d'intérêt si la relation de récurrence des a_n n'avait pas été trouvée par une autre méthode. Ces exercices sont à inclure dans le cours dénombrement-probabilités. On pourra voir l'exercice très classiques sur le nombre de permutations ayant p points fixes.
`https://www.xif.fr/public/pr%C3%A9pas-dupuy-de-l%C3%B4me-maths/exercices-sp%C3%A9/analyse/s%C3%A9ries-enti%C3%A8res.pdf`

Année 2024

Convergence normale dans le cadre des evns

uniquement question Q5 pour rentrée janvier 2025

Ce que permet le cours

☞ **La norme infinie est à bien comprendre. :**

$$||f_n||_\infty = \mathbf{Sup}_{x\in E}\{N(f(x))\}$$

où N est la norme de F.
☞ **Presque toujours dans le cadre des matrices voire des endomorphismes avec une norme d'algèbre.**

sujet ccinp 2021

Dans cet exercice, $\|\ .\|$ désigne une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. c'est-à-dire une norme vérifiant. pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A.B\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.
Q5. Démontrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}A^k$ converge. On notera e^A sa somme.
Q6. Démontrer que l'application $A \mapsto e^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Q7. Si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon $r > 0$, déterminer la limite de $\displaystyle\frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k$ lorsque H tend vers 0.
En déduire que l'application $A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0 .
On précisera sa différentielle en 0.

correction [Q 5.] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque $\|\ \|$ est une norme d'algèbre, on a par récurrence immédiate sur $k \geqslant 1$, $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$. Donc

$$\forall k \geqslant 1, \qquad \left\|\frac{1}{k!}A^k\right\| = \frac{1}{k!}\left\|A^k\right\| \leqslant \frac{1}{k!}\|A\|^k.$$

La série exponentielle $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{\|A\|^k}{k!}$ converge, donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{\|A\|^k}{k!} = \|I_n\| + \sum_{k\geqslant 1}\frac{\|A\|^k}{k!}$ converge.

Par règle de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{k\geqslant 0}\left\|\frac{1}{k!}A^k\right\|$ converge, donc la série matricielle $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}A^k$ converge absolument.

La série matricielle $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}A^k$ converge absolument, dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc cette série converge, vers sa somme notée e^A.

[Q 6.] On considère la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ où

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad f_k : \left|\begin{array}{rcl}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ A & \mapsto & \frac{1}{k!}A^k\end{array}\right. .$$

Soit un réel $R>0$. On note $B(0,R) : \{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\|<R\}$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon R. On a

$$\forall A\in B(0,R),\quad \begin{cases}\|f_0(A)\| &= \|I_n\|.\\ \forall k\geqslant 1,\ \|f_k(A)\| &= \left\|\frac{1}{k!}A^k\right\| = \frac{1}{k!}\left\|A^k\right\| \leqslant \frac{1}{k!}\|A\|^k \leqslant \frac{R^k}{k!}.\end{cases}$$

On en déduit que chaque fonction f_k est bornée sur $B(0,R)$, avec

$$\begin{cases}\|f_0\|_{\infty,B(0,R)} &= \sup_{A\in B(0,R)}\|f_0(A)\| = \|I_n\|.\\ \forall k\geqslant 1,\ \|f_k(A)\|_{\infty,B(0,R)} &= \sup_{A\in B(0,R)}\|f_k(A)\| \leqslant \frac{R^k}{k!}.\end{cases}$$

La série exponentielle $\sum_{k\geqslant 1}\frac{R^k}{k!}$ converge, donc la série $\|I_n\|+\sum_{k\geqslant 1}\frac{R^k}{k!}$ converge.
Par règle de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{k\geqslant 0}\|f_k\|_{\infty,B(0,R)}$ converge,
donc la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge normalement donc uniformément sur $B(0,R)$.

1. **Pour tout $k\geqslant 0$, $f_k : A\mapsto \frac{1}{k!}A^k$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car polynomiale en les coefficients de la matrice A. Donc f_k est continue sur $B(0,R)$.**

2. **La série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge normalement donc uniformément sur $B(0,R)$.**

Année 2024

Convergence des suites de vecteurs

☞ **Utiliser systématiquement la norme.**
☞ **Si on a une idée de la limite l, former l'expression $||u_n - l||$.**
☞ **Attention il ne suffit pas de montrer que la suite numérique $(||u_n||)$ converge vers $||l||$. Pensez par exemple à une suite de nombres complexes du cercle unité.**

exo du poly fait en classe

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ soit bornée. On pose $B_p = \dfrac{1}{p}\left(I_n + A + \cdots + A^{p-1}\right)$

1. Etablir la convergence de $(B_p x)_{p\in\mathbb{N}}$ lorsque $x \in \ker(A - I)$ et lorsque $x \in \operatorname{Im}(A - I)$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^n = \ker(A - I) \oplus \operatorname{Im}(A - I)$.
3. Démontrer la convergence de $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et caractériser géométriquement sa limite.

Eléments de correction
1) Si $x \in \ker(A - I)$ alors $\forall i \geqslant 1$, $A^i(x) = x$ donc $B_p(x) = x$ suite constante.
Si $x \in \operatorname{Im}(A - I)$, alors on dispose de y tel que $x = Ay - y$ et pour tout $i \geqslant 1$, $A^i(x) = A^{i+1}(y) - A^i(y)$ et par somme télescopique

$$B_p(x) = \frac{1}{p}\Big(A^p y - y\Big)$$

$$||B_p(x)|| \leqslant \frac{1}{p}(M+1)||y||$$

où M est un majorant de la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$
Donc $(B_p(x))$ converge dans ce cas vers 0.
2) L' espace $E = \mathbb{R}^n$ est de dimension finie , la formule du rang montre que $\dim(E) = dim(\ker(A - I)) + dim(\operatorname{Im}(A - I))$
Reste à montrer que l'intersection est réduite à $\{0\}$ or si $x \in \ker(A - I) \bigcap \operatorname{Im}(A - I)$ alors la suite $(B_p(x))$ converge à la fois vers 0 et x, par uncité de la limite $x = 0$.
3) Pour $x \in E$, on décompose de manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker(A - I)$ et $x_2 \in \operatorname{Im}(A - I)$ alors $\forall p, B_p(x) = B_p(x_1) + B_p(x_2)$ et on connait la limie de chacun, $(B_p(x))$ converge vers x_1.

La suite $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice de la projection sur $\ker(A - I)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(A - I)$.

Année 2024

Norme triple en dimension infinie

☞ **Ne pas oublier d'indiquer que l'application est linéaire**
☞ **On obtient en même temps la continuité et une majoration de la norme triple**
☞ **Pour obtenir une norme triple, réfléchir aux inégalités utilisées et soit chercher un cas d'égalité soit une suite avec un quotient proche du candidat norme triple**
On pourra revoir les démonstration du cours sur : équivalences pour la continuité (exo ccinp) et la norme triple est une norme d'algèbre.

premeir exo poly

On munit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme 1 définie par

$$\forall f \in E,\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\ dt.$$

On pose $\begin{array}{rccccc} T : & E & \to & E & & \\ & f & \mapsto & Tf : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & & & x & \mapsto & \int_0^x f(t)\ dt \end{array}$
et on admet que T est un endomorphisme de E.
Démontrer que T est continu sur $(E, \|\ \|_1)$ et déterminer $|||T|||$.

Eléments de correction Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned} \|Tf\|_1 &= \int_0^1 |Tf(x)|\ dx = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t)\ dt \right| dx \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\ dt \right) dx \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\ dt \right) dx = \int_0^1 \|f\|_1\ dx = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\forall f \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|Tf\|_1}{\|f\|_1} \leqslant 1$. Ceci montre que T est continu sur $(E, \|\ \|_1)$ et que $|||T||| \leqslant 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, posons $f_n(x) = (1-x)^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 (1-x)^n\ dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

puis pour $x \in [0,1]$, $Tf_n(x) = \int_0^x (1-t)^n\ dt = \frac{1}{n+1}(1 - (1-x)^{n+1})$ et donc

$\|Tf_n\|_1 = \int_0^1 |Tf_n(x)|\,dx = \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-(1-x)^{n+1})\,dx = \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|||T||| \geqslant \frac{\|Tf_n\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{n+2}$.
En résumé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leqslant |||T||| \leqslant 1$ et donc $|||T||| = 1$.

$$\boxed{T \text{ est continu sur } (E, \|\ \|_1) \text{ et } |||T||| = 1.}$$

On peut montrer que la norme triple n'est pas atteinte ...
Supposons qu'il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que $\|Tf\|_1 = \|f\|_1$. On en déduit que chaque inégalité écrite au début de la question 1) est une égalité et en particulier $\int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right) dx$ ou encore $\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt - \int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx = 0$. Par suite, $\forall x \in [0,1]$, $\int_0^1 |f(t)|\,dt - \int_0^x |f(t)|\,dt = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle) puis en dérivant la dernière inégalité, $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| = 0$ et finalement $f = 0$. Ceci est une contradiction et donc $|||T|||$ n'est pas atteinte.

62

Année 2024

Norme triple en dimension finie

☞ **On sait a priori que l'application est linéaire mais on le redémontre afin d'avoir une inégalité sur la norme triple.**
☞ **On sait que la nrome triple est atteinte voir chapitre compacité.**
On pourra revoir les démonstration du cours sur : équivalences pour la continuité (exo ccinp) et la norme triple est une norme d'algèbre.

Facile

On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N définie par
$\forall A \in E,\ N(A) = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Sup}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}$ (on admet que N est une norme sur E).
Soit f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall A \in E,\ f(A) = \text{Tr}(A)$.
Démontrer que l'application f est continue sur (E, N) et déterminer $|||f|||$.

Eléments de correction L'application f est linéaire de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |\ |)$.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E$.

$$\begin{aligned} |f(A)| = |\text{Tr}(A)| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{i,i}| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} N(A) = nN(A). \end{aligned}$$

Ceci montre déjà que f est continue sur (E, N) et que $|||f||| \leqslant n$. De plus, si $A = I_n \neq 0$, $\frac{|f(A)|}{N(A)} = \frac{n}{1} = n$. Donc

$$\boxed{f \text{ est continue sur } (E, N) \text{ et } |||f||| = n.}$$

Intégrales à paramètre

☞ **Ne pas oublier de vérifier les hypothèses d'intégrabilté des fonctions de la variable t**
☞ **Pour la domination : plus de x, inégalité juste et intégrable.**
☞ **Attention aux fautes dans les dérivées partielles et dans les ipp qui peuvent suivre**

ds8 mines ponts ou journalier

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et qu'elles vérifient l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

b) Montrer que f et g sont continues en 0

Correction
Je ne reprends que la première fonction pour la seconde voir le corrigé du ds8.
Posons, pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$.
Pour tout x réel, $t \mapsto \alpha(x,t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.
Pour $x < 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(x,t) = +\infty$ donc $\alpha(x,.)$ est non intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x)$ n'est pas défini.
Pour $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \alpha(x,t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ donc $\alpha(x,.)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $f(x)$ est défini.
$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est } \mathbb{R}_+}$
$\alpha \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\forall x \geqslant 0, \forall t \in [0, +\infty[,\ |\alpha(x,t)| \leqslant \beta(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ avec β continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$ indépendante de x.
Dans ces conditions:
$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$ (question b)
On peut aussi démontrer par le théorème de convergence dominée généralisé que
$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0}$

mais plus simplement $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^\infty e^{-xt} dt = 1/x$.

Soit $a > 0$ et $I = [a, +\infty[$ intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ adapté à la situation.

α admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-te^{-xt}}{1+t^2}$ et $\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$ toutes deux continues, ainsi que α sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

La première dérivée partielle est intégrable sur $[0, +\infty[$ (facile)

Pour la seconde on a sur I l'hypothèse de domination par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$:

$|\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}(x,t)| \leqslant e^{-at}$ (par exemple).

Le théorème de Leibniz s'applique:

$\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } f' \text{ et } f'' \text{ se calculent en dérivant sous l'intégrale.}}$

64

Méthodes de variations des constantes

☞ **On a obtient un système de deux équations résolubles car le wronskien ne s'annule jamais**
☞ **On n'a pas à justifier la méthode (elle vient des systèmes d'ordre 1**

ds8 mines ponts

Résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle :

$$y'' + y = \frac{1}{x}.$$

Correction
L'équation homogène $y'' + y = 0$ admet $(\cos, \sin)$ pour système fondamental de solutions.
La méthode de variation des constantes donne les solutions de $y'' + y = 1/x$ sous la forme $A(x)\cos x + B(x)\sin x$ où A et B sont C^1 avec $A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0$ et $-A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = 1/x$.
Donc $A'(x) = -\frac{1}{x}\sin x$ et $B'(x) = \frac{1}{x}\cos x$, d'où $A(x) = g(x) + C$ et $B(x) = -h(x) + D$, C et D constantes réelles.
On ne trouve pas d'expression des primitives mais on sait que $g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente (classique) et est donc une primitive de $-\frac{\sin(t)}{t}$ d'après la généralisation du théorème fondamental de l'analyse, on note aussi $h(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$

La solution générale de $y'' + y = 1/x$ est
$x \mapsto g(x)\cos x - h(x)\sin x + C\cos x + D\sin x, (C, D) \in \mathbb{R}^2$.

Si on veut , on peut reprendre la fiche 63 et les fonctions définies par des intégrales sont solutions de la même équation différentielle et sont bornées au voisisnage de $+\infty$. Or au vu des expressions dans le cadre il y a une seule fonction bornée en $+\infty$.

Année 2024-2025

Théoréme de Cauchy-Lipschitz

☞ **On peut trouver des résultats théoriques sur les solutions sans connaître une expression**
☞ **Si c'est au tout début d'un sujet, bien préciser l'intervalle et la continuité des fonctions**

ds8 ccinp sujet 1

Dans tout ce problème, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0 et φ est une fonction paire, de classe C^∞ sur I. On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) : y''(x) + \varphi(x)\, y(x) = 0.$$

On note $(\mathcal{S})$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur I.
On considère la fonction f_0 solution de $(\mathcal{E})$ sur I et vérifiant $f_0(0) = 1$ et $f_0'(0) = 0$ ainsi que la fonction f_1 solution de $(\mathcal{E})$ sur I et vérifiant $f_1(0) = 0$ et $f_1'(0) = 1$.

PARTIE I

1. Justifier soigneusement l'existence des fonctions f_0 et f_1 (*que l'on ne demande pas de calculer*).
2. Démontrer que (f_0, f_1) est une base de $(\mathcal{S})$.
3. Prouver que si y est une solution de $(\mathcal{E})$ alors la fonction $x \mapsto y(-x)$ est aussi solution de $(\mathcal{E})$ sur I.
4. Montrer que f_0 est une fonction paire et que f_1 est une fonction impaire.

Correction

1. La fonction φ étant continue sur I, l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ étant linéaire d'ordre 2 et $0 \in I$, le théorème de Cauchy-Lipchitz montre que les problèmes $\begin{cases} (\mathcal{E}) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} (\mathcal{E}) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ admettent chacun une unique solution d'où l'existence (et même l'unicité) de f_0 et f_1.

2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda f_0 + \mu f_1 = 0 \text{ alors} \left\{ \begin{array}{l} \lambda f_0(0) + \mu f_1(0) = 0 \\ \lambda f_0'(0) + \mu f_1'(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{array} \right.$$

   donc la famille $(f_{0,}f_1)$ est une famille libre de $(\mathcal{S})$ qui est de dimension 2 donc c'est une base de $(\mathcal{S})$.

3. On pose $z : x \mapsto y(-x)$ qui est deux fois dérivables sur I et

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = -y'(-x), \quad z''(x) = y''(-x) = -\varphi(-x)\, y(-x) \underset{\varphi \text{ paire}}{=} -\varphi(x)\, z(x)$$

   donc z est solution de $(\mathcal{E})$.

4. On pose $z : x \mapsto f_0(-x)$ est solution du problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{c} (\mathcal{E}) \\ z(0) = 1 \\ z'(0) = 0 \end{array} \right.$ ainsi que f_0 donc, d'après le théorème de Cauchy, $z = f_0$ c'est-à-dire que f_0 est paire. La fonction $z : x \mapsto -f_1(-x)$ est solution de $(\mathcal{E})$ (car $x \mapsto f_1(-x)$ l'est et que $(\mathcal{E})$ est une équation linéaire). En outre, z est solution du problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{c} (\mathcal{E}) \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = 1 \end{array} \right.$ ainsi que f_1 donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $z = y_1$ c'est-à-dire que y_1 est impaire.

Systèmes Différentiels

☞ **Plus d'algèbre linéaire que d'analyse**
☞ **Bornées cela implique l'utilisation de norme.**
☞ **On trouvera des rappels sur les endomorphismes nilpotents**

Journalier

1) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p. Montrer que $I_n, N, \ldots, N^{p-1}$ est libre.
Exprimer

$$\exp\Big(t(\lambda I_n + N)\Big).$$

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant pour unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $N - \lambda I_n$ est nilpotente.
Montrer que les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si λ est imaginaire pur et $A\lambda I_n$.
3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique :

$$(X - \lambda_1)^{n_1} \ldots (X - \lambda_m)^{n_m}$$

les λ_k étant deux à deux distincts. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A. Montrer que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}.$$

En déduire l'existence d'une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs.
d) Avec les notations de 3), montrer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées si et seulement si les λ_k sont imaginaires purs et que A est diagonalisable.
e) Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Correction
1)

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 N + \cdots + \lambda_{p-1} N^{p-1} = O_n$$

En multipliant par N^{p-1} on obtient $\lambda_0 N^{p-1} = O_n$ car $N^p = O_n$.
Or $N^{p-1} \neq O_n$ donc $\lambda_0 = 0$. On montre de même successivement que

$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{p-1} = 0$. On conclut que la famille ($I_n, N, N^2, \ldots, N^{p-1}$) est libre.
On peut aussi utiliser beaucoup de résultats du cours, X^p est le polynôme minimal de N (c'est quasiment la définition de l'indice de nilpotence), donc la famille $I_n, N, \cdots, N^{p-1}$ est une base de $\mathbb{C}[N]$ espace vectoriel connu pour être de dimension p.
Puisque λI_n et N commutent, on a

$$\mathrm{e}^{t(\lambda I_n + N)} = \mathrm{e}^{t\lambda I_n}\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(I_n + \frac{t}{1!}N + \frac{t^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}N^{p-1}\right)$$

2) Idem soit on utilise la trigonalisation et alors $A - \lambda I_n$ est semblable à une matrice triangulaire stricte donc un calcul matriciel donne $\big(A - \lambda I_n\big)^n = O$.
Ou alors encore du cours :
Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et possède une unique racine λ, on a donc

$$\chi_A(X) = (X - \lambda)^n$$

En vertu du théorème de Cayley Hamilton

$$N^n = (A - \lambda I_n)^n = O_n$$

La matrice N s'avère donc nilpotente.
On connait les solutions du système différentiel Les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont les fonctions

$$t \mapsto X(t) = \mathrm{e}^{tA}X(0) = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{tN}X(0)$$

Si N est nulle et $\lambda \in i\mathbb{R}$, il est clair que toutes les solutions sont bornées. Inversement, supposons les solutions toutes bornées. En choisissant $X(0) \in \operatorname{Ker} N \backslash \{O_n\}$, la solution

$$t \mapsto \mathrm{e}^{tA}X(0) = \mathrm{e}^{\lambda t}X(0)$$

est bornée sur $\mathbb{R}$ et nécessairement $\lambda \in i\mathbb{R}$. Notons p l'indice de nilpotence de N et choisissons $X(0) \notin \operatorname{Ker} N^{p-1}$. La solution

$$t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}.\mathrm{e}^{tN}X(0)$$

devant être bornée avec $\left|\mathrm{e}^{\lambda t}\right| = 1$, la fonction

$$t \mapsto X(0) + tNX(0) + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)}N^{p-1}X(0)$$

est elle aussi bornée. Or $N^{p-1}X(0) \neq 0$ et donc cette solution ne peut pas être bornée si $p - 1 > 0$. On en déduit $p = 1$ puis $N = O_n$.

3) C'est la somme de deux théorèmes du cours : lemme es noyaux + Cayley Hamilton , je redonne les détails : Les polynômes $(X-\lambda_k)^{n_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. Par le théorème de Cayley Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux, on obtient

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1} \operatorname{Ker}(f-\lambda_k \operatorname{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}$$

Une base adaptée à cette décomposition fournit une représentation matricielle Δ de f diagonale par blocs. Plus précisément, les blocs diagonaux sont de la forme

$$\lambda_k \operatorname{Id}_{n_k} + N_k \text{ avec } N_k^{n_k} = O_{n_k}$$

4) pas la plus importante.
La matrice A est semblable à Δ et on peut donc écrire

$$A = P\Delta P^{-1} \text{ avec } P \text{ inversible.}$$

Les solutions de l'équation $X' = AX$ correspondent aux solutions de l'équation $Y' = \Delta Y$ via $Y = P^{-1}X$. Les solutions de $X' = AX$ seront bornées si, et seulement si, celles de $Y' = \Delta Y$ le sont. En raisonnant par blocs et en exploitant le résultat du b), on peut affirmer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, les λ_k sont imaginaires purs et les N_k tous nuls (ce qui revient à dire que A est diagonalisable).
5) Application rigolote.
Supposons A antisymétrique réelle alors $exp(A)$ mais aussi pour t réel $exp(tA)$ est orthogonale. Attention il faut peut être détaille l'inversion transposée et somme infinie. Mais alors $exp(tA)$ conserve les normes et donc $||exp(tA).X_0|| = ||X_0||$ la norme d'une solution est bornée (il faut comprendre quand t varie car l'ensemble des solutions n'est pas bornée : c'est un espace vectoriel.)

67

Equations différentielles scalaires d'ordre1

☞ **Il faut citer le théorème par ex : l'ensemble des solutions est connu égal à**

Journalier sem19

On donne, pour $x > 0$, l'équation différentielle
$$y' - y + \frac{1}{x} = 0.$$
1. Montrer qu'il existe sur l'intervalle $]0, +\infty[$ une unique solution Y_0 bornée quand x tend vers l'infini et exprimer $Y_0(x)$ sous forme d'une intégrale.
Quelle expression donner à la solution générale Y_λ, où $\lambda \in \mathbb{R}$, l'indexation étant telle que pour $\lambda = 0$, on ait la solution bornée Y_0 ? Étudier le comportement de $Y_\lambda(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

correction
1. $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$ converge car $\displaystyle\frac{e^{-t}}{t} = o(\frac{1}{t^2})$ au voisinage de $+\infty$. Il en résulte, par la méthode de la variation de la constante que la solution générale sur $]0, +\infty[$ de $y' - y + \dfrac{1}{x} = 0$ est
il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$
$y(x) = \lambda e^x + e^x \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t.$
Si on veut une limite finie en $+\infty$ il faut avoir une forme indéterminée, or l'intégrale admet une limite finie en $+\infty$ égale à $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ il faut prendre $\lambda = -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$. (c'est nécessaire)
On obtient une nouvelle forme des solutions
$Y_\lambda(x) = \lambda e^x + e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t.$
et $Y_0(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t.$
Par intégration par parties, il vient que $0 \leqslant Y_0(x) = \dfrac{1}{x} - e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}$ d'où $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} Y_0(x) = 0$. On peut aussi utiliser l'intégration des relations de comparaisons pour les fonctions positives intégrales (voir fiche 43 pour les séries)

En effet on a au voisinage de $+\infty$,$\dfrac{e^{-t}}{t} = o(e^{-t})$ donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = o\Big(\int_x^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t\Big) = e^{-x}$ donc $Y_0(x) = o(1)$.
De l'expression de la solution générale, il en découle que Y_0 est la seule solution bornée au voisinage de $+\infty+$ (en fait elle tend même vers 0). $\dfrac{e^{-t}}{t}$ n'est pas intégrable en 0, de l'expression de la solution générale, il en découle que $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} Y_\lambda(x) = +\infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Année 2024-2025

Raccordement de solutions

☞ **On pourrra aussi regarder écrit ccinp 2014 et 2011**

ccinp 2005

Pour n entier naturel non nul, on considère
l'équation différentielle linéaire :

$$(E_n) \quad xy' - ny = 0.$$

1. Donner l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles $I =]-\infty, 0[$ et $J =]0, +\infty[$.
2. Dans le cas où $n = 1$, déterminer uniquement par des considérations graphiques, l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?
3. Dans le cas où $n \geqslant 2$, déterminer avec soin l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?

correction

1. Sur I (resp. J) l'équation différentielle (E_n) s'écrit: $y' - \dfrac{n}{x}y = 0$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{n}{x}$ est continue sur I (*resp.* sur J), ce qui montre que si $S_I(E_n)$ (resp. $\mathrm{S}_J(E_n)$) désigne l'ensembles des solutions de (E_n) sur I (*resp.* sur J) alors $S_I(E_n)$ (*resp.* $\mathrm{S}_J(E_n)$) est un espace vectoriel réel de dimension 1. L'application $x \mapsto x^n$ est solution de (E_n) sur I (resp sur J) donc: $S_I(E_n) = vect(I \to \mathbb{R}\ x \mapsto x^n)$ (resp . $S_J(E_n) = \mathrm{vect}(J \to \mathbb{R}\ x \mapsto x^n)$) .
2. Dans le cas où $n = 1$, une solution y de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est aussi solution de (E_1) sur I et sur J , donc sa courbe est réunion de deux demi-droites, et comme y est C^1, sa courbe est donc une droite.
   En conclusion: l'espace des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 1, engendrée par la fonction $x \mapsto x$.
3. Supposons $n > 1$, soit y une solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(x) = \begin{cases} \alpha x^n & si \quad x \in I \\ \beta x^n & si \quad x \in J \end{cases}$. (voir question 1.) et donc $y(0) = 0$

Réciproquement: toute fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \alpha x^n & si & x \in I \\ \beta x^n & si & x \in J \end{array} \right.$ avec $y(0) = 0$, alors y est continue sur $\mathbb{R}$ car $n > 1$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ avec $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} y'(x) = 0$, donc le théorème de prologment de la dérivée, montre que y est C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $y'(0) = 0$ et y vérifie l'équation différentielle (E_n) .

Conclusion: l'ensemble des solutions de (E_n) est un espace vectoriel de dimesion 2, engendré par les fontions: $h_n : x \mapsto \left\{ \begin{array}{lll} x^n & si & x \geqslant 0 \\ 0 & si & x < 0 \end{array} \right.$ et $g_n : x \mapsto \left\{ \begin{array}{lll} x^n & si & x < 0 \\ 0 & si & x \geqslant 0 \end{array} \right.$

3.1 Calcul différentiel

Calcul d'une différentielle 1

Différentielle facile sur les matrices

Partir de la définition et bien justifier linéarité et $o(H)$

☞ **On pourra revoir la fiche sur l'exponentielle d'une matrice et la calcul de sa différentielle.**

Facile

Déterminer la différentielle de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$f : M \mapsto M^2.$$

éléments de correction

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$f(A+H) = (A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2.$$

On remarque que $H \mapsto AH + HA$ est linéaire et pour $||.||$ une norme d'algèbre

$$||H^2|| \leqslant ||H||^2 = ||H||\varepsilon(H) \textbf{ où } \varepsilon(H) \underset{H\to 0}{\longrightarrow} = 0.$$

donc f est différentiable et

$$df(A) : H \mapsto AH + HA.$$

Calcul d'une différentielle 2

Différentielle moins facile sur les matrices

Se laisser guider par le calcul et savoir majorer un produit scalaire par l'inégalité de Cauchy Schwarz.

☞ **On pourra revoir la fiche sur l'exponentielle d'une matrice et la calcul de sa différentielle.**

Un peu moins facile que la précédente

Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme symétrique.
On considère $f = x \mapsto (u(x)|x)$
Montrer que f est différentiable et donner sa différentielle.
2) Soit $g : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}x \mapsto \dfrac{(u(x)|x)}{(x|x)}$ montrer que g est différentiable et calculer sa différentielle.
Enfin montrer que $dg(x) = 0$ ssi x est un vecteur propre de u.

Pour la question2, on peut utiliser cours et règle de la chaine mais là encore c'est aussi simple de refaire le calcul.

éléments de correction
1) $\forall x \in E$ **et** $\forall h \in E$**,**

$$f(x+h) = (u(x+h)|x+h) = (u(x)|x) + (u(x)|h) + (u(h)|x) + (u(h)|h).$$

Or u est symétrique donc $(u(h)|x) = (u(x)|h)$ et u est $|||u|||$-lip car linéaire en dimension finie, et pas l'inégalité de C.S $|(u(h)|h)| \leqslant ||u(h)|| \times ||h|| \leqslant |||u||| \times ||h||^2 = o(h)$.
Or $h \mapsto 2(u(x)|h)$ est linéaire donc

$$df(x) : h \mapsto 2(u(x)|h).$$

2)
$\forall x \in E$ **et** $\forall h \in E$**,**

$$g(x+h) = \frac{\big(u(x+h)|(x+h)\big)}{(x+h|x+h)} = \frac{(u(x)|x) + 2(u(x)|h) + o(||h||)}{||x||^2\big(1 + \dfrac{2(x|h)}{||x||^2} + o(||h||)\big)}$$

$$= \frac{(u(x)|x) + 2(u(x)|h) + o(||h||)}{||x||^2}\big(1 - \frac{2(x|h)}{||x||^2} + o(||h||)\big)$$

$$= \frac{(u(x)|x)}{(x|x)} + 2\frac{(u(x)|h)}{||x||^2} - 2\frac{(u(x)|(x))(x|h)}{||x||^4} + o(||h||)\big)$$

donc $dg(x) : h \mapsto 2\dfrac{(u(x)|h)}{||x||^2} - 2\dfrac{(u(x)|(x))(x|h)}{||x||^4}$ **car cette application est liénaire et le reste est ,**

qui s'écrit encore

$$dg(x) : h \mapsto \Big((2\frac{u(x)}{||x||^2} - 2\frac{(u(x)|x)}{||x||^4}x) \Big| h \Big)$$

l'application linéaire est nulle ssi pour tout h**,** $\quad \Big((2\frac{u(x)}{||x||^2} - 2\frac{(u(x)|x)}{||x||^4}x) \Big| h \Big) = 0$

c'est à dire $\left(2\frac{u(x)}{||x||^2} - 2\frac{(u(x)|x)}{||x||^4}x\right) = 0$ **donc si** $u(x)$ **est colinéaire à** x **c'est à dire (si** x **non nul) si** x **est un vecteur propre de** u**.**
(Par écrit faire les 2 sens de l'équivalence)

Calcul d'une différentielle 3

Classe $\mathcal{C}^1$ permet de calculer la différentielle par les dérivées partielles

il faut comprendre la formule du cours
$df(A) : H \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_i}(A)h_i$ où $H = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$

☞ **La méthode par densité est un peu au dessus du niveau.**
☞ **la méthode par dérivée partielle mérite de citer la classe $\mathcal{C}^1$.**

Encore moins facile que la précédente

On considère la fonction det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

1. Justifier rapidement que det est de classe $\mathcal{C}^1$
2. On considère la base E_{ij} des matrices , et A une matrice fixée , calculer
$$\frac{\partial det}{\partial E_{ij}}(A)$$
3. Montrer que
$$d(det)(A) : H \mapsto Tr(Com(A)^T H)$$
où $Com(A)$ est la comatrice de A.

éléments de correction
a) Le déterminant est une fonction polynomiale en les (a_{ij}) coefficients de la matrice donc est de classe $\mathcal{C}^1$
b) On calcule $\det(A + tE_{ij})$ par développement par rapport la j-ième colonne alors
$$\varphi(t) = \det(A + tE_{ij}) = det(A) + (-1)^{i+j} t\det(\tilde{A}_{ij})$$
où $\tilde{A}_{ij}$ est la matrice construite à partir de A on supprime la i ième ligne et la j ième colonne. Et alors $(-1)^{ij}\det(\tilde{A}_{ij})$ est le cofacteur, donc
$$\frac{\partial det}{\partial E_{ij}}(A) = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ij}).$$
c) Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on décompose H dans la base E_{ij}, par $H = \sum_{i,j} h_{ij}E_{ij}$, la différentielle est linéaire donc
$$d(det)(A)[H] = \sum_{ij} h_{ij}(-1)^{i+j} t\det(\tilde{A}_{ij})$$
$$d(det(A))[H] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}c_{ji}$$

si on note c_{ij} le coefficient de la transposée de la comatrice, on reconnait alors le coefficient ii du produit de matrice H par la transposée de la comatrice, on fait la somme sur i donc la trace. Finalement

$$d(det)(A) : H \mapsto \operatorname{Tr}\Big(\operatorname{Com}(A)^T H\Big).$$

Deuxième méthode
Lemme. $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Démonstration. On a

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(M) \neq 0\}$$

Ainsi, $GL_n(\mathbb{R})$ est bien ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit maintenant $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On peut choisir une suite (ε_k) convergeant vers 0 dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\det\left(Y - \varepsilon_k I_n\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda_i - \varepsilon_k\right) \neq 0$$

Ainsi, les matrices $X_k = Y - \varepsilon_k I_n$ sont alors inversibles et convergent vers Y. On obtient donc le résultat.
Théo. Soit la fonction

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

On a donc pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$D_X \det .H = \operatorname{Tr}\left({}^t \operatorname{Com}(X).H\right).$$

Démonstration. - Calcul de D_{I_n} det.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres complexes. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\det\left(I_n + tM\right) &= \prod_{i=1}^{n} \left(1 + t\lambda_i\right) \\
&= 1 + t \operatorname{Tr}(M) + O\left(t^2\right) \\
&= 1 + t \operatorname{Tr}(M) + o(t)
\end{aligned}$$

Ainsi, $D_{I_n} \det(M) = \operatorname{Tr}(M)$ - Calcul de D_X det pour $X \in GL_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\det(X + H) &= \det\left(X\left(I_n + X^{-1}H\right)\right) \\
&= \det(X)\left(1 + \operatorname{Tr}\left(X^{-1}H\right) + o(\|H\|)\right) \\
&= \det(X) + \operatorname{Tr}\left(\det(X)X^{-1}H\right) + o(\|H\|) \\
&= \det(X) + \operatorname{Tr}\left({}^t \operatorname{Com}(X)H\right) + o(\|H\|)
\end{aligned}$$

Ainsi, $D_X \det(H) = \operatorname{Tr}\left({}^t \operatorname{Com}(X)H\right)$.
- Calcul de D_X det pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.
L'application $X \mapsto {}^t$ Com X est continue donc $f : X \mapsto \operatorname{Tr}\left({}^t \operatorname{Com} X\,.\,\right)$ est continue et $g : X \mapsto D_X$ det. est continue. On a donc que f et g coïncident sur $GL_n(\mathbb{R})$ qui est dense sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a donc $f = g$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Calcul d'une différentielle 4

Heureusement il y a des indications.

Attention à la non commutativité du produit de matrices et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

☞ **C'est un des rares exercices où la fonction à étudier est définie sur un ouvert.**

très classqiue

Soit $f\ :: GL_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \qquad M \mapsto M^{-1}$.
Montrer que f est différentiable en tout point de $GL_n(\mathbb{R})$et déterminer sa différentielle.
on montrera que

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} = (A+H)^{-1}(I_n - (A+H)A^{-1}) = -(A+H)^{-1}HA^{-1}$$

sans oublier que $A \mapsto A^{-1}$ est continue

éléments de correction L'égalité proposée s'obtient dans difficulté. $(A+H)^{-1} - A^{-1} = (A+H)^{-1}(I_n - (A+H)A^{-1}) = -(A+H)^{-1}HA^{-1}$
Mais l'inverse est continue donc $(A+H)^{-1} = A^{-1} + \varepsilon(H)$ où la fonction ε est continue en 0. Donc $(A+H)^{-1} - A^{-1} = -(A^{-1} + \varepsilon(H))HA^{-1} = -A^{-1}HA^{-1} + \varepsilon(H)HA^{-1}$, le dernier terme est négligeable devant H, et le premier linéaire en H donc

$$df(A) : H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$$

.

autre démonstration
Autre démonstration on démontre d'abord la différentiabilité en I_n, on utilise une formule géométrique

$$(I_n + H)(I_n - H) = I_n - H^2 = I_n + o(H)$$

en multipliant par $(I_n + H)^{-1}$ on trouve

$$I_n - H = (I_n + H)^{-1} + (I_n + H)^{-1} \times o(H)$$

or $H \mapsto (I_n + H)^{-1}$ est continue donc bornée au voisinage de 0 donc $(I_n + H)^{-1}o(H) = o(H)$
donc $(I_n + H)^{-1} = I_n - H + o(H)$
reste à manipuler $(A+H)^{-1}$ attention à l'inverse de AB..

$$(A+H)^{-1} = \Big(A(I_n + A^{-1}H)\Big)^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1}A^{-1} =$$

$$(I_n - A^{-1}H + o(H))A^{-1}.$$

on remarque $o(A^{-1}H) = o(H)$ car c'est H qui tend vers 0.

99

Année 2022

De l'utilisation de relation fonctionnelle

L'exemple vu en td très classique

☞ **Voir la fiche 80 pour la réponse aux premières questions.**
Pour $x > 0$, on définit :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

a) Justifier que S est définie de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Préciser le sens de variations de S.
c) Etablir que $\forall x > 0$, $S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$.
d) Donner un équivalent de S en 0.
e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Rédaction et correction de d) et e)

d) On a $S(x) = \frac{1}{x} - S(x+1)$ or S a été vue continue en 1, donc $S(x+1) \underset{x\to 0}{=} S(1) + o(1)$ donc $S(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - S(1) + o(1)$ finalement

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

e) S a été vu décroissante donc

$$S(x) + S(x+1) \leqslant 2S(x) \leqslant S(x) + S(x-1).$$

$$\frac{1}{2x} \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{2(x-1)}.$$

par pincement d'équivalents :

$$S(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

.

Année 2022

Suites de fonctions définies par des accolades.

L'exemple du cours

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 0 et on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = 1 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant n, \quad f_n(x) = 0 \text{ si } x \geqslant n.$$

Rédaction (il n'y en a pas d'autre)

Soit $x \in [0, +\infty[$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ alors $x \leqslant n$ et donc $f_n(x) = 1$ finalement

Donc $(f_n)_{n \geqslant 0} \underset{\text{cvs}}{\longrightarrow} (x \mapsto 1)$.

L'exemple vu en ds

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 1 et on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}, \quad f_n(x) = 0 \text{ si } x \geqslant \sqrt{n}.$$

Etudier la convergence simple de la suite (f_n).

☞ **les points clefs**

• On fixe $x \in \mathbb{R}$ donc n finit par être plus grand que ce x mais on n'écrit pas cela.

• on fait un Dl quand n tend vers $+\infty$.

Rédaction (il n'y en a pas d'autre)

Fixons $x \in [0, +\infty[$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ alors $x \leqslant \sqrt{n}$ et donc $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = exp\left(n\ln(1 - \frac{x^2}{n})\right)$

donc

$$f_n(x) \underset{n \to +\infty}{=} exp\Big(n\big(-\frac{x^2}{n} + o(\frac{1}{n})\big)\Big) \underset{+\infty}{\sim} exp(-x^2).$$

Donc $(f_n)_{n \geqslant 1} \underset{\text{cvs}}{\longrightarrow} (x \mapsto e^{-x^2})$.

TCD avec fonctions dominantes définies par des accolades.

L'exemple du ds 5

$g_n(u) = \frac{1-\cos(u)}{u^{2-1/n}}$ sur $]0,+\infty[$:
- la suite de fonctions continues (g_n) converge simplement vers $u \longrightarrow (1-\cos(u))/u^2$.
- la suite de fonctions continues (g_n) est dominée indépendamment de n comme suit :

$$0 \leqslant \frac{1-\cos(u)}{u^{2-1/n}} = \frac{1-\cos(u)}{u^2}u^{1/n} \leqslant \varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(u)}{u^2} \text{ si } 0 < u \leqslant 1 \\ \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}u^{1/2} \text{ si } u \geqslant 1. \end{cases}$$

(on a majoré $u^{1/n}$ par 1 sur $]0,1]$ et par $u^{1/2}$ sur $[1,+\infty[$ puisque $n \geqslant 2$).
La fonction dominante φ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 par la valeur $1/2$, et intégrable car majorée sur $[1,+\infty[$ par $\frac{2}{u^{3/2}}$, intégrable sur $[1,+\infty[$.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^{2-1/n}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

102

Année 2022

Utilisation du Tcd sur un intervalle variable.

L'exemple le plus classique du monde

☞ **les points clefs**

• Il n'y pas de théorème dans le cours permettant d'étudier :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n g_n(t)\mathrm{d}t.$$

• Si ce n'est pas fait dans l'énoncé bien introduire la fonction par des accolades.

Enoncé

Déterminer si elle existe :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} 1-\frac{x^2}{n})^n\mathrm{d}x.$$

Correction :

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 1 et on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x)=\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \text{ si } 0\leqslant x\leqslant\sqrt{n},\quad f_n(x)=0 \text{ si } x\geqslant\sqrt{n}.$$

La suite de fonctions f_n converge simplement vers $x\mapsto e^{-x^2}$ voir fiche 100. De plus par concavité du ln (voir ds 5)

Pour $x\geqslant\sqrt{n}$, il est clair que $f_n(x)=0\leqslant e^{-x^2}$.

Et pour $0\leqslant x<\sqrt{n}$, on a $\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)\leqslant-\frac{x^2}{n}$ par concavité de la fonction ln.

En multipliant par n et en prenant l'exponentielle, on obtient $f_n(x)\leqslant e^{-x^2}$.

☞ La fonction f_n est définie par morceaux, il faut la majorer sur tout $[0,+\infty$ en distinguant les cas. Exploitons le théorème de convergence dominée :

- la suite de fonctions continues (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$vers $x\longrightarrow e^{-x^2}$.

- la suite (f_n) est dominée indépendamment de n par la fonction $x\to e^{-x^2}$, et celle-ci est intégrable sur $\mathbb{R}_+$car elle est continue et négligeable au voisinage de $+\infty$ devant $t\to\frac{1}{t^2}$.

On en déduit le résultat voulu :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x.$$

Chapitre 4

Proba

106

Année 2022

Inégalité de concentration

☞ **Il faut Se laisser guider par l'énoncé, le point clef est la monotonie de certaines fonctions.**
☞ **Il faut être à l'aise avec le théorème de transfert qui on le rappelle est une équivalence.**

classique voir ds 5/2

Soit X une variable aléatoire centrée prenant ses valeurs dans $[-1, 1]$.
a) Par un argument de convexité, montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}.$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{E}(e^{tX})$ est finie et :

$$\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}.$$

On pourra utiliser librement $ch(t) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.
c) Soit $r > 0$. Etablir

$$\mathrm{P}\big(|X| > r\big) \leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}.$$

Corrrection
a) On pose $\lambda = \dfrac{(1+x)}{2} \in [0,1]$ et la convexité de l'exponentielle donne

$$e^{(1-\lambda)(-t)+\lambda t} \leqslant (1-\lambda)e^{-t} + \lambda e^{t}.$$

b) La variable X est bornée donc $Y = e^{tX}$ l'est aussi et par conséquent admet une espérance finie. Par la question précédente :

$$Y \leqslant \frac{1}{2}(1-X)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+X)e^{t}.$$

Par croissance de l'espérance et nullité de l'espérance de X

$$E(Y) \leqslant \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} = ch(t) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$$

Remarque L'inégalité $ch(t) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$ s'obtient à partir du DSE des deux fonctions (je ne connais pas d'autres arguments) et en remarquant que $(2n)! \geqslant 2^n n!$. c) L'inégalité de Markov, on a pour tout $t > 0$;

$$P(X > r) = P(e^{tX} > e^{tr}) \leqslant e^{-tr}E(e^{tX}) \leqslant e^{-tr+\frac{t^2}{2}}.$$

Pour tout $t = r$, il vient

$$P(X > r) \leqslant e^{-\frac{r^2}{2}}.$$

En Considérant $X' = -X$ qui vérifie les mêmes hypothèses que X on obtient

$$P(X < -r) \leqslant e^{-\frac{r^2}{2}}.$$

D'où la conclusion

Année 2022

Savoir manipuler les moments en proba

☞ **Il faut savoir justifier l'existence des moments, on reverra en particulier la démonstration du cours : moment d'ordre 2 implique moment d'ordre 1.**

Kurtosis

Pour tout entier naturel n, on définit le moment centré d'ordre n de X, s'il existe, par

$$\mu_n(X) = E\left([X - E(X)]^n\right).$$

On dit qu'une variable aléatoire X admet un kurtosis lorsque :
- X admet des moments centrés d'ordre 2, 3 et 4 ;
- $\mu_2(X) \neq 0$
On appelle alors kurtosis de X le réel défini par :

$$K(X) = \frac{\mu_4(X)}{\left(\mu_2(X)\right)^2} - 3$$

1. Soit X une variable aléatoire admettant un kurtosis. Soient α et β deux réels, avec $\alpha \neq 0$. Montrer que la variable aléatoire $\alpha \mathrm{X} + \beta$ admet un kurtosis, et que l'on a :

$$K(\alpha X + \beta) = K(X)$$

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer le kurtosis de X en fonction de p.
3. Montrer que le kurtosis d'une variable aléatoire, s'il est défini, est toujours supérieur ou égal à -2.
4. Soit X une variable aléatoire admettant un kurtosis égal à -2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que X suive la loi uniforme sur $\{a, b\}$.
5. Existe-t-il une majoration du kurtosis, c'est-à-dire un réel M tel que $K(X) \leqslant M$, pour toute variable X admettant un kurtosis?

Corrrection

1. Pour $n \in \{2,3,4\}$ on a :

$$[\alpha X + \beta - E(\alpha X + \beta)]^n = \alpha^n [X - E(X)]^n$$

donc la linéarité de l'espérance et l'existence de $\mu_n(X)$ donne l'existence de $\mu_n(\alpha X + \beta)$. De plus on a

$$\mu_2(\alpha X + \beta) = V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X) \neq 0$$

puisque $V(X)$ et α sont non nuls.
Enfin par calcul immédiat, toujours par linéarité on a :

$$\mu_n(\alpha X+\beta) = \alpha^n \mu_n(X) \quad \textbf{puis} \quad K(X) = \frac{\alpha^4 \mu_4(X)}{[\alpha^2 \mu_2(X)]^2} - 3 = \frac{\mu_4(X)}{(\mu_2(X))^2} - 3 = K(X).$$

2. L'existence des moments est immédiate puisque la variable est finie, et on a déjà $\mu_2(X) = V(X) = p(1-p)$. On calcule $\mu_4(X)$:

$$\mu_4(X) = E\left((X-p)^4\right) = (-p)^4 \times (1-p) + (1-p)^4 \times p = p(1-p)\left[p^3 + (1-p)^3\right]$$

donc on obtient

$$K(X) = \frac{p^3 + (1-p)^3}{p(1-p)}$$

3. L'inégalité demandée revient à prouver que $\dfrac{\mu_4(X)}{(\mu_2(X))^2} \geqslant 1$, ou encore que $\mu_4(X) \geqslant (\mu_2(X))^2$.
Or en posant $Y = (X - E(X))^2$, cela revient encore à montrer que $E\left(Y^2\right) \geqslant E(Y)^2$, qui est immédiat par positivité de la variance de Y.
4. On se trouve dans le cas d'égalité de la question précédente, donc on a forcément $V(Y) = 0$. Or $V(Y) = E\left((Y - E(Y))^2\right)$ avec $(Y - E(Y))^2 \geqslant 0$, donc si son espérance est nulle elle est nulle avec une probabilité 1. On en déduit que $P(Y = E(Y)) = 1$, donc que Y est constante avec une probabilité 1 . Posons k cette constante (positive car Y est une variable positive), on a donc (avec une probabilité 1) :

$$Y = (X - E(X))^2 = k \quad \textbf{donc} \quad X \in \{E(X) - k, E(X) + k\}$$

et en posant $a = E(X) - k$ et $b = E(X) + k$, on a $X(\Omega) = \{a, b\}$. De plus ces valeurs sont forcément distinctes (c'est-à-dire que $k > 0$) car $V(X) \neq 0$ donc X ne peut être constante.
De plus on remarque avec les deux égalités précédentes que $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$, et en posant $P(X = a) = p$ on a :

$$E(X) = ap + b(1-p) \Longleftrightarrow \frac{a+b}{2} = (a-b)p + b \Longleftrightarrow p = \frac{a+b-2b}{2} \times \frac{1}{a-b} = \frac{1}{2}$$

donc X suit bien la loi uniforme sur $\{a, b\}$.
5. La fonction de p obtenue pour le kurtosis d'une loi de Bernouilli tend vers l'infini lorsque p tend vers 0 ou vers 1 : il n'y a donc pas de majoration du kurtosis.

108

Année 2022

La loi conjointe donne les lois marginales.

☞ **Le lecteur avisé remarquera que l'exercice qui suit est le même que le 108 de la banque**
☞ **Le point clef est que $\big(X = i\big)_{i\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements**

exemple

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$. On suppose que la loi conjointe de (X,Y) est donnée par :

$$P(X=k, Y=n) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

1. **Déterminer la valeur de a.**
2. **Déterminer la loi marginale de Y.**
3. **On admet que**

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Reconnaitre la loi de X.

d) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Correction

1. **Une loi définit une probabilité ou encore $P(\Omega = 1)$ Donc :**

$$\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} P(X=k, Y=n) = 1$$

de la définition de la loi conjointe on somme d'abord en X puis en Y.

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k p(1-p)^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n a^n \Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big)$$

La deuxième somme est la formule du binôme :$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n 2^n = p\frac{1}{1-((1-p)2a)}$$

finalement $a = \dfrac{1}{2}$**.**

2. **On a** $(Y = n) = (Y = n) \bigcap \Omega = (Y = n) \bigcap \left(\cup_{k=0}^{+\infty} (X = k)\right)$

   $(Y = n) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} \big((Y = n), (X = k)\big)$ **(union disjointe) d'où**

   $$P(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((Y = n), (X = k))$$

   (cette dernière expression est valable dans tous les exercices où la loi conjointe est donnée à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ **sinon adapté les sommes.)**

   $P(Y = n) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p(1-p)^n = p(1-p)^n.$

3. **Pour** $k \in \mathbb{N}$ **:**

   $P(X = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{k}{n} p \left(\frac{1-p}{2}\right)^n = p \left(\frac{1-p}{2}\right)^k \frac{1}{(1 - \frac{1-p}{2})^{k+1}}.$

   En simplifiant :

   $P(X = k) = \left(1 - \dfrac{1-p}{1+p}\right) \left(\dfrac{1-p}{1+p}\right)^k.$

4. **Pour montrer que 2 variables aléatoires ne sont pas indépendantes on exhibe un contre exemple :**

   $P(X = 0, Y = 0) = p$ **et** $P(X = 0) = \left(1 - \dfrac{1-p}{1+p}\right)$ **et** $P(Y = 0) = p(1-p)$ **et l'équation**

   $\left(1 - \dfrac{1-p}{1+p}\right) \times p((1-) = p$ **n'a pas de solution (on essaie mais non)**