

1. Sous-espaces propres et diagonalisation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$$

le sous-espace propre associé à la valeur propre λ .

1.1. Sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes

Théorème 1.1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u . Alors

$$E_{\lambda_1}(u) + \dots + E_{\lambda_p}(u)$$

est une somme directe :

$$\boxed{E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(u)}.$$

Démonstration. Soient

$$x_1 \in E_{\lambda_1}(u), \dots, x_p \in E_{\lambda_p}(u)$$

tels que

$$x_1 + \dots + x_p = 0.$$

Fixons $j \in \{1, \dots, p\}$.

On considère le polynôme de Lagrange

$$L_j(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq j}} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

Il vérifie

$$L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Comme

$$u(x_i) = \lambda_i x_i,$$

on a, pour tout polynôme P ,

$$P(u)(x_i) = P(\lambda_i)x_i.$$

remarque quand j'ai fait la démonstration je n'ai pas utilisé explicitement ce calcul mais on l'avait fait à la main

En particulier,

$$L_j(u)(x_i) = L_j(\lambda_i)x_i.$$

On applique $L_j(u)$ à l'égalité

$$x_1 + \dots + x_p = 0.$$

On obtient

$$0 = \sum_{i=1}^p L_j(u)(x_i) = \sum_{i=1}^p L_j(\lambda_i)x_i = x_j.$$

Ainsi

$$x_j = 0.$$

Comme j est quelconque,

$$x_1 = \dots = x_p = 0.$$

La somme est donc directe. □

1.2. Caractérisation de la diagonalisation par les sous-espaces propres

Théorème 1.2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable.
2. E est somme directe de ses sous-espaces propres :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u).$$

3.

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u).$$

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2).

Supposons u diagonalisable. Mais pour diagonaliser, il faut prendre une base des vecteurs propres d'après une remarque faite au début du cours.

Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u .

Regroupons les vecteurs de cette base suivant leur valeur propre. Pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(u)$, les vecteurs du groupe correspondant à λ appartiennent à $E_{\lambda}(u)$.

D'après le théorème 1.1, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Ainsi

$$E \subset \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u).$$

Mais alors :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u).$$

Remarque : il n'était pas à ce stade évident que l'on obtenait une base de E_{λ} par regroupement des vecteurs de la base de E . Si on introduit le polynôme caractéristique plus tôt dans le cours on peut aller un peu plus vite dans la démonstration précédente. Mais il y a beaucoup d'exercices où on utilise ce genre d'arguments : on a exhibé assez de vecteurs propres pour dire qu'on les a tous

(2) $\Rightarrow$ (3).

Si

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u),$$

alors, par la formule de dimension d'une somme directe,

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u).$$

(3) $\Rightarrow$ (2).

D'après le théorème 1.1, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont toujours en somme directe.

On a donc

$$\dim \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u) \right) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u).$$

Par hypothèse,

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u) = \dim E.$$

Ainsi

$$\dim \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u) \right) = \dim E.$$

Il s'agit donc d'un sous-espace de E ayant la même dimension que E . Par conséquent,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u).$$

Enfin, pour obtenir (2) $\Rightarrow$ (1) directement, il suffit de choisir une base de chaque $E_{\lambda}(u)$.

La réunion de ces bases est une base de E constituée de vecteurs propres de u . Ainsi u est diagonalisable. $\square$

2. Valeurs propres et polynôme caractéristique

On définit le polynôme caractéristique de u par

$$\chi_u(X) = \det(X \text{Id} - u).$$

Il est **unitaire** et

$$\deg(\chi_u) = \dim E.$$

2.1. Caractérisation des valeurs propres

Théorème 2.1. *Pour $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } u \iff \chi_u(\lambda) = 0.$$

Démonstration. On a

$$\lambda \in \text{Sp}(u) \iff \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}.$$

Cela équivaut à dire que $u - \lambda \text{Id}$ n'est pas injectif.

Comme E est de dimension finie,

$$u - \lambda \text{Id} \text{ injectif} \iff u - \lambda \text{Id} \text{ surjectif}.$$

Ainsi

$$\lambda \in \text{Sp}(u) \iff \det(\lambda \text{Id} - u) = 0.$$

Donc

$$\lambda \in \text{Sp}(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0.$$

$\square$

2.2. Caractérisation de la diagonalisation par le polynôme caractéristique

Théorème 2.2. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si :

1. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$;
2. pour toute valeur propre λ ,

$$\dim E_{\lambda}(u) = m_{\lambda},$$

où m_{λ} est la multiplicité de λ comme racine de χ_u .

Démonstration. Sens direct.

Supposons u diagonalisable.

D'après le théorème précédent

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u).$$

Dans une base obtenue par concaténation des base des E_λ la matrice de u est diagonale :

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Alors

$$\chi_u(X) = \det(XI_n - D) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\text{Dim}(E_{\lambda_i})}.$$

Mais pas définition :

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}.$$

Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles, pour toute valeur propre λ .

$$\boxed{\dim E_\lambda(u) = m_\lambda}$$

Sens réciproque.

Supposons que χ_u soit scindé et que

$$\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$$

pour toute valeur propre λ .

Alors

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda = \dim E.$$

Le théorème précédent donne donc

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u).$$

Ainsi u est diagonalisable. □

3. Lemme des noyaux

Lemme 3.1 (Lemme des noyaux – cas de deux polynômes). *Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*

Alors

$$\boxed{\text{Ker}(PQ(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u)).}$$

Démonstration. 1. Décomposition de tout vecteur de $\text{Ker}(PQ(u))$

Comme P et Q sont premiers entre eux, le théorème de Bézout donne $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$AP + BQ = 1.$$

En évaluant en u :

$$A(u)P(u) + B(u)Q(u) = \text{Id}.$$

Soit

$$x \in \text{Ker}(PQ(u)).$$

Alors

$$x = A(u)P(u)x + B(u)Q(u)x.$$

On pose

$$x_P = B(u)Q(u)x, \quad x_Q = A(u)P(u)x.$$

Alors

$$x = x_P + x_Q.$$

De plus,

$$P(u)x_P = P(u)B(u)Q(u)x = B(u)P(u)Q(u)x = 0,$$

donc

$$x_P \in \text{Ker}(P(u)).$$

De même,

$$Q(u)x_Q = Q(u)A(u)P(u)x = A(u)Q(u)P(u)x = 0,$$

donc

$$x_Q \in \text{Ker}(Q(u)).$$

Ainsi

$$\text{Ker}(PQ(u)) \subset \text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u)).$$

2. L'inclusion réciproque est toujours vraie

si

$$x = x_P + x_Q$$

avec

$$P(u)x_P = 0, \quad Q(u)x_Q = 0,$$

alors

$$P(u)Q(u)x = P(u)Q(u)x_P + P(u)Q(u)x_Q = 0 + 0 = 0.$$

Donc

$$\text{Ker}(PQ(u)) = \text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u)).$$

3. Montrons que la somme est directe

Soit

$$x \in \text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u)).$$

Alors

$$P(u)x = 0 \quad \text{et} \quad Q(u)x = 0.$$

En utilisant l'identité de Bézout,

$$x = (A(u)P(u) + B(u)Q(u))x = 0.$$

Ainsi

$$\text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u)) = \{0\}.$$

La somme est donc directe.

On a montré à la fois

$$\text{Ker}(PQ(u)) = \text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u))$$

et

$$\text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u)) = \{0\}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{Ker}(PQ(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u)).}$$

□

4. Polynômes annulateurs et diagonalisation

4.1. Formule fondamentale sur un vecteur propre

Proposition 4.1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit λ une valeur propre de u et soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé à λ .

Alors

$$\boxed{P(u)(x) = P(\lambda)x.}$$

Démonstration. Écrivons

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n.$$

Comme

$$u(x) = \lambda x,$$

on obtient, par récurrence sur k ,

$$u^k(x) = \lambda^k x.$$

Ainsi

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^n a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k x = P(\lambda)x.$$

□

4.2. Conséquence pour les polynômes annulateurs

Corollaire 4.2. Si P est un polynôme annulateur de u , c'est-à-dire

$$P(u) = 0,$$

alors toute valeur propre de u est une racine de P .

Démonstration. Soit λ une valeur propre et soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé.

Comme $P(u) = 0$,

$$0 = P(u)(x) = P(\lambda)x.$$

Puisque $x \neq 0$,

$$P(\lambda) = 0.$$

□

Ainsi,

$$\boxed{\text{Sp}(u) \subset \{\text{racines de } P\}}$$

pour tout polynôme annulateur P de u .

4.3. Critère de diagonalisation par un polynôme annulateur

Théorème 4.3. L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que

$$\boxed{P(u) = 0.}$$

Démonstration. Sens direct.

Supposons u diagonalisable.

Soient

$$\lambda_1, \dots, \lambda_p$$

ses valeurs propres distinctes.

On pose

$$P(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i).$$

Ce polynôme P est scindé à racines simples.

Soit x un vecteur propre associé à λ_i .

Alors

$$P(u)(x) = P(\lambda_i)x = 0.$$

Comme u est diagonalisable, E possède une base de vecteurs propres. Ainsi $P(u)$ est nul sur une base de E , donc

$$P(u) = 0.$$

(on peut aussi décomposer tous les vecteurs de E dans la base de vecteurs propres)

Sens réciproque.

Supposons qu'il existe

$$P(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$$

scindé à racines simples et tel que

$$P(u) = 0.$$

Les polynômes

$$X - \lambda_1, \dots, X - \lambda_p$$

sont deux à deux premiers entre eux.

Par le lemme des noyaux,

$$E = \text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}).$$

Donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u),$$

et u est diagonalisable. □

5. Polynôme minimal

Définition 5.1. Le **polynôme minimal** de u , noté π_u , est l'unique polynôme unitaire de plus petit degré tel que

$$\pi_u(u) = 0.$$

On pose

$$d = \deg(\pi_u).$$

5.1. Base de $\mathbb{K}[u]$

Théorème 5.2. *La famille*

$$\left(\text{Id}, u, u^2, \dots, u^{d-1} \right)$$

est une base de

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u) ; P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

En particulier,

$$\dim \mathbb{K}[u] = d = \deg(\pi_u).$$

Démonstration. Étape 1 : la famille est génératrice.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

On effectue la division euclidienne de P par π_u :

$$P = Q\pi_u + R, \quad \deg R < d.$$

En évaluant en u ,

$$P(u) = Q(u)\pi_u(u) + R(u).$$

Or

$$\pi_u(u) = 0,$$

donc

$$P(u) = R(u).$$

Comme

$$\deg R < d,$$

on peut écrire

$$R(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{d-1}X^{d-1}.$$

Ainsi

$$P(u) = a_0 \text{Id} + a_1u + \cdots + a_{d-1}u^{d-1}.$$

La famille

$$(\text{Id}, u, \dots, u^{d-1})$$

engendre donc $\mathbb{K}[u]$.

Étape 2 : la famille est libre.

Supposons

$$a_0 \text{Id} + a_1u + \cdots + a_{d-1}u^{d-1} = 0.$$

Le polynôme

$$Q(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{d-1}X^{d-1}$$

est alors un polynôme annulateur de u :

$$Q(u) = 0.$$

Par définition de π_u , tout polynôme annulateur de u de degré strictement inférieur à $\deg(\pi_u)$ est nul.

Comme

$$\deg Q < d = \deg(\pi_u),$$

on a donc

$$Q = 0.$$

Ainsi

$$a_0 = \cdots = a_{d-1} = 0.$$

La famille est libre.

Elle est donc une base de $\mathbb{K}[u]$.

□

5.2. Racines du polynôme minimal et valeurs propres

Théorème 5.3. *Les racines du polynôme minimal π_u sont exactement les valeurs propres de u :*

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } u \iff \pi_u(\lambda) = 0.}$$

Démonstration. Première implication.

Si λ est une valeur propre de u , alors π_u est un polynôme annulateur de u .

D'après la propriété fondamentale des polynômes annulateurs, toute valeur propre est racine de tout polynôme annulateur.

Ainsi

$$\pi_u(\lambda) = 0.$$

Réciproque.

Supposons

$$\pi_u(\lambda) = 0$$

et supposons, par l'absurde, que λ ne soit pas une valeur propre.

Alors

$$\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) = \{0\}.$$

Comme E est de dimension finie,

$$u - \lambda \text{Id}$$

est donc bijectif.

Puisque

$$\pi_u(\lambda) = 0,$$

le facteur $X - \lambda$ divise π_u .

On peut donc écrire

$$\pi_u(X) = (X - \lambda)Q(X)$$

avec

$$\deg Q = \deg(\pi_u) - 1.$$

En évaluant en u ,

$$0 = \pi_u(u) = (u - \lambda \text{Id})Q(u).$$

Comme $u - \lambda \text{Id}$ est inversible,

$$Q(u) = 0.$$

Ainsi Q est un polynôme annulateur de u de degré strictement inférieur à celui de π_u .

Par définition du polynôme minimal, on doit alors avoir

$$Q = 0.$$

Mais ceci est impossible puisque

$$\pi_u \neq 0$$

et

$$\pi_u = (X - \lambda)Q.$$

On obtient une contradiction.

Donc λ est une valeur propre. □

5.3. Autour des endomorphismes induits.

Théorème 5.4. *Si F est un sous espace stable par u alors*

- 1) $\chi_{u|_F}$ divise χ_u
- 2) Si u est diagonalisable alors $u|_F$ est diagonalisable.

Démonstration. Le point 1) s'obtient par déterminant par blocs, le point 2) est plus intéressant car souvent redemandé : on choisit un polynôme annulateur scindé à racines simples (et pas le polynôme caractéristique justement) ou si on veut le polynôme minimal de u , il annule également la restriction et hop c'est fini. □

6. Dimension des sous-espaces propres et caractéristiques

6.1. Majoration par la multiplicité

Théorème 6.1. *Soit λ une valeur propre de u et soit m_λ sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique χ_u .*

Alors

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda.$$

Démonstration. Comme λ est une valeur propre,

$$E_\lambda(u) \neq \{0\},$$

donc

$$\dim E_\lambda(u) \geq 1.$$

Posons

$$r = \dim E_\lambda(u).$$

On choisit une base

$$(e_1, \dots, e_r)$$

de $E_\lambda(u)$ et on la complète en une base de E .

Dans cette base, la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda I_r & * \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\chi_u(X) = \det(XI_r - \lambda I_r) \det(XI - A) = (X - \lambda)^r \det(XI - A).$$

La multiplicité m_λ de λ comme racine de χ_u vérifie donc

$$m_\lambda \geq r.$$

Ainsi

$$\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda.$$

□

6.2. Sous-espace caractéristique

Définition 6.2. Soit λ une valeur propre de u de multiplicité m_λ dans χ_u .

Le **sous-espace caractéristique** associé à λ est

$$F_\lambda = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}).$$

Théorème 6.3. Pour toute valeur propre λ de u ,

$$\dim F_\lambda = m_\lambda.$$

Démonstration. On écrit la factorisation du polynôme caractéristique :

$$\chi_u(X) = (X - \lambda)^{m_\lambda} Q(X),$$

avec

$$Q(\lambda) \neq 0.$$

Le polynôme $X - \lambda$ est premier avec Q .

Par le lemme des noyaux,

$$E = \text{Ker}(\chi_u(u)) = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}) \oplus \text{Ker}(Q(u)).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\dim \text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}) = m_\lambda.$$

On choisit une base adaptée au sous-espace

$$F_\lambda = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}).$$

Dans cette base, la matrice de u est triangulaire par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Sur F_λ , l'endomorphisme

$$u - \lambda \text{Id}$$

est nilpotent. La matrice A n'a donc que λ comme valeur propre, et son polynôme caractéristique est

$$(X - \lambda)^{\dim F_\lambda}.$$

Par conséquent,

$$\chi_u(X) = (X - \lambda)^{\dim F_\lambda} \chi_B(X).$$

Mais λ n'est pas racine de $\chi_B(X)$ sinon λ serait valeur propre de (u) , $0 = Q(u)(x) = Q(\lambda)x$ pour x vecteur propre non nul donnerait λ racine de Q (c'est la réciproque de les valeurs propres sont incluses dans un polynôme annulateur).

Encore une fois par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles :

$$\dim F_\lambda = m_\lambda.$$

□

7. Trigonalisation

Théorème 7.1 (Critère de trigonalisation). *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*

Alors

$$u \text{ est trigonalisable} \iff \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K}.$$

Démonstration. **Sens direct :** u trigonalisable $\Rightarrow \chi_u$ scindé.

Supposons que u soit trigonalisable.

Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\chi_u(X) = \det(XI_n - T) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i).$$

Ainsi χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Sens réciproque : χ_u scindé $\Rightarrow u$ trigonalisable.

On raisonne par récurrence sur

$$n = \dim E.$$

Initialisation.

Si $n = 1$, toute matrice est triangulaire, donc le résultat est immédiat.

Hérédité.

Supposons le résultat vrai pour tout espace de dimension $n - 1$ et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$ avec

$$\dim E = n.$$

Comme χ_u est scindé,

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

En particulier, χ_u possède une racine $\lambda_1 \in \mathbb{K}$.

Par le théorème de caractérisation des valeurs propres,

$$\lambda_1 \in \text{Sp}(u).$$

Il existe donc un vecteur propre non nul e_1 tel que

$$u(e_1) = \lambda_1 e_1.$$

On complète (e_1) en une base

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

de E .

Dans cette base,

$$\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & Y \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

où

$$A \in M_{n-1}(\mathbb{K}).$$

Le polynôme caractéristique de u vérifie

$$\chi_u(X) = (X - \lambda_1)\chi_A(X).$$

Comme χ_u est scindé, χ_A est lui aussi scindé.

Par hypothèse de récurrence, l'endomorphisme représenté par A est donc trigonalisable.

Il existe ainsi

$$P \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$$

et une matrice triangulaire supérieure T telles que

$$A = PTP^{-1}.$$

On considère alors la matrice de passage par blocs

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & Y \\ 0 & A \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & YP \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure.

Ainsi u est trigonalisable.

La récurrence est établie. □

À retenir

$$u \text{ diagonalisable} \iff E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

$$u \text{ diagonalisable} \iff \chi_u \text{ scindé et } \dim E_\lambda(u) = m_\lambda$$

$$\lambda \in \text{Sp}(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0$$

$$P(u) = 0 \implies \text{Sp}(u) \subset \{\text{racines de } P\}$$

$$P(u)(x) = P(\lambda)x \quad \text{si } u(x) = \lambda x$$

$$u \text{ diagonalisable} \iff \exists P \text{ scindé à racines simples, } P(u) = 0$$

$$\text{Sp}(u) = \{\text{racines de } \pi_u\}$$

$$\dim \mathbb{K}[u] = \deg(\pi_u)$$

$$\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$$

$$\dim \text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}) = m_\lambda$$

$$u \text{ trigonalisable} \iff \chi_u \text{ scindé}$$