

Intégration sur un intervalle quelconque.

1 Intégrale convergente sur $[a, +\infty[$

Définition

Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$; on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge, si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite FINIE en $+\infty$.
Si c'est le cas, cette limite est notée $\int_a^{+\infty} f$.

Théorème

L'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale sur $[a, +\infty[$ converge est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'application de cet espace dans $\mathbb{K}$ qui à f associe $\int_a^{+\infty} f$ est linéaire.

Conseil de rédaction

Un exercice sur les intégrales impropres commencera toujours par :

La fonction *ici indiquer le nom ou l'expression de la fonction* est continue par morceaux sur l'intervalle

• On traite ici l'exemple fondamental des fonctions de Riemann, ce résultat n'est pas à redémontrer mais au contraire sert de référence pour les théorèmes de comparaison.

On sait calculer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$:

$$\int_1^X \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \ln(X) & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_1^X & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette dernière expression admet une limite FINIE quand X tend vers $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

NEW Les fonctions exponentielles sont aussi des fonctions de références pour lesquelles il est inutile de justifier.

$t \mapsto e^{-at}$ (où a est réel, attention) est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $a > 0$.

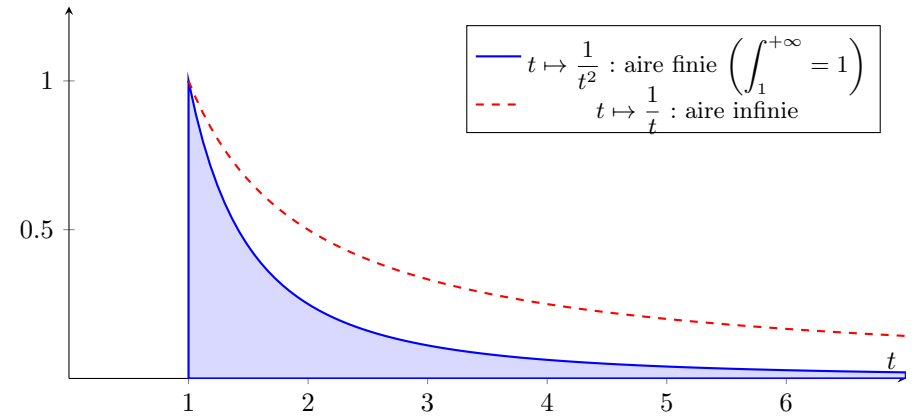


FIGURE 1 – Intégrales de Riemann en $+\infty$: $\alpha = 2 > 1$ (convergente) et $\alpha = 1$ (divergente).

intégrales de Riemann

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est convergente en $+\infty$ (et donc intégrable voir plus loin) si et seulement si $\alpha > 1$.

Certains résultats sur les intégrales sur un segment se généralisent, la relation de Chasles (pas détaillée ici) et les 2 théorèmes suivants. Signalons que si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge alors on peut définir $\int_x^{+\infty} f(t) dt$ pour tout $x \in [a, +\infty[$. La fonction ainsi définie s'appelle le reste de l'intégrale convergente.

Généralisation de deux théorèmes

a) Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ positive. On suppose que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \geq 0$$

de plus si f est CONTINUE et positive et si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et est nulle alors $f = 0$.

b) Le théorème fondamental de l'analyse.

Soit f une fonction continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$ telle que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge. La fonction de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K} : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)dt$ est dérivable sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée est $(-f)$ sur cet intervalle.

2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ **Définition**

Soit f une fonction continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$. On dit f est intégrable sur $[a, +\infty[$, si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente.

☞ Dans le cas des fonctions positives il n'y a pas de différence entre intégrable et intégrale convergente. On peut également dire absolument convergente au lieu d'intégrable. Il y a évidemment (sinon on ne ferait pas la différence de vocabulaire) des fonctions convergentes en $+\infty$ mais pas absolument convergentes. En revanche, on a (comme dans le cas des séries) le théorème suivant

Proposition

Si une fonction f est intégrable sur $[a, +\infty[$ alors l'intégrale $\int_a^{+\infty}$ converge. Toute intégrale absolument convergente est convergente. On définit alors la valeur de $\int_I f$ à partir des parties réelles et imaginaires, dans la pratique jamais utilisée sauf pour la primitive de $t \mapsto \frac{1}{t-a}$ (a complexe).

☞ Si f est positive alors $x \mapsto \int_a^x f$ est croissante, celle-ci admet donc une limite si et seulement si elle est majorée. Cette remarque ne vaut pas le statut de théorème mais elle est la base des résultats qui suivent.

Théorème de comparaison.

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Si $f = O(g)$ alors l'intégrabilité de g implique celle de f .
- Si $f \sim g$ l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f

☞ Le lecteur attentif pourrait être surpris de l'absence d'hypothèses de positivité des fonctions comme dans le cas des séries : mais cette hypothèse est dans *intégrable*. Il est à noter que l'erreur est moins courante que dans le cas des séries à termes positifs, car il n'y a pas au programme d'équivalent au théorème spécial des séries alternées.

Conseil de rédaction

Un exemple :

Montrons que $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. On sait que :

$$\left| \frac{e^{it}}{t^2} \right| = \frac{1}{t^2} \text{ en effet } |e^{it}| = 1 \text{ or } t \mapsto \frac{1}{t^2} \text{ est référencée intégrable donc } t \mapsto \frac{e^{it}}{t^2}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Si on joint les résultats sur les intégrales de Riemann et le théorème de comparaison, on obtient la règle suivante. Mais attention celle-ci n'est pas explicitement au programme, donc écrire une relation à l'aide d'un petit o ou un grand O. De plus le point clef, quelle que soit la rédaction, reste le même : les comparaisons entre fonctions usuelles vues en première année.

Règle t^α .

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = l$ ($l \neq \infty$) alors f est intégrable sur $[c, +\infty[$.

Exercice Type : les Bertrands faciles

Montrer que $t \mapsto \frac{\ln(t)^3}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)^3}{t^2}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$. De plus

Méthode 1 : je cherche $\alpha > 1$ tel que $\frac{t^\alpha \ln(t)^3}{t^2}$ tende vers une valeur finie (souvent 0), or $t^{\alpha-2} \ln(t)^3$ tend vers 0 par exemple pour $\alpha = 1,5$ par comparaison des fonctions puissances et logarithme.

Méthode 2 : on écrit directement le petit o

Or $\frac{\ln(t)^3}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{1,5}}\right)$ (par comparaison des fonctions puissances et logarithme), or $t \mapsto \frac{1}{t^{1,5}}$ est référencée intégrable en $+\infty$, donc l'intégrande est également intégrable en $+\infty$.

Refaire l'exercice précédent pour $\frac{\ln(t)^3}{t^{1,2}}$ puis pour $\frac{\ln(t)^c}{t^b}$ où $b > 1$.

3 Généralisation**Définition**

Soit f une fonction continue par morceaux de $[a, b[$ dans $\mathbb{K}$. On dit f est intégrable sur $[a, b[$, si l'intégrale $\int_a^b |f|$ est convergente.

Conseils pour aborder un exercice d'intégrale impropre

- Il faut étudier d'abord le domaine de définition de l'intégrande. Le programme officiel nous indique que les problèmes de définition sont aux bornes de l'intervalle d'extrémités a et b pour $\int_a^b$. Mais il se pourrait (des exercices un peu anciens) qu'il y ait également un problème pour une valeur intermédiaire (typiquement 1 pour $]0, +\infty[$) auquel cas il y aurait trois études locales.
- Ne pas faire d'étude locale en 0 si la fonction est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Attention aux paramètres, un exemple $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2} dt$ sur $]0, +\infty[$, x a a priori le droit d'être négatif donc il y a potentiellement un problème en 0.
- Il y a toujours une étude à faire en $+\infty$.

théorème d'intégrations par parties sur un domaine ouvert

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et $(a, b) \in \bar{I}^2$, extrémités de I . L'existence de limite aux bornes de l'intervalle du produit fg assure que les intégrales fg' et $f'g$ sont de même nature.

théorème de changement de variables

Soit $\phi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et soit f CONTINUE sur $]a, b[$, les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

☞ le programme dit que les étudiants peuvent appliquer sans justification dans le cas des changements de variables usuels.

△ Ces deux derniers théorèmes permettent de démontrer qu'une intégrale est convergente, pour démontrer l'intégrabilité il faudrait dériver des fonctions $|f|$ ce qui est illusoire. Evidemment, dans le cas des fonctions POSITIVES, on obtiendra l'intégrabilité.

4 Exercices de la banque.**Exercice 28**

N.B : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.

La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 26

N.B : détermination de la limite = chap suites de fonctions. Pour tout $n \geq 1$, on

pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.
3. La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente?

On peut aisément généraliser les intégrales de Riemann, le nouveau programme propose cette formulation

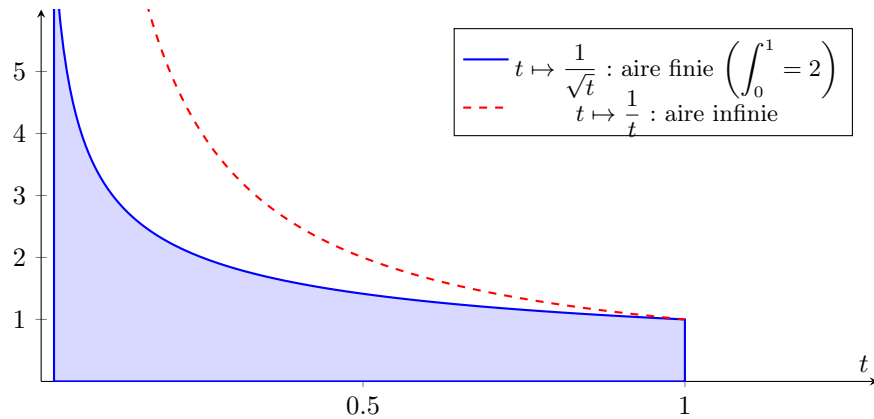


FIGURE 2 – Intégrales de Riemann en 0 : $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ (convergente) et $\alpha = 1$ (divergente).

Riemann le retour

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale de Riemann $\int_{[a,b]} \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Remarque : on voit donc que $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est ni intégrable en 0 ni intégrable en $+\infty$, en revanche $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 mais pas en $+\infty$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas intégrable en 0 mais intégrable en $+\infty$.

Les théorèmes de comparaison s'adaptent à une étude locale en $a \in \mathbb{R}$.

5 Intégration des relations de comparaison.

Des exemples pour comprendre l'énoncé du théorème. On a

$$\frac{1 + \cos(t) + \frac{1}{t}}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Les deux fonctions sont intégrables en $+\infty$, donc $\int_1^x \frac{1 + \cos(t) + \frac{1}{t}}{t^2} dt$ tend vers une valeur finie, disons l_1 (en fait $l_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1 + \cos(t) + \frac{1}{t}}{t^2} dt$) et $\int_1^x \frac{1}{t^2} dt$ tend vers $l_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1$. On ne peut rien dire (en termes de $O, o, \sim$) entre ces deux réels.

Cependant les deux restes tendent vers 0 (comme tout bon reste qui se respecte) donc on peut comparer (c'est le théorème qui suit) les restes :

$$\int_x^{+\infty} \frac{1 + \cos(t) + \frac{1}{t}}{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Dans le cas divergent, on peut comparer des grandeurs qui tendent vers $+\infty$ (car cette section s'applique aux fonctions positives). Par exemple $\frac{1 + \sin(\frac{1}{t})}{t} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t}\right)$. Or $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ donc

$$\int_1^x \frac{1 + \sin(\frac{1}{t})}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\int_1^x \frac{1}{t} dt\right) = O(\ln(x))$$

Remarque 1 : il se pourrait que l'intégrale de gauche soit convergente, le résultat serait vrai mais sans aucun intérêt.

Remarque 2 : dans cet exemple on peut se passer du théorème en majorant globalement $|1 + \sin(\frac{1}{t})|$ par 2 et en intégrant les inégalités.

Intégration des relations de comparaison.

Soit a et b des éléments de $\mathbb{R}$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ et g une fonction réelle de signe constant. Toutes les deux sont supposées continues par morceaux.

On suppose que quand x tend vers b

$f(x) = O(g(x))$ (resp1 $f(x) = o(g(x))$), resp2 $f(x) \sim g(x)$)

Premier cas : On suppose que $\int_a^b g(x)dx$ converge alors $\int_a^b f(x)dx$ converge (déjà vu) et

$$\int_x^b f(t)dt = O\left(\int_x^b g(t)dt\right),$$

$$\text{resp1} \quad \int_x^b f(t)dt = o\left(\int_x^b g(t)dt\right)$$

$$\text{resp2} \quad \int_x^b f(t)dt \sim \int_x^b g(t)dt.$$

Deuxième cas : On suppose que $\int_a^b g(x)dx$ diverge alors

$$\int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x g(t)dt\right),$$

$$\text{resp1} \quad \int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$

$$\text{resp2} \quad \int_a^x f(t)dt \sim \int_a^x g(t)dt.$$