1. *Équations d'Euler*

Une équation d'Euler est une équation linéaire du deuxième ordre de la forme :

$$t^2y'' + \alpha ty' + \beta y = c(t)$$

où α et β sont deux constantes.

Une méthode pour résoudre ce type d'équation sur $]0, +\infty[$ consiste à :

— trouver des fonctions solutions de l'équation homogène associée de la forme $t \to t^r$;

— appliquer la méthode de variation de la constante (ou des constantes) pour résoudre l'équation avec second membre.

Résoudre les équations différentielles :

(a) $t^2y'' + 4ty' + 2y = 2\ln^2 t + 12t$.

(b) $t^3y'' + 3t^2y' + ty = 6\ln t$.

(c) $t^2x'' - 2tx' + 2x = t^4 \cos t - 1$.

2. *Changement de fonctions inconnues*

Pour résoudre des équations linéaires du second ordre, on peut, si l'on a trouvé une solution de l'équation homogène, effectuer un changement de fonction inconnue en posant $x = yu_0$ où y est la nouvelle fonction inconnue et u_o une solution de l'équation homogène.

Traiter les divers exemples en tenant compte de l'indication :

(a) $(2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \to e^{\alpha x}$.

(b) Résoudre : $xy'' + 2y' + xy = 0$ et $xy'' + 2y' + xy = f$ où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pourra poser $z = xy$ et déterminer la fonction inconnue z.

3. *Changement de variables*

Parfois, on peut aussi simplifier les équations différentielles en effectuant un changement de variable. Voyons cela sur des exemples...

(a) Soit l'équation différentielle

$(H)\ :\ (1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0$.

On pose $x = \tan t$ et on cherche une équation satisfaite par la fonction z définie par : "$z(t) = y(x)$" (ie $z(t) = y(\tan t)$ ou encore $z(\text{Arctan}x) = y(x)$).

Montrer que z est solution d'une EDLH du second ordre à coefficients constants.

(b) même démarche avec

$(1 + x^2)y'' + xy' + k^2y = 0$ avec $k > 0$. En posant $x = \text{Argsh}t$ (ie $z(\text{sh}x) = y(x)$).

4. *Changement de variables*

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2y" - 3xy' + 4y = 0. \quad (E)$$

(a) Analyse : Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.

i. Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.

ii. En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)).

iii. Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.

iv. En déduire le portrait robot de y.

(b) Synthèse : Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

5. *Variation de constantes*

Résoudre les équations différentielles :

(a) $y'' + y = \tan t$ **(b)** $y'' + y = \tan^2 t$

6. *Coefficient constants*

On considère l'équation différentielle : $y" - 4y' + 3y = te^t$ (E)

(a) L'écrire sous forme matricielle $X' = AX + B(t)$.

(b) résoudre le système homogène : $X' = AX$.
En déduire les solution de l'équation homogène (E_0) associée à (E).

(c) On note z la solution de (E_0) qui vaut e en 1, on pose $y = kz$, où k est une fonction réelle de classe C^2.
Montrer que y est solution de (E) ssi k est solution de $k' - 2k = te^t$.
Finir la résolution.

7. *Recollement de solutions*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $E : (t+1)y'' - (t+2)y' + y = 0$

(b) $(t+1)^2y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$
en commençant par rechercher les solutions polynomiales

8. *Recherche de solutions DSE*

On peut parfois tenter de trouver des solutions DSE d'une équation différentielle. On cherche à priori une solution sous la forme $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On reporte dans l'équation et l'on obtient une relation de récurrence entre les (a_n). On vérifie alors que une telle fonction admet un rayon strictement positif et l'on reconnaît éventuellement le DSE d'une fonction...

(a) Résoudre $y" + xy' + y = 0$.

(b) Résoudre $xy'' + 2y' - xy = 0$

(c) Résoudre $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

(d) Résoudre $(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y'(t) = 0$.

(e) Résoudre l'équation différentielle $tx'' + 2x' - tx = 0$.
Trouver une solution DSE puis utiliser la variation de la constante.

(f) Résoudre l'équation différentielle $2xy' + y = 3x\cos x^{3/2}$.

(g) Donner la solution sur $\mathbb{R}$ DSE de l'équation d'Airy : $y'' + xy = 0$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

9. *Équations de Bernoulli et Riccatti*

(a) Équation de Bernoulli

i. Montrer que l'équation de Bernoulli

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \qquad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0, n \neq 1$$

se raméne à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.

ii. Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

(b) Équation de Riccati

i. Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

ii. Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

(c) Autre exemple

Résoudre l'équation dite « de Bernoulli » $xy' + y = (1-x^2)y^2$ à l'aide du changement de fonction inconnue $z = \frac{1}{y}$ (on cherche seulement des solutions ne s'annulant pas).

10. *Solution qui s'annule*

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue non identiquement nulle. On se propose de démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $y''(x) + p(x)y(x) = 0$ s'annulent. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que f est une solution ne s'annulant pas.

(a) Justifier que f est de signe constant. Dans la suite, quitte à changer f en $-f$, on supposera $f > 0$.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Justifier que la courbe représentative de f est en-dessous de sa tangente en $(a, f(a))$.

(c) En déduire que $f'(a) = 0$.

(d) Conclure.