1. Calcul de dérivées partielles

Calculer les dérivées partielles des fonctions :

(a) $f(x,y,z) = (x+z)^{(y^z)}$

(b) $f(x,y) = \min(x, y^2)$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-g(y)}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ g'(x) & \text{si} \quad x = y. \end{cases}$

2. DL d'ordre 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^1$ telle que $f(0,1,1) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1,1) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1,1) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,1,1) = 3$.

Peut-on déterminer $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(t^2, \mathrm{ch}t, e^t)}{f(t, \cos t, \mathrm{ch}t)}$?

3. Simplification

Soit $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right)$ et $g(x,y) = \arctan x - \arctan y$.

(a) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.

(c) Simplifier f à l'aide de g.

4. *Somme des angles d'un triangle*

Sur quelle partie D de $\mathbb{R}^3$ la fonction

$$f : (x,y,z) \longmapsto \arccos\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right) + \arccos\left(\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right) + \arccos\left(\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}\right)$$

est-elle définie ? Montrer que f est constante lorsque x, y, z sont strictement positifs.

5. *Intégrale fonction de paramètres*

Soit $f \ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t, x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n)\,\mathrm{d}t. \end{array} \right)$

Montrer que g est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles.

6. *Équations aux dérivées partielles*

Trouver les fonctions C^1 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que :

a. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0$

b. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \varphi(x)$ où $\varphi \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

c. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \psi(y)$ où $\Psi \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Application : Trouver $F \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$ ou $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$.

7. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$. On recherche toutes les fonctions $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ vérifiant : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

a. Vérifier que la fonction $\varphi : (x,y) \longmapsto \dfrac{y}{x}$ est une solution.

b. Soit $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que $go\varphi$ est aussi une solution.

c. Soit f une solution, montrer que la fonction : $(u,v) \longmapsto f(u, uv)$ ne dépend que de v.

d. Déterminer alors l'ensemble de toutes les solutions.

8. Equation de transport :

A l'aide d'un changement de variables linéaire, déterminer les fonctions de clacce C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial t} + c\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ avec $c \in \mathbb{R}_+^*$.

9. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes en utilisant le changement de variables indiqué :
a. $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, poser $u = x + y,\ v = x + 2y$.
b. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$, passer en polaires.
c. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} - 2f + 2 = 0$, poser $u = xy,\ v = \dfrac{y}{x}$ pour $x > 0$ ou $x < 0$.

10. On considère l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 3(x-y)f(x,y) = 0 \quad (*)$
a. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \longmapsto (xy, x+y)$. Montrer que φ induit un C^1-difféomorphisme (φ bijective, C^1, de jacobien non nul) de l'ouvert $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x - y > 0\}$ de $\mathbb{R}^2$ sur un ouvert V que l'on précisera.
b. En déduire toutes les fonctions $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ vérifiant $(*)$.

11. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante : $2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ en utilisant, par exemple, le changement de variable : $x = \dfrac{u^2+v^2}{2}$ et $y = \dfrac{u}{v}$.

12. On note $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x < y\}$. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur U telles que :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - y^2.$$

On utilisera le changement de variables $(u = x+y, v = xy)$.

13. *Changement de variables*
Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y) \end{cases}$
Montrer que f induit un $\mathbb{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert à préciser.

14. $a > 0$. Soit la fonction f de $U = \{(x,y)^2/x > 0, y > 0, x + y < 3a\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x,y) = x\mathrm{ln}x + y\mathrm{ln}y + (3a - x - y)\mathrm{ln}(3a - x - y)$. Déterminer les extrema de f sur U.
Montrer que l'on peut prolonger f à $\overline{U}$ et préciser le maximum et le minimum de f sur cet ensemble.

15. $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\{\}x \geq 0, y \geq 0 \quad \text{et} \quad x + y \leq 1\}$. et $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy(1-x-y)$.
Déterminer les extrema.

16. *Contre-exemple au théorème de Schwarz*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction π -périodique de classe $\mathbb{C}^2$. On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$g(x,y) = r^2 f(\theta)$ avec $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,0)$ en fonction de f.
En déduire les valeurs de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$. Construire un exemple précis (donner $g(x,y)$ en fonction de x et y) pour lequel ces deux dérivées sont distinctes.

17. *Contre-exemple au théorème de Schwarz*
Soit $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.
Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

18. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2 - y^2 > 0\}$; On veut déterminer les applications $f : U \to \mathbb{R}, (x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^2 sur U telles que : $\forall (x,y) \in U, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad (*)$
a. Justifier que les deux relations $u = x + y$ et $v = x - y$ permettent de définir un C^2-difféomorphisme (bijection C^2 et bijection réciproque C^2 de l'ouvert V que l'on précisera sur U.
b. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de g.
c. En déduire toutes les fonctions $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ vérifiant $(*)$.

19. déterminer les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

On fait le changement de variables $x = au + bv, y = cu + dv$ avec a, b, c, d à choisir judicieusement.

20. $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}x + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}y = 0$

Trouver les applications $f : (\mathbb{R}^{+*})^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^2$ vérifiant : $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}x + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}y = 0$.

On utilisera le changement de variables : $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

21. *Cordes vibrantes*

Les variables étant notées x et t, trouver la solution générale $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de "l'équation des ondes" ou "cordes vibrantes", à savoir :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Trouver ensuite la solution unique de l'équation des ondes qui satisfait aux conditions initiales :

$$f(x,0) = \sin x, \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = -\cos x.$$

22. *Equation de la chaleur*

Résoudre l'équation (variables x et t) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Chercher des solutions sous la forme $f(t,x) = a(t)b(x)$.

23. soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $b^2 - 4ac > 0$, et $a \neq 0$. Trouver toutes les fonctions $\mathcal{C}^{\in}$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

par un changement linéaire.