1) on se place sur $[0,A]$. Pas de problème en 0 (prolongement par continuité)

a)

$u'(t) = \sin t \qquad u(t) = 1-\cos t$

$v(t) = \frac{1}{t} \qquad v'(t) = -\frac{1}{t^2}$

$$\int_0^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^A + \int_0^A \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$$

En 0 $1-\cos t \sim \frac{t^2}{2}$ donc $\frac{1-\cos t}{t} \sim \frac{t}{2}$ on peut aussi prolonger par continuité (valeur nulle en 0).

On garde
$$\int_0^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1-\cos A}{A} + \int_0^A \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$$

on pose $g(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$ $\qquad g(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$. on peut prolonger en 0.

Par ailleurs $g(t) \geqslant 0$ et $g(t) \leqslant \frac{2}{t^2}$ donc g intégrable en $+\infty$

(Rieman $2>1$) dons $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt \in \mathbb{R}$.

et $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1-\cos A}{A} = 0$. On vient de prouver l'existence de $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\sin t}{t}\,dt$

Et par passage à la limite $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$

Or $1-\cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$ on pose $s = t/2$ dans la dernière intégrale et on obtient
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2 t/2}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2 s}{(2s)^2}\,2\,ds = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 s}{s^2}\,ds$$

On obtient bien $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt.}$

b) Il s'agit simplement de l'inégalité $\sin^2 t \leqslant t^2 \leqslant \tan^2 t$. (Pas de problème en 0)

c) $\boxed{A_n - B_n} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\right) \sin^2 nt\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 nt\,dt.$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2nt}{2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2n}\sin 2nt\right)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + 0 = \boxed{\frac{\pi}{4}.}$$

Pour $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$, on se concentre sur les sinus.

$\sin^2 nt + \sin^2(n+2)t - 2\sin^2(n+1)t = H$ (on pose ...)

alors $H = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2nt + 1 - \cos 2(n+2)t - 2\left(1 - \cos 2(n+1)t\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(2\cos 2(n+1)t - \cos 2nt - \cos 2(n+2)t\right)$.

$= \frac{1}{2}\left(2\cos 2(n+1)t - 2\cos 2(n+1)t \cos 2t\right)$

$= \cos 2(n+1)t\,(1 - \cos 2t) = 2\cos 2(n+1)t \sin^2 t$.

Ainsi $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos 2(n+1)t \sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} \cos 2(n+1)t\,dt$.

$= \left[\frac{1}{n+1}\sin 2(n+1)t\right]_0^{\pi/2} = 0$. $\boxed{A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} = 0}$

A_n est solution d'une équation récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$r^2 - 2r + 1 = 0$ $r = 1$ est racine double. A_n est de la forme.

$A_n = (\lambda + \mu n)1^n = \lambda + \mu n$.

Avec les conditions initiales $(n=0, n=1)$ on détermine λ et μ. On trouve.

$\boxed{A_n = \frac{\pi}{2} n}$. et comme $A_n - B_n = \frac{\pi}{4}$, on obtient aussi.

$\boxed{B_n = \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4}}$

d) On va conclure : $A_n \leq I_n \leq B_n$.

donc $\frac{A_n}{n} \leq \frac{I_n}{n} \leq \frac{B_n}{n}$ Par encadrement les

suites $\frac{A_n}{n}$ et $\frac{B_n}{n}$ convergent vers la même limite $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n} = \frac{\pi}{2}$.

Par ailleurs le changement de variable $u = nt$ dans $\frac{I_n}{n}$ donne.
$du = n\,dt$.

$\frac{I_n}{n} = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 u}{(u/n)^2}\frac{du}{n} = \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$.

convergence d'une fonction intégrable positive. Ainsi par unicité

$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = \pi/2}$.

3/4

2 a) Une simple étude de fonctions permet de conclure.

On montre $\forall t \geqslant 0 \quad e^{-t} \geqslant 1-t$. on l'applique pour $t = \frac{x^2}{n}$

De même $\forall t \geqslant 0 \quad e^{t} \geqslant 1+t$. on l'applique aussi pour $t = \frac{x^2}{n}$

b) $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$ on pose $t = \sqrt{n}\sin u \quad dt = \sqrt{n}\cos u \, du$

$$\boxed{I_n = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 u)^n \sqrt{n}\cos u \, du = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} u \, du = \sqrt{n} K_{2n+1}}$$

$J_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$ on pose $t = \sqrt{n}\tan u \quad dt = \sqrt{n}\frac{1}{\cos^2 u} du$

$$\boxed{J_n = \int_0^{\pi/2} (1+\tan^2 u)^{-n} \sqrt{n} \frac{1}{\cos^2 u} du = \sqrt{n} K_{2n-2}}$$

c) sur $[0, \sqrt{n}]$ $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2}$ par intégration $I_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$

car la fonction est positive. $\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

(NB : $x \to e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car elle est positive

et en $+\infty$ $e^{-x^2} = o(e^{-x})$ qui est intégrable)

de même sur $\mathbb{R}^+$, $e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ par intégration :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = J_n$$

En posant $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, il reste $\boxed{I_n \leq I \leqslant J_n}$

$$I_n = \sqrt{n} K_{2n+1} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{n}{4n+2}} \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$J_n = \sqrt{n} K_{2n-2} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{n}{4n-4}} \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

le Théorème d'encadrement s'applique et on en déduit.

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$