Le sujet comporte deux problèmes indépendants. durée : 4 heures
On peut les traiter dans l'ordre voulu en précisant par lequel on commence **(indiquer le titre correspondant)**.
La rédaction est une partie intégrante du devoir.

Problème : Intégrales elliptiques et AGM

Les parties sont largement indépendantes, mais le candidat pourra admettre les résultats des parties intermédiaires. Les notations sont conservées d'une partie à l'autre.

Partie I

Soient a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = a & b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} & a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ & b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

1. Que dire des suites (a_n) et (b_n) si $a = b$?
2. Montrer que si $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on a
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$
3. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones à partir du rang 1, puis qu'elles sont bornées.
4. Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite strictement positive.

On notera $M(a, b)$ la limite commune aux suites (a_n) et (b_n).
NB : On l'appelle moyenne arithmético-géométrique de a et b. (En anglais AGM).
On définira la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = M(1, x)$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, exprimer en fonction de λ et $M(a, b)$ les quantités suivantes : $M(b, a)$ et $M(\lambda a, \lambda b)$
6. Justifier que $M(a, b) = af\left(\frac{b}{a}\right)$.

Partie II

Pour a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les intégrales

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} \quad \text{et} \quad J(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}$$

7. Justifier que les intégrales $I(a, b)$ et $J(a, b)$ convergent, puis que $J(a, b) = 2I(a, b)$.
8. En effectuant le changement de variable $t = \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$ (à justifier), montrer que
$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a, b)$$
9. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ I(a_n, b_n) = I(a, b)$$
10. Justifier que
$$I(M(a, b), M(a, b)) = I(a, b)$$
(On admet que la fonction I est continue.)
11. Conclure que
$$M(a, b) = \frac{\pi}{2I(a, b)}$$

Partie III

12. On fixe $x > 0$. En effectuant le changement de variable $t = \frac{x}{s}$, montrer que

$$I(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$$

13. Pour cette question, on pose pour $x > 0$, $g(x) = I(1,x)$ et $h(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$.
En utilisant l'inégalité sur l'intervalle $[0,\sqrt{x}]$ $\quad 1 \leq 1+t^2 \leq 1+x$, donner un encadrement de $g(x)$ à l'aide de la quantité $h(x)$.
En déduire que $I(1,x) = g(x) \underset{0^+}{\sim} h(x)$.

14. Dériver $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ et en déduire une expression réduite pour $\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$.

15. Déterminer un équivalent simple de $I(1,x)$ en $x = 0^+$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}$$

16. Pour $x > 0$, déterminer une relation simple entre x, $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}$$

17. On admet que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. En comparant $f(x)$ et $f(y)$ pour des réels positifs, justifier que f est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

18. Montrer que l'on peut prolonger par continuité la fonction f en 0.
Que dire de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 de la fonction ainsi prolongée ?

19. Que dire de la branche infinie de la courbe f en $+\infty$.

20. Préciser rapidement les variations de f et tracer sa courbe sur $]0,+\infty[$.

Partie IV

21. Soit $x > 0$, montrer que

$$I(1,x) = \frac{2}{1+x} I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

22. On définit la suite (w_n) par $w_0 = x$ et $w_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{w_n}}{1+w_n}$.

    (a) Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $P(a) = a^4 + a^2 - 2a$ (on pourra chercher des racines évidentes).
    En déduire le signe de $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} - x$ pour $x > 0$.

    (b) Montrer que la suite (w_n) converge vers 1.

    (c) Montrer que

    $$\forall n \in \mathbb{N},\ I(1,x) = I(1, w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k}$$

    (d) Soit la suite (p_n) définie par

    $$p_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{1+w_k}{2}$$

    Montrer que la suite (p_n) converge vers une limite ℓ non nulle, puis exprimer de manière simple $I(1,x)\ell$.

Le sujet comporte deux problèmes indépendants. durée : 4 heures
On peut les traiter dans l'ordre voulu en précisant par lequel on commence **(indiquer le titre correspondant)**.
La rédaction est une partie intégrante du devoir.

Problème : Intégrales de Frullani

Dans ce problème, on étudie la convergence et la valeur d'intégrales de la forme suivante :

$$I(f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t} \mathrm{d}t$$

où f désigne une fonction continue de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ que l'on précisera par la suite.

Partie I : Cas où la fonction f est définie par $f(t) = \frac{P(t)}{t^2+1}$ avec P polynômiale.

1. On suppose dans cette sous-question que $P(t) = 1$, donc que $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$.

(a) Déterminer dans ce cas l'expression de $\frac{f(t)-f(2t)}{t}$, en donner un équivalent en $+\infty$ et justifier la convergence de l'intégrale $I(f)$.

(b) Effectuer dans l'intégrale $I(f)$ le changement de variable défini par $u = t^2$.

(c) Déterminer deux réels a et b tels que l'ont ait pour tout réel $u \geq 0$:

$$\frac{3}{2(u+1)(4u+1)} = \frac{a}{4u+1} + \frac{b}{u+1}.$$

(d) En déduire la valeur de l'intégrale $I(f)$.

2. On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t$, donc que $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$.

(a) Justifier l'existence des intégrales $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$ et $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{f(2t)}{t} \mathrm{d}t$ et préciser leurs valeurs.

(b) Etudier la convergence et la valeur de l'intégrale $I(f)$.

3. On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t^2$, donc que $f(t) = \dfrac{t^2}{t^2+1}$.

(a) En posant $u = t^2$, calculer les intégrales $\int\limits_0^{A} \dfrac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$ et $\int\limits_0^{A} \dfrac{f(2t)}{t} \mathrm{d}t$ pour tout réel positif A.

(b) En déduire la convergence et la valeur de $I(f)$.

4. On suppose dans cette sous-question que $P(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ donc que $f(t) = \dfrac{a_2t^2 + a_1t + a_0}{t^2+1}$.
En exploitant les résultats précédents, justifier l'existence et donner la valeur de $I(f)$.

5. On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t^3$, donc que $f(t) = \dfrac{t^3}{t^2+1}$.

(a) Déterminer dans ce cas l'expression de $\dfrac{f(t) - f(2t)}{t}$, et étudier la convergence de l'intégrale $I(f)$.

(b) Que dire de l'expression $I(f)$ si on suppose $P(t) = t^n$, donc que $f(t) = \dfrac{t^n}{t^2+1}$ pour $n \geq 3$.

Partie II : Cas où la fonction f est définie par $f(t) = e^{-t}$.

1. *Convergence de l'intégrale $I(f)$ lorsque $f(t) = e^{-t}$.*

(a) En exploitant le développement limité de l'exponentielle, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(2t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$$

En déduire qu'on peut prolonger par continuité la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ en $t = 0$.

(b) Établir qu'on a lorsque t tend vers $+\infty$:

$$\frac{f(t) - f(2t)}{t} = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

(c) En déduire la convergence de l'intégrale $I(f)$.

2. *Calcul de l'intégrale $I(f)$ lorsque $f(t) = e^{-t}$.*

(a) Pour tout réel $\epsilon > 0$, établir l'égalité suivante (en justifiant l'existence des intégrales) :

$$\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \mathrm{d}t = \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \mathrm{d}u - \int_{2\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \mathrm{d}u$$

En déduire que :

$$\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \mathrm{d}t = \int_{\epsilon}^{2\epsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u} \mathrm{d}u + \int_{\epsilon}^{2\epsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

(b) On considère la fonction h définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $h(u) = \dfrac{e^{-u} - 1}{u}$ si $u \neq 0$ et $h(0) = -1$.

Établir que h est continue sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle admet une primitive H de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que l'on a pour tout réel $\epsilon > 0$ l'égalité suivante :

$$\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \mathrm{d}t = H(2\epsilon) - H(\epsilon) + \ln(2).$$

(c) En déduire la valeur de l'intégrale $I(f)$.

3. *Application au calcul d'une autre intégrale.*

En utilisant ce qui précède justifier l'existence et donner la valeur de l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{u - 1}{\ln u} \mathrm{d}u.$$

♣♢♡♠