Compacité

1. Graphe fermé
Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$
On note $Gr(f) = \{(x, y) \in E \times F \text{ tq } y = f(x)\}$.

(a) Montrer que si f est continue, alors $Gr(f)$ est fermé dans $E \times F$.

(b) Prouver la réciproque lorsque $f(E)$ est inclus dans un compact de F.

(c) Donner un contrexemple si $f(E)$ n'est pas inclus dans un compact.

2. Isométries d'un compact
Soit A une partie compacte d'un evn E et $f : A \longrightarrow A$ telle que : $\forall\, x, y \in A,\ d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$.

(a) Soit $a \in A$ et (a_n) la suite définie par : $a_0 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Montrer que a est valeur d'adhérence de la suite (a_n).

(b) Soient $a, b \in A$. Montrer que $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$.

(c) Montrer que $f(A) = A$.

3. Fonction bicontinue sur un compact
Soit A une partie compacte d'un evn E et $f : A \longrightarrow F$ une fonction continue et injective (F = evn).

(a) Montrer que $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ est aussi continue.

(b) Donner un exemple où A n'est pas compact et f^{-1} n'est pas continue.

4. Image d'une intersection
Soient E, F deux espaces vectoriel normés et $f : E \longrightarrow F$ continue. Soit (K_n) une suite décroissante de compacts de E. Montrer que $f(\bigcap\limits_n K_n) = \bigcap_n f(K_n)$.

5. Boule unité non compact
Soit $E = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ muni de la norme $\|.\|_2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(nx)$.

(a) Calculer $\|f_n - f_p\|_2$ pour $n, p \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire que $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte.

6. Somme de deux compacts
Soient K, L deux parties compactes d'un espace vectoriel normé E.
On pose $K + L = \{x + y;\ x \in K,\ y \in L\}$. Démontrer que $K + L$ est une partie compacte de E.

7. Somme d'un fermé et d'un compact
Soit F un fermé, et C un compact de $\mathbb{R}^n$.
On note $G = F + C = \{x + y;\ x \in F \text{ et } y \in C\}$. Montrer que G est fermé.

8. Soit $M \geq 0$ fixé et K la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$K = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{tq} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = M\right\}$$

(a) Montrer que K est compact.

(b) Soit $f : K \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$, montrer que f admet un maximum qu'elle atteint en un point où toutes les coordonnées sont égales.

(c) En déduire que la moyenne géométrique de réels positifs est inférieure à la moyenne arithmétique.

connexité par arc

9. Soient A et B deux parties connexes par arcs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
a) Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
b) En déduire que $A + B = \{a + b / a \in A, b \in B\}$ est connexe par arcs.

10. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ injective et continue. Montrer que f est strictement monotone.
Indice : on peut considérer $\varphi(x, y) = f(x) - f(y)$ défini sur $X = \left\{(x, y) \in I^2, x < y\right\}$.