

## PROBLEME : Exemples de matrices semblables à leur inverse

Dans tout le problème,  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

Pour  $u$  endomorphisme de  $E$  et  $n$  entier naturel non nul, on note  $u^n = u \circ u \circ \dots \circ u$  ( $n$  fois).

On note  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3,  $GL_3(\mathbb{R})$  le groupe des matrices inversibles de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ , et  $I_3$  la matrice unité de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ .

On notera par  $0$  l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ , on dira que la matrice  $A$  est **semblable** à la matrice  $B$  s'il existe une matrice  $P$  de  $GL_3(\mathbb{R})$  telle que :  $A = P^{-1}BP$ . On rappelle que si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases de  $E$ , si  $P$  est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ , si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  de matrice  $A$  dans la base  $\mathcal{B}'$  et de matrice  $B$  dans la base  $\mathcal{B}$  alors  $A = P^{-1}BP$  (c'est-à-dire, la matrice  $A$  est semblable à la matrice  $B$ ).

### Partie A

1. On notera  $A \sim B$  pour dire que la matrice  $A$  est semblable à la matrice  $B$ .  
Démontrer que la relation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ .  
On pourra désormais dire que les matrices  $A$  et  $B$  **sont** semblables.
2. Démontrer que deux matrices de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  de déterminants différents ne sont pas semblables.
3. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  et soit  $i$  et  $j$  deux entiers naturels.  
On considère l'application  $w$  de  $\ker u^{i+j}$  vers  $E$  définie par :  $w(x) = u^j(x)$ .
  - (a) Montrer que  $\text{Im} w \subset \ker u^i$ .
  - (b) En déduire que  $\dim(\ker u^{i+j}) \leq \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$ .
4. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant :  $u^3 = 0$  et  $\text{rg} u = 2$ .
  - (a) Montrer que  $\dim(\ker u^2) = 2$ . (On pourra utiliser deux fois la question **3b**.)
  - (b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur  $a$  non nul de  $E$  tel que  $u^2(a) \neq 0$ , et en déduire que la famille  $(u^2(a), u(a), a)$  est une base de  $E$ .
  - (c) Ecrire alors la matrice  $U$  de  $u$  et la matrice  $V$  de  $u^2 - u$  dans cette base.
5. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant :  $u^2 = 0$  et  $\text{rg} u = 1$ .
  - (a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur  $b$  non nul de  $E$  tel que  $u(b) \neq 0$ .
  - (b) Justifier l'existence d'un vecteur  $c$  de  $\ker u$  tel que la famille  $(u(b), c)$  soit libre, puis montrer que la famille  $(b, u(b), c)$  est une base de  $E$ .
  - (c) Ecrire alors la matrice  $U'$  de  $u$  et la matrice  $V'$  de  $u^2 - u$  dans cette base.

### Partie B : Matrices de Heisenberg

Soit désormais une matrice  $A$  de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  semblable à une matrice du type  $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ .

On se propose de montrer que la matrice  $A$  est semblable à son inverse  $A^{-1}$ .

On pose alors  $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , et soit une matrice  $P$  de  $GL_3(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP = T = I_3 + N$ .

1. Expliquer pourquoi la matrice  $A$  est bien inversible.
2. Calculer  $N^3$  et montrer que  $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$ .
3. On suppose dans cette question que  $N = 0$ , montrer alors que les matrices  $A$  et  $A^{-1}$  sont semblables.
4. On suppose dans cette question que  $\text{rg}(N) = 2$ . On pose  $M = N^2 - N$ .

(a) Montrer que la matrice  $N$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et en déduire, en utilisant la question **A.4.**, une matrice semblable à la matrice  $M$ .

(b) Calculer  $M^3$  et déterminer  $\text{rg}(M)$ .

(c) Montrer que les matrices  $M$  et  $N$  sont semblables.

(d) Montrer alors que les matrices  $A$  et  $A^{-1}$  sont semblables.

5. On suppose dans cette question que  $\text{rg}(N) = 1$ . On pose  $M = N^2 - N$ . Montrer que les matrices  $A$  et  $A^{-1}$  sont semblables.

6. **Exemple** : soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

On note  $(a, b, c)$  une base de  $E$  et  $u$  l'endomorphisme de  $E$  de matrice  $A$  dans cette base.

(a) Montrer que  $\ker(u - id_E)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 2 dont on donnera une base  $(e_1, e_2)$ .

(b) Justifier que la famille  $(e_1, e_2, c)$  est une base de  $E$ , et écrire la matrice de  $u$  dans cette base.

(c) Montrer que les matrices  $A$  et  $A^{-1}$  sont semblables.

7. Réciproquement, toute matrice de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable

à une matrice du type  $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ?

