

1. Montrer que tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel normé de dimension finie E est fermé.
Pour cela on pourra montrer que F est le noyau d'un projecteur continue.

2. On veut montrer que tout sous-espace vectoriel F de dimension finie dans un espace vectoriel normé **de dimension quelconque** $(E, \|\cdot\|)$ est fermé.

Pour cela on admet le résultat de l'exercice précédent : **tout sous espace vectoriel dans un espace vectoriel de dimension finie est fermé (et aussi de dimension finie)**.

On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans F qui converge vers $x \in E$.

On introduit l'espace vectoriel $G = F + \mathbb{R}x$, justifier que G est de dimension finie puis en déduire $x \in F$.

Ainsi F est fermé.

3. Soit F une partie fermée non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie E .
- (a) Montrer que, pour tout $x \in E$, la distance de x à F est atteinte en un certain élément $y_0 \in F$.
- (b) Y a-t-il unicité de cet élément y_0 ?
4. Soit (A_n) une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

On suppose

$$A_n \rightarrow A \text{ et } A_n^{-1} \rightarrow B$$

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} P \text{ et } B^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} Q$$

On suppose que les matrices A et B commutent. Montrer que les matrices P et Q commutent.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$M^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} A$$

montrer que nécessairement $A^2 = A$.

7. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad N(AB) \leq cN(A)N(B)$$

8. Soient E un espace de dimension finie de norme $\|\cdot\|$ et f une application de E vers E .
On dit que f est contractante si

$$\exists k \in]0, 1[, \forall x, y \in E, \|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\|$$

- (a) On suppose que f est contractante et l'on introduit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déterminée par

$$x_0 \in E \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$$

Montrer la convergence de la série $\sum x_{n+1} - x_n$.

- (b) En déduire que lorsque f est contractante, elle admet un point fixe ($f(x) = x$) et justifier que celui-ci est unique.
- (c) Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit contractante alors f admet un unique point fixe.

9. Plus petite boule contenant une partie

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^2 , $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie bornée contenant au moins deux points.

- (a) Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimum contenant A .
- (b) Montrer que cette boule n'est pas nécessairement unique (on prendra $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$).
- (c) Montrer que si $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne, alors la boule précédente est unique.