Révisions de MPSI

Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans tout le cours d'algèbre linéaire, le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Le programme d'algèbre linéaire est divisé en deux chapitres d'importance comparable, intitulés « Algèbre linéaire I » et « Algèbre linéaire II ». Le premier privilégie les objets géométriques : espaces, sous-espaces, applications linéaires. Le second est consacré aux matrices. Cette séparation est une commodité de rédaction. Le professeur a la liberté d'organiser l'enseignement de l'algèbre linéaire de la manière qu'il estime la mieux adaptée.
Les objectifs du chapitre « Espaces vectoriels et applications linéaires » sont les suivants :

- *acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;*
- *reconnaître les problèmes linéaires et les modéliser à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;*
- *définir la notion de dimension, qui interprète le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; il convient d'insister sur les méthodes de calcul de dimension, de faire apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentations : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires ;*
- *présenter un certain nombre de notions de géométrie affine, de manière à consolider et enrichir les acquis relatifs à la partie affine de la géométrie classique du plan et de l'espace.*

Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à la dimension quelconque.

A - Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$.
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une partie X.	Notations $\mathrm{Vect}(X)$, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace contenant X contient $\mathrm{Vect}(X)$.
c) Familles de vecteurs	
Familles et parties génératrices. Familles et parties libres, liées. Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$.
d) Somme d'un nombre fini de sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.	La somme $F_1+\cdots+F_p$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F_1+\cdots+F_p$ sous la forme $x_1+\cdots+x_p$ avec $x_i \in F_i$ est unique.

B - Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice on peut extraire une base. Théorème de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base.
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimensions de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
En dimension n, une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice.	
Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	Sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire.	Dimension commune des supplémentaires.
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe d'un nombre fini de sous-espaces.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces ; formule de Grassmann. Caractérisation des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors : $\dim \sum_{i=1}^{p} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.	

C - Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition, réciproque. Isomorphismes.	L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. Bilinéarité de la composition.
Image et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire.	
Noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité.	
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\left(u(x_i), i \in I\right)$.	
Image d'une base par un isomorphisme.	
Application linéaire de rang fini, rang. Invariance par composition par un isomorphisme.	Notation $\operatorname{rg}(u)$.
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties.	Notation Id_E.
Anneau $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$.	Non commutativité si $\dim E \geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation des endomorphismes vérifiant $p^2 = p$ et $s^2 = \mathrm{Id}$.	
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$.
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in I$: $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Classification, à isomorphisme près, des espaces de dimension finie par leur dimension.	
Une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie est inversible à gauche si et seulement s'il est inversible à droite.	
Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	
Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i,F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $u_{\vert E_i} = u_i$ pour tout i.	
d) Théorème du rang	
Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.	
Théorème du rang : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u)$.	
e) Formes linéaires et hyperplans	
Forme linéaire.	Formes coordonnées relativement à une base.

Contenus	Capacités & Commentaires
Hyperplan.	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E, alors pour toute droite D non contenue dans H : $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan. Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.	En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.	Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'étude de la dualité est hors programme.