

## CCS TSI MATHS2 2021

## I Commutant d'une matrice

## I.A Propriétés générales

- Q 1.** —  $I_n \in C_A$  car la matrice identité commute avec toute matrice,  $C_A$  est donc non vide.  
— Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux matrices de  $C_A$  et soit  $\lambda$  un réel, alors :

$$\begin{aligned}(\lambda M_1 + M_2)A &= \lambda M_1 A + M_2 A \\ &= \lambda A M_1 + A M_2 \text{ car } (M_1, M_2) \in C_A^2 \\ &= A(\lambda M_1 + M_2)\end{aligned}$$

Donc  $C_A$  est stable par combinaison linéaire.

En conclusion,  $C_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- Q 2.** Soient  $M$  et  $N$  deux matrices de  $C_A$ , alors :

$$\begin{aligned}MNA &= M(NA) = MAN \text{ car } N \in C_A \\ &= (MA)N = AMN \text{ car } M \in C_A\end{aligned}$$

En conclusion,  $C_A$  est stable par produit matriciel.

- Q 3.** Pour  $M \in C_A$  fixé, prouvons cette affirmation par récurrence sur l'entier  $k \geq 0$ .

- **Initialisation :** pour  $k = 0$ , on a  $M^k = M^0 = I$  et donc  $M^0 \in C_A$ .
- **Hérédité :** soit  $k \in \mathbb{N}$  un entier fixé. On suppose que  $M^k \in C_A$ . Alors, d'après la question précédente, en posant  $N = M^k$ , on a  $(M \times N) \in C_A$ , soit  $M \times N = M \times M^k = M^{k+1} \in C_A$ .
- **Conclusion :** la propriété considérée étant vraie au rang 0 et héréditaire, on peut affirmer que :  $\forall k \in \mathbb{N}, M^k \in C_A$ .

- Q 4.** Soit  $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ .

Tout d'abord, si  $\Pi$  est le polynôme nul, il est tout à fait évident que  $\Pi(A)$  commute avec  $A$  puisque  $\Pi(A)$  est, dans ce cas très particulier, la matrice nulle de même format que  $A$ .

Supposons dorénavant que  $\Pi$  n'est pas le polynôme nul; soit alors  $d = d^o(\Pi)$  le degré du polynôme  $\Pi$  puis  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$  ses coefficients, en sorte que :  $\Pi(X) = \sum_{k=0}^d \alpha_k X^k$ .

On a :  $\Pi(A) = \sum_{k=0}^d \alpha_k A^k$ , la matrice  $\Pi(A)$  est combinaison linéaire de puissances de  $A$ , d'après la question précédente

$\Pi(A)$  est donc combinaison linéaire de matrices qui commutent avec  $A$ . Puisque  $C_A$  constitue un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on en déduit que  $\Pi(A) \in C_A$ .

- Q 5.** Puisque la matrice carrée  $P$  est inversible, on a pour tout couple  $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  :

$$Y = X \iff YP = XP \iff P^{-1}YP = P^{-1}XP$$

Mais alors, pour une matrice quelconque  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on peut affirmer que :

$$\begin{aligned}M \in C_A &\iff AM = MA \\ &\iff AMP = MAP \\ &\iff P^{-1}AMP = P^{-1}MAP \\ &\iff P^{-1}A(P^{-1}M)P = P^{-1}M(P^{-1}A)P \\ &\iff (P^{-1}A)P(P^{-1}M)P = (P^{-1}M)P(P^{-1}A)P \\ &\iff M' \in C_{A'}\end{aligned}$$

**Q 6.** Tout d'abord, d'après la question précédente :  $\Phi$  est bien à valeurs dans  $C_{A'}$  et  $\Psi$  à valeurs dans  $C_A$ .  
 Ensuite, pour  $(M_1, M_2) \in C_A^2$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  fixés, on obtient en appliquant les règles usuelles du calcul matriciel :

$$\Phi(\alpha M_1 + \beta M_2) = P^{-1}(\alpha M_1 + \beta M_2)P = (\alpha P^{-1}M_1 + \beta P^{-1}M_2)P = \alpha P^{-1}M_1P + \beta P^{-1}M_2P = \alpha\Phi(M_1) + \beta\Phi(M_2),$$

ce qui prouve que  $\Phi$  est linéaire.

On montre de la même façon que  $\Psi$  est elle aussi linéaire.

**Q 7.** L'associativité du produit matriciel permet d'affirmer que

$$\forall M \in C_{A'}, \Phi \circ \Psi(M) = \Phi(PMP^{-1}) = P^{-1}(PMP^{-1})P = (P^{-1}P)M(P^{-1}P) = M,$$

en sorte que :  $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{C_{A'}}$ .

On prouve de même que :  $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{C_A}$ .

**Q 8.** D'après les deux questions précédentes, les applications  $\Phi : C_A \rightarrow C_{A'}$  et  $\Psi : C_{A'} \rightarrow C_A$  sont toutes deux linéaires et bijectives, telles que :  $\Phi^{-1} = \Psi$ ,  $\Psi^{-1} = \Phi$ .

On peut donc affirmer que  $\Phi$  et  $\Psi$  constituent des isomorphismes d'espaces vectoriels.

## I.B Quelques exemples en dimension 3

### I.B.1 Premier exemple

**Q 9.** • Recherche des valeurs propres de  $A$  :

Observons que le polynôme caractéristique  $\chi_A$  est tel que

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} (\lambda + 1) & 0 & -2 \\ 0 & (\lambda + 1) & 0 \\ 1 & -1 & (\lambda - 2) \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 1)[(\lambda + 1)(\lambda - 2) + 2] \\ &= (\lambda + 1)[\lambda^2 - \lambda] \\ &= (\lambda + 1)\lambda(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Le spectre de  $A$  est donc constitué des trois valeurs propres  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 0$  et  $\lambda_3 = 1$ .

Puisque la matrice  $A$  est carrée de format  $(3 \times 3)$  et possède trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

• Détermination des sous-espaces propres associés à chaque valeur propre de  $A$  :

◊ Recherche de  $E_{\lambda_1}(A)$  :

Pour  $\lambda_1 = -1$ , on obtient en appliquant des opérations élémentaires aux lignes de  $(A - \lambda_1 I) = (A + I)$  :

$$(A - \lambda_1 I) = (A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en sorte que :

$$(A + I) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi :  $E_{\lambda_1}(A) = \text{Vect} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \text{Vect} [C^{(1)}]$ .

◊ Recherche de  $E_{\lambda_2}(A)$  :

Pour  $\lambda_2 = 0$ , des calculs similaires montrent que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}(A) \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \end{cases},$$

en sorte que  $E_{\lambda_2}(A) = \text{Vect} \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{Vect} [C^{(2)}]$ .

◊ Recherche de  $E_{\lambda_3}(A)$  :

Enfin dans le cas de la valeur propre  $\lambda_3 = 1$ , on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_3}(A) \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases},$$

en sorte que  $E_{\lambda_3}(A) = \text{Vect} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{Vect} [C^{(3)}]$ .

• Conclusion (diagonalisation explicite de A) :

en conclusion, on peut donc affirmer que  $A = P_1 D P_1^{-1}$  pour une matrice inversible  $P_1$  et une matrice diagonale  $D$  données par

$$P_1 = \begin{pmatrix} C^{(1)} & C^{(2)} & C^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Q 10.** Soit  $M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Puisque multiplier  $M'$  à gauche par  $D = \text{diag}(-1; 0; 1)$  revient à multiplier la 1ère ligne de  $M'$  par  $-1$  et la 2ème par 0 en laissant la 3ème inchangée, tandis que multiplier  $M'$  à droite par  $D$  revient à multiplier la 1ère colonne de  $M'$  par  $-1$  et la 2ème par 0 en laissant la 3ème inchangée, on aura

$$DM' = M'D \iff \begin{cases} -m_{1,2} = 0, -m_{1,3} = m_{1,3} \\ 0 = -m_{2,1}, 0 = m_{2,3} \\ m_{3,1} = -m_{3,1}, m_{3,2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m_{1,2} = m_{1,3} = 0 \\ m_{2,1} = m_{2,3} = 0 \\ m_{3,1} = m_{3,2} = 0 \end{cases} \iff \boxed{\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M' = \text{diag}(a, b, c)}$$

**Q 11.** D'après la question précédente,  $C_D$  est de dimension 3 et la famille

$$\mathcal{E}_D = \left( E_{1,1}^{(3)}, E_{2,2}^{(3)}, E_{3,3}^{(3)} \right)$$

forme une base de  $C_D$ .

**Q 12.** D'après la Q.5, l'application  $\Psi : C_D \rightarrow C_A$  définie par  $\Psi(M') = P_1 M' P_1^{-1}$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Dans ces conditions, on doit avoir  $\dim(C_A) = \dim(C_D) = 3$ , et en appliquant  $\Psi$  aux trois vecteurs de base de  $C_D$  on obtient une base de  $C_A$ .

Or, comme  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  :

$$P_1 E_{1,1}^{(3)} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_1$$

et de même :

$$P_1 E_{2,2}^{(3)} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = Q_2, \quad P_1 E_{3,3}^{(3)} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times P_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = Q_3$$

En conclusion,  $C_A$  est de dimension 3 et la famille  $\mathcal{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$  forme une base de  $C_A$ .

**I.B.2 Deuxième exemple**

**Q 13.** Puisqu'elle est symétrique, la matrice carrée réelle  $B$  est diagonalisable (et même *orthogonalement* diagonalisable) dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Observons que le polynôme caractéristique  $\chi_B$  est tel que

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 7 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 7 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & 1 \\ 0 & \lambda - 3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3)[(\lambda - 7)(\lambda - 4) - 4 - (\lambda - 7) - 4] \\ &= (\lambda - 3)[\lambda^2 - 12\lambda + 27] \\ &= \boxed{(\lambda - 3)^2(\lambda - 9)} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $B$  sont donc  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$  (double) ainsi que  $\lambda_3 = 9$ .

Identifions précisément le sous-espace propre associé à  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ ; en appliquant des opérations élémentaires aux lignes de  $(B - 3I)$ , on obtient :

$$(B - 3I) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi :  $E_3(B) = \text{Vect} \left[ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \text{Vect} [C^{(1)}, C^{(2)}]$ .

Enfin, comme  $B$  est symétrique,  $C^{(3)} = C^{(1)} \wedge C^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  fournit assurément un vecteur propre de  $B$  associé à son autre valeur propre  $\lambda_3 = 9$ .

En conclusion, la matrice  $B$  se diagonalise explicitement sous la forme  $B = P_2 \Delta P_2^{(-1)}$ , où

$$P_2 = \begin{pmatrix} C^{(1)} & C^{(2)} & C^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

**Q 14.** Observons que pour  $M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  quelconque, le produit  $\Delta M'$  change la matrice  $M'$  en multipliant ses deux 1ères lignes par  $\lambda_1 = 3$  et sa 3ème ligne par  $\lambda_3 = 9$ , tandis que le produit  $M' \Delta$  change la matrice  $M'$  en multipliant ses deux 1ères colonnes par  $\lambda_1 = 3$  et sa 3ème colonne par  $\lambda_3 = 9$ . Ainsi :

$$M' \in C_\Delta \iff \Delta M' = M' \Delta \iff \begin{cases} 3m_{1,3} = 9m_{1,3} \\ 3m_{2,3} = 9m_{2,3} \\ 9m_{3,1} = 3m_{3,1} \\ 9m_{3,2} = 3m_{3,2} \end{cases} \iff m_{1,3} = m_{2,3} = m_{3,1} = m_{3,2} = 0$$

En conclusion, on a bien

$$M' \in C_\Delta \iff \exists (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5, M' = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

**Q 15.** D'après la question précédente, la famille

$$\mathcal{E}_\Delta = \left( E_{1,1}^{(3)}, E_{1,2}^{(3)}, E_{2,1}^{(3)}, E_{2,2}^{(3)}, E_{3,3}^{(3)} \right)$$

constitue une base de  $C_\Delta$ , qui est donc de dimension 5.

D'après la question **Q8**, il en résulte que  $C_B$  est lui aussi de dimension 5 et que

$$\tilde{\mathcal{E}}_B = \left( \Psi(E_{1,1}^{(3)}), \Psi(E_{1,2}^{(3)}), \Psi(E_{2,1}^{(3)}), \Psi(E_{2,2}^{(3)}), \Psi(E_{3,3}^{(3)}) \right) = \left( (P_2 E_{1,1}^{(3)} P_2^{-1}), (P_2 E_{1,2}^{(3)} P_2^{-1}), (P_2 E_{2,1}^{(3)} P_2^{-1}), (P_2 E_{2,2}^{(3)} P_2^{-1}), (P_2 E_{3,3}^{(3)} P_2^{-1}) \right)$$

forme une base de  $C_B$ .

### I.B.3 Troisième exemple

**Q 16.** On développe par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} \chi_G(\lambda) = \det(\lambda I_3 - G) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda^2 - 3) + 2 \end{aligned}$$

Donc  $\chi_G(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2$ .

Ce polynôme a une racine évidente :  $\chi_G(1) = 0$ . Elle est double car  $\chi'_G(\lambda) = 3\lambda^2 - 3$  s'annule en 1.

On factorise donc par  $(\lambda - 1)^2$  :  $\chi_G(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$ . Les valeurs propres de  $G$  sont donc 1 et -2.

Cherchons les sous-espaces propres :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Donc  $E_1 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = 4x \end{cases}$$

Donc  $E_{-2} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ .

**Q 17.** Le polynôme caractéristique de  $G$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , donc  $G$  est trigonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

La multiplicité de 1 vaut 2, mais son sous-espace propre est de dimension 1, donc  $G$  n'est pas diagonalisable.

**Q 18.** Les vecteurs  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  trouvés dans la question 16 conviennent.

**Q 19.** On pose  $w = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et on résout le système :

$$(g - Id_{\mathbb{R}^3})(w) = v \iff \begin{cases} y = 1 \\ -y + z = 1 \\ 3y - z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Donc  $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Q 20.** Posons  $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  la matrice dont les vecteurs colonnes sont  $u, v$  et  $w$ . Vérifions que  $P_3$  est inversible avec le pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Le matrice  $P_3$  est de rang 3, donc elle est inversible. En particulier,  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
De plus,  $P_3$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{B}'$ . D'après la formule de changement de bases,

$$P_3^{-1} \text{Mat}_{\text{can}}(g) P_3 = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = T$$

Or, d'après les questions 18 et 19, la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a bien alors :  $G = P_3 T P_3^{-1}$ .

**Q 21. Attention :** Il y a une erreur d'énoncé! En effet, la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ne commute pas avec  $T$ .

Soit  $M' = \begin{pmatrix} a & f & g \\ h & b & c \\ i & d & e \end{pmatrix}$ . Calculons :

$$T M' - M' T = \begin{pmatrix} -2a & -2f & -2g \\ h+i & b+d & c+e \\ i & d & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2a & f & f+g \\ -2h & b & b+c \\ -2i & d & d+e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3f & -3g \\ 3h+i & d & e-b \\ 3i & 0 & -d \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$M' \in C_T \iff \begin{cases} -3f = 0 \\ -3g = 0 \\ 3h+i = 0 \\ d = 0 \\ e-b = 0 \\ 3i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = f = g = h = i = 0 \\ e = b \end{cases} \iff M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Ainsi,  $M'$  est dans  $C_T$  si et seulement s'il existe trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ .

**Q 22.** Une base de  $C_T$  est donc  $\mathcal{F}' = (E_{1,1}^{(3)}, E_{2,2}^{(3)} + E_{3,3}^{(3)}, E_{2,3}^{(3)})$ .

D'après la question 8, la famille  $\mathcal{F} = (P_3 E_{1,1}^{(3)} P_3^{-1}, P_3 (E_{2,2}^{(3)} + E_{3,3}^{(3)}) P_3^{-1}, P_3 E_{2,3}^{(3)} P_3^{-1})$  est une base de  $C_G$ . En utilisant le pivot de Gauss, on trouve

$$P_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{9}{2} & \frac{9}{1} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ainsi, la base cherchée est (en utilisant la calculatrice!) :

$$\mathcal{F} = \left( \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right)$$

**I.C Commutant d'une matrice d'ordre  $n$  ayant  $n$  valeurs propres distinctes**

**Q 23.** Comme  $A$  a  $n$  valeurs propres distinctes, son polynôme caractéristique admet  $n$  racines simples. Comme il est de degré  $n$ , il est scindé et toutes ses racines sont simples. Ainsi,  $A$  est diagonalisable. Il existe donc  $P_4 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible telle que  $A = P_4 D P_4^{-1}$ , où  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

**Q 24.** Prenons  $\Pi = \sum_{k=0}^m a_k X^k$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ .

$$\begin{aligned} \Pi(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) &= \sum_{k=0}^m a_k \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^k \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \\ &= \sum_{k=0}^m \text{diag}(a_k \lambda_1^k, \dots, a_k \lambda_n^k) \\ &= \text{diag}\left(\sum_{k=0}^m a_k \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^m a_k \lambda_n^k\right) \\ &= \text{diag}(\Pi(\lambda_1), \dots, \Pi(\lambda_n)) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout polynôme  $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ ,

$$\Pi(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(\Pi(\lambda_1), \dots, \Pi(\lambda_n))$$

**Q 25.** Soit  $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \Theta(\mu P + Q) &= ((\mu P + Q)(\lambda_1), \dots, (\mu P + Q)(\lambda_n)) \\ &= (\mu P(\lambda_1) + Q(\lambda_1), \dots, \mu P(\lambda_n) + Q(\lambda_n)) \\ &= \mu(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) + (Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) \\ &= \mu\Theta(P) + \Theta(Q) \end{aligned}$$

Donc  $\Theta$  est linéaire.

Soit  $\Pi \in \ker(\Theta)$ . Alors  $\Pi(\lambda_1) = \dots = \Pi(\lambda_n)$ , donc  $\Pi$  a au moins  $n$  racines distinctes. Comme le degré de  $\Pi$  est inférieur ou égal à  $n - 1$ ,  $\Pi$  est le polynôme nul.

Donc  $\ker(\Theta) = \{0\}$  : l'application  $\Theta$  est injective.

**Q 26.** Comme  $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n$ , l'application  $\Theta$  est un isomorphisme : pour tout  $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ , il existe un unique  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que  $\Theta(Q) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ , donc :

$$\forall i \in [1, n], \quad Q(\lambda_i) = \mu_i.$$

**Q 27.** Prenons  $(i, j) \in [1, n]^2$ .

$$[M'D]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [M']_{i,k} [D]_{k,j} = [M']_{i,j} [D]_{j,j} = \lambda_j [M']_{i,j}$$

car les seuls coefficients de  $D$  qui sont non nuls sont sur la diagonale. De même,

$$[DM']_{i,j} = \sum_{k=1}^n [D]_{i,k} [M']_{k,j} = [D]_{i,i} [M']_{i,j} = \lambda_i [M']_{i,j}$$

Donc

$$[M'D]_{i,j} = \lambda_j [M']_{i,j} \quad \text{et} \quad [DM']_{i,j} = \lambda_i [M']_{i,j}$$

**Q 28.** D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} M' \in C_D &\iff \forall (i, j) \in [1, n]^2, \quad [M'D]_{i,j} = [DM']_{i,j} \\ &\iff \forall (i, j) \in [1, n]^2, \quad [M]_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j) = 0 \\ &\iff \forall (i, j) \in [1, n]^2, \quad i \neq j \Rightarrow [M]_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

car tous les  $\lambda_i$  sont distincts. Ainsi, on a bien :

$$M' \in C_D \iff M \text{ est diagonale}$$

**Q 29.** Une base de l'espace des matrices diagonales, donc de  $C_D$  est

$$\mathcal{B}' = (E_{1,1}^{(n)}, E_{2,2}^{(n)}, \dots, E_{n,n}^{(n)})$$

En effet, cette famille est libre car c'est une sous-famille d'une base, et elle est génératrice car pour tout  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ ,  $\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \mu_1 E_{1,1}^{(n)} + \dots + \mu_n E_{n,n}^{(n)}$ .

En utilisant la question 8, une base de  $C_A$  est donc

$$\mathcal{B} = (P_4 E_{1,1}^{(n)} P_4^{-1}, P_4 E_{2,2}^{(n)} P_4^{-1}, \dots, P_4 E_{n,n}^{(n)} P_4^{-1})$$

**Q 30.** D'après la question précédente,  $\dim C_A = n$ . Ceci correspond au résultat trouvé question 12 car dans cette question, on a  $n = 3$  et la matrice  $A$  a 3 valeurs propres distinctes.

**Q 31.** D'après la question 8, la matrice  $M'$  est dans  $C_D$ . D'après la question 28, il existe  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$  tels que  $M' = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ .

D'après la question 26, il existe  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que  $\forall i \in [1, n], Q(\lambda_i) = \mu_i$ .

D'après la question 24,

$$M = \text{diag}(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) = Q(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = Q(D)$$

**Q 32.** Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que  $(P_4 D P_4^{-1})^n = P_4 D^n P_4^{-1}$ .

— Initialisation : pour  $n = 0$ , on a  $(P_4 D P_4^{-1})^0 = I_n$  et  $P_4 D^0 P_4^{-1} = P_4 P_4^{-1} = I_n$ , donc la formule est vraie au rang 0.

— Hérédité : prenons  $n \geq 0$  et supposons que  $(P_4 D P_4^{-1})^n = P_4 D^n P_4^{-1}$ .

Alors

$$\begin{aligned} (P_4 D P_4^{-1})^{n+1} &= P_4 D P_4^{-1} (P_4 D P_4^{-1})^n \\ &= P_4 D P_4^{-1} P_4 D^n P_4^{-1} \quad \text{d'après l'HR} \\ &= P_4 D D^n P_4^{-1} \\ &= P_4 D^{n+1} P_4^{-1} \end{aligned}$$

La formule est vérifiée au rang  $n + 1$ .

D'après le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(P_4 D P_4^{-1})^n = P_4 D^n P_4^{-1}$ .

Prenons maintenant  $\Pi = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ .

$$\begin{aligned} \Pi(P_4 D P_4^{-1}) &= \sum_{k=0}^m a_k (P_4 D P_4^{-1})^k \\ &= \sum_{k=0}^m a_k P_4 D^k P_4^{-1} \quad \text{d'après la récurrence} \\ &= P_4 \left( \sum_{k=0}^m a_k D^k \right) P_4^{-1} \end{aligned}$$

en factorisant à gauche par  $P_4$  et à droite par  $P_4^{-1}$ . Donc  $P_i(P_4 D P_4^{-1}) = P_4 \Pi(D) P_4^{-1}$ .

**Q 33.** Comme  $M' = P_4^{-1} M P_4$ , on a  $M = P_4 M' P_4^{-1}$ .

En utilisant les deux questions précédentes, on a :

$$M = P_4 M' P_4^{-1} = P_4 Q(D) P_4^{-1} = Q(P_4 D P_4^{-1})$$

Donc  $M = Q(A)$ .

**I.D Commutant d'une matrice diagonalisable ayant deux valeurs propres**

**Q 34.** Soit  $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et soit les matrices  $M'_{11} \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R})$ ,  $M'_{12} \in \mathcal{M}_{n_1, n_2}(\mathbb{R})$ ,  $M_{21} \in \mathcal{M}_{n_2, n_1}(\mathbb{R})$  et  $M'_{22} \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$  telles que :

$$M' = \left( \begin{array}{c|c} M'_{11} & M'_{12} \\ \hline M'_{21} & M'_{22} \end{array} \right). \text{ On a alors :}$$

$$\begin{aligned} DM' = M'D &\iff \left( \begin{array}{c|c} \lambda_1 I_{n_1} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 I_{n_2} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} M'_{11} & M'_{12} \\ \hline M'_{21} & M'_{22} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} M'_{11} & M'_{12} \\ \hline M'_{21} & M'_{22} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} \lambda_1 I_{n_1} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 I_{n_2} \end{array} \right) \\ &\iff \left( \begin{array}{c|c} \lambda_1 M'_{11} & \lambda_2 M'_{12} \\ \hline \lambda_1 M'_{21} & \lambda_2 M'_{22} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \lambda_1 M'_{11} & \lambda_1 M'_{12} \\ \hline \lambda_2 M'_{21} & \lambda_2 M'_{22} \end{array} \right) \\ &\iff \left( \begin{array}{c|c} 0 & (\lambda_2 - \lambda_1) M'_{12} \\ \hline (\lambda_1 - \lambda_2) M'_{21} & 0 \end{array} \right) = 0 \\ &\iff M'_{12} = M'_{21} = 0 \end{aligned}$$

Puisque  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , on a donc bien :

$$M' \in C_D \iff \exists M'_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \text{ et } M'_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R}) \text{ telles que } M' = \left( \begin{array}{c|c} M'_1 & 0 \\ \hline 0 & M'_2 \end{array} \right)$$

**Q 35.**

$$\begin{aligned} M \in C_A &\iff AM = MA \\ &\iff (P_5 D P_5^{-1}) M = M (P_5 D P_5^{-1}) \\ &\iff (P_5 D P_5^{-1}) (P_5 M' P_5^{-1}) = (P_5 M' P_5^{-1}) (P_5 D P_5^{-1}) \\ &\iff P_5 D M' P_5^{-1} = P_5 M' D P_5^{-1} \\ &\iff DM' = M'D \text{ (en multipliant à droite par } P_5 \text{ et à gauche par } P_5^{-1}) \\ &\iff M' \in C_D \end{aligned}$$

Montrons que  $C_D$  est isomorphe à  $\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$ .

Soit  $\varphi : \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R}) \rightarrow C_D$  telle que  $\varphi(M'_1, M'_2) = \left( \begin{array}{c|c} M'_1 & 0 \\ \hline 0 & M'_2 \end{array} \right)$ .

$\varphi$  est linéaire et d'après ce qui précède,  $\varphi$  est surjective. On montre facilement que  $\varphi(M'_1, M'_2) = 0 \implies M'_1 = 0$  et  $M'_2 = 0$  donc  $\varphi$  est injective. Ainsi,  $\text{Dim } C_D = \text{Dim}(\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})) = \text{Dim}(\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R})) + \text{Dim}(\mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})) = n_1^2 + n_2^2$ .  
L'application linéaire de  $C_A$  dans  $C_D$  qui à  $M$  associe  $M' = P_5^{-1} M P_5$  est également un isomorphisme d'espace vectoriel (démonstration laissée au lecteur) donc finalement on a

$$\text{Dim } C_A = \text{Dim } C_B = n_1^2 + n_2^2$$

A la question **Q15.**, on a montré que  $\text{Dim } C_B = 5$  et on avait  $n_1 = 2$  et  $n_2 = 1$  et donc  $n_1^2 + n_2^2 = 5$ .

Le résultat de cette question est cohérent avec celui de la question **Q15.**

**II Suites récurrentes linéaires d'ordre 3**

**II.A Étude du cas particulier  $a = 0$**

**Q 36.** On a  $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ .

On a donc  $U_{n+1} = G \cdot U_n$  et par récurrence immédiate,  $U_n = G^n U_0$

**Q 37.** On a  $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D + N$  en posant  $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Pour  $n = 0$ , on a  $T^0 = I_3$  et pour  $n = 1$ , on a  $T^1 = T$ .

Soit  $n \geq 2$  : on montre facilement que  $N$  et  $D$  commutent, on peut utiliser le binôme de Newton :

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$$

On montre facilement que  $N^2 = 0$  donc pour tout entier  $k \geq 2$ ,  $N^k = 0$  :

$$T^n = \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} = D^n + nND^{n-1}$$

$$T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que cette formule est également valable pour  $n = 0$  et  $n = 1$  donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Q 38.** On pose  $T = T_1 + T_2 + T_3$  avec  $T_1 = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D'après la question **Q 36.**, on a, pour tout entier  $n$ ,  $U_n = T^n U_0$

Donc  $U_n = P_3 (T_1 + T_2 + T_3) P_3^{-1} U_0 = P_3 T_1 P_3^{-1} U_0 + P_3 T_2 P_3^{-1} U_0 + P_3 T_3 P_3^{-1} U_0$

Le premier terme de cette somme est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  dans lequel on peut factoriser par  $2^n$ , le deuxième un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  dans lequel on peut factoriser par  $n$ .

On a donc  $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Pour tout entier  $n$ ,  $u_n$  est donc une combinaison linéaire de  $(-2)^n$ ,  $n$  et 1

**Q 39.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que pour tout entier  $n$ , on a  $u_n = \alpha(-2)^n + \beta n + \gamma$ .

$$\begin{aligned} 3u_{n+1} + 2u_n &= 3\alpha(-2)^{n+1} + 3\beta(n+1) + 3\gamma - 2\alpha(-2)^n - 2\beta n - 2\gamma \\ &= \alpha(-2)^n (3 \times (-2) + 2) + \beta(3n + 3 - 2n) + \gamma \\ &= 3\alpha(-2)^{n+3} + \beta(n+3) + \gamma \\ &= u_{n+3} \end{aligned}$$

Toute combinaison linéaire des trois suites précédentes vérifie donc la relation de récurrence II.1.

## II.B Étude du cas général

**Q 40.**  $\varphi$  est clairement linéaire.

Montrons que  $\varphi$  est surjective : soit  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ . Alors la suite définie par  $u_0 = \alpha$ ,  $u_1 = \beta$  et  $u_2 = \gamma$  et pour tout entier  $n$ ,

$u_{n+3} = au_{n+2} + (a+3)u_{n+1} - 2(a+1)u_n$  appartient à  $F$  et a pour image  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  par  $\varphi$  : donc  $\varphi$  est surjective.

Montrons que  $\varphi$  est injective : Soit  $u$  une suite de  $F$  telle que  $\varphi(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Montrons par récurrence forte sur  $\mathbb{N}$  que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = 0$ .

— Initialisation : pour  $n = 0$ ,  $n = 1$  et  $n = 2$  on a  $u_n = 0$  puisque  $\varphi(u) = 0$

— Hérédité : prenons  $n \geq 0$  et supposons que  $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = 0$

On a alors  $u_{n+3} = au_{n+2} + (a+3)u_{n+1} - 2(a+1)u_n = 0$

La propriété est vérifiée au rang  $n+3$ .

D'après le principe de récurrence forte, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = 0$  donc  $u = 0$  et  $\varphi$  est injective.

$\varphi$  est un isomorphisme et  $\text{Dim } F = \text{Dim } \mathbb{R}^3 = 3$

**Q 41.**  $\varphi$  étant un isomorphisme de  $F$  dans  $\mathbb{R}^3$ , la famille  $\{u, v, w\}$  est une base de  $F$  si et seulement si la famille  $\{\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Cette famille est une famille de trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  donc c'est une base si et seulement si elle est libre si et seulement

si son déterminant est non nul.

On a donc :  $\{u, v, w\}$  est une base de  $F$  si et seulement si  $\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} \neq 0$

**Q 42.** Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . Pour tout entier  $n$ , on pose  $u_n = x^n$ .

$$\begin{aligned} u \in F &\iff \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+3} = ax^{n+2} + (a+3)x^{n+1} + 2(a+1)x^n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, x^n (x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1)) = 0 \\ &\iff x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1) = 0 \text{ puisque } x \neq 0 \end{aligned}$$

On a bien  $u \in F \iff x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1) = 0$

**Q 43.** On a  $1^3 - a \times 1^2 - (a+3) \times 1 + 2(a+1) = 1 - a - a - 3 + 2a + 2 = 0$  donc  $1$  est racine de  $C$

On en déduit que  $C$  est factorisable par  $x - 1$ .

On cherche donc trois réels  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tels que  $x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1) = (x-1)(ax^2 + \beta x + \gamma)$   
 $(x-1)(ax^2 + \beta x + \gamma) = ax^3 + (\beta - a)x^2 + (\gamma - \beta)x - \gamma$ .

On a donc le système suivant :  $\begin{cases} \alpha &= 1 \\ \beta - \alpha &= -a \\ \gamma - \beta &= -(a+3) \\ -\gamma &= 2(a+1) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= 1 \\ \beta &= 1 - a \\ \gamma &= -2(a+1) \end{cases}$

On a donc  $x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1) = (x-1)(x^2 + (1-a)x - 2(a+1))$ . On cherche les racines du polynôme  $x^2 + (1-a)x - 2(a+1)$  : on a  $\Delta = (1-a)^2 + 8(a+1) = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2 \geq 0$  donc ces racines sont réelles.

Donc  $1$  les racines de  $C$  sont réelles

**Q 44.** D'après la question précédente, si  $a \neq -3$  alors le discriminant du polynôme  $x^2 + (1-a)x - 2(a+1)$  est strictement positif et donc ce polynôme admet deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ .

Le produit de ces deux racines est égal à  $-2(a+1)$  et leur somme est égale à  $(1-a)$ .

Supposons que l'une de ces racines soit égale à  $1$  : leur produit étant égal à  $-2(a+1)$  alors la seconde est égale à  $-2(a+1)$ , et dans ce cas la somme de ces deux racines est égale à  $-2a+1$ . On doit donc avoir  $-2a+1 = 1-a$  soit  $a=0$ , ce qui est exclu.

Donc  $C$  admet deux racines distinctes autres que  $1$

D'après la question **Q41.**, les trois suites  $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(r_1)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(r_2)_{n \in \mathbb{N}}$  forment une base de  $F$  si et seulement si

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_1 & r_2 \\ 1 & r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix} \neq 0$ . On reconnaît un déterminant de Vandermonde égal à  $(r_1 - 1)(r_2 - 1)(r_2 - r_1)$  qui est bien non nul

puisque  $r_1$  et  $r_2$  sont des réels distincts et tous deux différents de  $1$ .

Donc  $1$  les trois suites  $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(r_1)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(r_2)_{n \in \mathbb{N}}$  forment une base de  $F$

**Q 45.** Si  $a = -3$  alors le polynôme  $x^2 + (1-a)x - 2(a+1)$  s'écrit  $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$  qui admet une racine double égale à  $-2$ .

Donc  $1$  Si  $a = -3$ , l'équation (II.2) admet une racine simple égale à  $1$  et une racine double égale à  $-2$

**Q 46.** Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . On pose, pour tout entier  $n$ ,  $v_n = nx^n$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  : d'une part, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+3} - av_{n+2} - (a+3)v_{n+1} + 2(a+1)v_n &= (n+3)x^{n+3} - a(n+2)x^{n+2} - (a+3)(n+1)x^{n+1} + 2n(a+1)x^n \\ &= x^n ((n+3)x^3 - a(n+2)x^2 - (a+3)(n+1)x + 2n(a+1)) \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} x^n (nC(x) + xC'(x)) &= x^n [n(x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1)) + x(3x^2 - 2ax - (a+3))] \\ &= x^n (nx^3 - nax^2 - n(a+3)x + 2n(a+1) + 3x^3 - 2ax^2 - (a+3)x) \\ &= x^n ((n+3)x^3 - a(n+2)x^2 - (a+3)(n+1)x + 2n(a+1)) \end{aligned}$$

Donc on a bien :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+3} - av_{n+2} - (a+3)v_{n+1} + 2(a+1)v_n = x^n (nC(x) + xC'(x))$

**Q 47.** Si  $a = -3$  et en utilisant la notation précédente, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+3} - av_{n+2} - (a+3)v_{n+1} + 2(a+1)v_n &= (-2)^n (nC(-2) - 2C'(-2)) \\ &= 0 \text{ puisque } -2 \text{ est racine double de } C \text{ donc } C(-2) = C'(-2) = 0 \end{aligned}$$

Donc  $\boxed{\text{si } a = -3, \text{ la suite } (n(-2)^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est un élément de } F}$

Montrons que la famille  $\{(1)_{n \in \mathbb{N}}, ((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n(-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$  est une base de  $F$  :

On utilise la question **Q41**. :  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$ .

Donc  $\boxed{\text{la famille } \{(1)_{n \in \mathbb{N}}, ((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n(-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}\} \text{ est une base de } F}$

**Q 48.** On reconnaît l'équation qui définit  $F$  avec  $a = -3$ .

D'après la question précédente, on sait qu'il existe trois réels  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tels que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha + \beta(-2)^n + \gamma n(-2)^n$

Or, on a  $u_0 = 1, u_1 = 0$  et  $u_2 = 1$  donc on a le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = & 1 \\ \alpha - 2\beta - 2\gamma & = & 0 \\ \alpha + 4\beta + 8\gamma & = & 1 \end{cases} \text{ On résout le système et on trouve : } \begin{cases} \alpha & = & \frac{5}{9} \\ \beta & = & \frac{4}{9} \\ \gamma & = & -\frac{1}{6} \end{cases}$$

On a donc :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{5}{9} + \frac{4}{9}(-2)^n - \frac{1}{6}n(-2)^n}$

