Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en classe de MPSI et trouve des applications dans d'autres domaines du programme.

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont de deux types, qu'il convient de souligner : les premières, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les secondes, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

On se limite en pratique au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Matrices semblables, interprétation géométrique.	Les étudiants doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace F par un endomorphisme u à l'aide de la matrice de u dans une base adaptée à F.
b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.	⇆ SI : matrice d'inductance : inductance cyclique et inductance homopolaire.
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.	La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n.	
Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.	
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.
c) Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_u, χ_A. Les étudiants doivent connaître les valeurs des coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre.	La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.
Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.	
d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Contenus	Capacités & Commentaires
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E.	Cas des projecteurs, des symétries.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.	
Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.	Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.	Traduction matricielle.
Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.

e) Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.	Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.	La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas $n = 2$ et à des cas particuliers simples pour $n = 3$.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres. ⇆ I : recherche de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux itérées successives.

f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.	
Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.	
L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	

g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.	Pour M dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de M, sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda\, x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\, x$.
Théorème de Cayley-Hamilton.	Démonstration non exigible.

h) Lemme de décomposition des noyaux

Contenus	Capacités & commentaires
Si $P_1, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors : $$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_i(u)).$$	

i) Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Contenus	Capacités & commentaires
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.	Traduction matricielle.

j) Endomorphismes à polynôme minimal scindé

Contenus	Capacités & commentaires
S'il existe un polynôme scindé annulant u, décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.	Traduction matricielle. La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont hors programme.