

À propos de la purification de l'eau du circuit primaire dans une centrale nucléaire

I Le plutonium dans le combustible nucléaire MOX

I.A - Présentation du plutonium

Q 1. Le nombre quantique principal le plus élevé présent dans la configuration électronique du plutonium est 7, il se trouve donc à la 7^e période de la classification.

De plus, une sous-couche f est partiellement remplie (elle possède 14 états électroniques), on peut donc affirmer qu'il appartient au bloc f , c'est donc un **actinide**.

Ses électrons de valence sont ceux situés sur les sous-couches $5f$ et $7s$, il en possède donc 8. Les autres sont ses électrons de cœur.

Q 2. La sous-couche f étant partiellement remplie à l'état fondamental, le plutonium possède des électrons célibataires, au nombre de 6.

Les quadruplets possibles pour les électrons célibataires sont ceux caractérisant les niveaux d'énergie de la sous-couche $7f$. On peut citer $(5,3,-3,-1/2)$ et plus généralement :

$$(5, 3, x, y) \quad \text{avec } (x, y) \in \llbracket -3; 3 \rrbracket \times \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$$

I.B - Oxyde de plutonium

Q 3. Considérons la structure A : il s'agit d'une structure cubique à faces centrées formée par les motifs en gris et dont les sites tétraédriques sont occupés par les motifs en bleu.

8 motifs bleus sont présents totalement en propre dans la maille.

Concernant les gris, 8 motifs sont présents aux sommets et comptent pour $1/8$ et 6 sont présents aux centres des faces et comptent pour $1/2$: ce qui donne un total de 4 motifs gris en propre dans la maille.

Considérons la structure B : il s'agit d'une structure cubique à faces centrées formée par les motifs en rouge et dont les sites octaédriques sont occupés par les motifs en blanc.

Le même raisonnement que plus haut donne 4 motifs rouges en propre dans la maille.

Concernant les blancs, 12 motifs sont présents au centre des arêtes de la maille et comptent pour $1/4$ et 1 est présent au centre du cube et compte pour 1 : ce qui donne un total de 4 motifs blancs en propre dans la maille.

Pour assurer l'électroneutralité de la structure, elle doit rassembler 2 ions O^{2-} pour un ion Pu^{4+} . Or, la structure B contient autant de motifs rouges que blancs, elle ne peut décrire la structure microscopique de l'oxyde de plutonium. La structure A convient.

On peut aussi en déduire la formule de l'oxyde : PuO_2 .

Par maille, il y a donc $N_{Pu} = 4$ motifs d'ions Pu^{4+} et $N_O = 8$ motifs d'ions O^{2-} .

Q 4. Pour un cation (cubique faces centrées) les plus proches voisins sont les sites tétraédriques et sont au nombre de 8 comme le montre la figure 2.

Pour un anion (sites tétraédriques), les plus proches voisins sont les sommets du tétraèdre régulier, au centre duquel l'ion est placé, qui sont au nombre de 4.

La structure possède donc une coordinence (cation,anion) de $(8,4)$.

Q 5. La masse volumique de l'oxyde est égale à celle de la maille, on en déduit donc :

$$\rho_{PuO_2} = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} \quad \text{avec } m_{\text{maille}} = \frac{N_O M(O) + N_{Pu} M(Pu)}{\mathcal{N}_A} \quad \text{et } V_{\text{maille}} = a^3$$

où a est le paramètre de maille, m_{maille} et V_{maille} sont respectivement la masse et le volume de la maille.

Les anions et cations sont tangents sur la grande diagonale du cube de côté $a/2$ mis en évidence sur le schéma de la figure 2. Cette grande diagonale a une longueur de $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, on a donc l'égalité suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = 2 [R(\text{O}^{2-}) + R(\text{Pu}^{4+})] \quad \text{soit} \quad R(\text{Pu}^{4+}) = \frac{\sqrt{3}}{4}a - R(\text{O}^{2-})$$

Or, en utilisant l'expression de la masse volumique, on en déduit :

$$a = \sqrt[3]{\frac{N_{\text{O}}M(\text{O}) + N_{\text{Pu}}M(\text{Pu})}{\mathcal{N}_A \rho_{\text{PuO}_2}}} \quad \text{soit} \quad \boxed{R(\text{Pu}^{4+}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt[3]{\frac{N_{\text{O}}M(\text{O}) + N_{\text{Pu}}M(\text{Pu})}{\mathcal{N}_A \rho_{\text{PuO}_2}}} - R(\text{O}^{2-})}$$

L'application numérique donne :

$$\boxed{R(\text{Pu}^{4+}) = 95 \text{ pm}}$$

On obtient donc une valeur théorique un peu supérieure à celle donnée dans la littérature. Le résultat de notre calcul n'est pas strictement le rayon ionique du plutonium mais bien le rayon maximal d'une sphère qu'on peut placer en ces nœuds qui est un peu plus grande que le rayon ionique du plutonium. Cela remet en cause l'hypothèse de tangence cation-anion.

Q 6. La compacité de la structure est donnée par :

$$c = \frac{V_{\text{occupé}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{N_{\text{O}} \frac{4}{3} \pi R(\text{O}^{2-})^3 + N_{\text{Pu}} \frac{4}{3} \pi R(\text{Pu}^{4+})^3}{a^3}$$

où $V_{\text{occupé}}$ est le volume occupé par l'ensemble des motifs présents en propre dans la maille.

On obtient numériquement, en utilisant la valeur de la littérature : $c = 64\%$. La structure est moins compacte qu'une structure cubique à faces centrées composée d'atomes identiques.

II Les résines échangeuses d'ions et la purification de l'eau

II.A - Synthèse des REI

Q 7. La figure 4 nous donne l'évolution de la constante d'équilibre en fonction de l'inverse de la température. On remarque que l'évolution du logarithme de K° est affine :

$$\log K^\circ = \frac{a}{T} + b$$

Pour obtenir les valeurs de a et b , utilisons deux points extrêmes. On lit :

$$\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{T} (\text{K}^{-1}) & 0,001 & 0,0025 \\ \hline K^\circ & 7 \cdot 10^{-1} & 4 \cdot 10^{-10} \end{array}$$

On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} \log K_1^\circ = \frac{a}{T_1} + b \\ \log K_2^\circ = \frac{a}{T_2} + b \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = -6,2 \cdot 10^3 \text{ K} \\ b = 6,0 \end{cases} \quad \text{graphiquement}$$

Or, on sait que $\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ$ et $\log K^\circ = \ln K^\circ / \ln(10)$, on en déduit donc que :

$$\Delta_r G^\circ = -RT \left[\ln(10) \times \left(\frac{a}{T} + b \right) \right] \quad \text{soit} \quad \Delta_r G^\circ = -R \ln(10) a - RT \ln(10) b$$

Or, par définition de l'enthalpie libre : $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$.

On identifie ainsi :

$$\begin{cases} \Delta_r H^\circ = -R \ln(10) a \\ \Delta_r S^\circ = R \ln(10) b \end{cases} \quad \text{soit, numériquement} \quad \begin{cases} \Delta_r H^\circ = 118 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r S^\circ = 115 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases}$$

L'enthalpie standard de réaction est positive, la réaction est donc endothermique.

La réaction s'effectue en phase gazeuse et on remarque, grâce aux coefficients stœchiométriques, que la quantité de matière d'espèces augmente, c'est donc cohérent que l'entropie standard de réaction soit positive.

Q 8. La quantité de matière d'espèces gazeuse augmente, on en déduit qu'une augmentation de pression à température constante déplace l'équilibre dans le sens indirect.

Q 9. D'après la loi de Van't Hoff :

$$\frac{d \ln K^\circ(T)}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$$

on remarque que lorsque la réaction est endothermique, une augmentation de température à pression constante s'accompagne d'une évolution dans le sens direct.

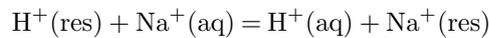
Q 10. Les conditions de température et de pression sont choisies de manière à disposer d'éthylbenzène et de styrène sous forme gazeuse. De plus, la valeur de température est plutôt élevée tandis que celle de la pression est basse afin de favoriser le plus possible la réaction dans le sens direct comme en attestent les conclusions des questions précédentes, on augmente ainsi le rendement de la synthèse.

L'ajout d'un catalyseur permet d'optimiser la cinétique de la réaction.

Enfin, le travail avec un excès de vapeur d'eau peut permettre de rendre à peu près constante la quantité de matière totale de gaz présent dans le réacteur et, ainsi, d'avoir un contrôle plus efficace de la pression et de la température du milieu réactionnel¹.

II.B - Détermination de la capacité d'échange d'une résine

Q 11. L'équation-bilan traduisant l'échange des ions H^+ sur la résine s'écrit :



Q 12. La réaction support du titrage est :



Q 13. Le prélèvement de la masse de résine doit se faire à la balance.

Le prélèvement du volume V_0 est effectué à l'aide d'une pipette jaugée de 50 mL (une fiole jaugée de 50 mL pourrait convenir mais est un tout petit peu moins précise).

Il faut également utiliser une burette graduée de 25 mL (plus fréquentes dans les laboratoires de lycée mais il serait plus précis de travailler avec 10 mL).

La mesure du pH au cours du titrage est menée à l'aide d'une cellule pH-métrique (Capteur 3).

Les trois autres capteurs sont :

- Capteur 1 : cellule conductimétrique - Mesure de la conductivité de la solution
- Capteur 2 : électrode au calomel saturé - Électrode de référence pour la potentiométrie
- Capteur 4 : électrode de platine - Électrode de mesure de potentiel d'une solution. On peut la placer en parallèle d'une ECS par exemple.

Q 14. Après agitation, on prélève un volume $V_0 = V/2$ de solution. Il reste donc une quantité de matière $n_{OH^- r}/2$ de soude dans l'échantillon à titrer.

Or, on sait qu'à l'équivalence, les réactifs de la réaction support ont été apportés en proportions stœchiométriques, on en déduit donc :

$$\frac{n_{OH^- r}}{2} = C_1 V_{eq} \quad \text{d'où} \quad \boxed{n_{OH^- r} = 2C_1 V_{eq}}$$

L'application numérique donne :

$$\boxed{n_{OH^- r} = 1,34 \cdot 10^{-3} \text{ mol}}$$

Q 15. Lors d'un titrage, on procède à un évaluation des incertitudes de type B. En effet, on ne procède pas à une répétition du protocole à l'identique à plusieurs reprises pour estimer la dispersion des valeurs du mesurande, ce qui correspondrait à des incertitudes de type A.

Ici, on cherche à estimer une incertitude-type en analysant nos méthodes expérimentales et en utilisant les données constructeur.

À priori, on peut citer la source donnée dans l'énoncé : l'imprécision donnée par le constructeur sur la mesure à la pipette. On peut également citer comme sources d'incertitude :

1. Je n'ai pas vu d'autre utilité de réaliser cette solution gazeuse...

- Le volume d'une goutte versée par la pipette, donnant une incertitude sur la valeur du volume rentrée dans le logiciel de tracé de la courbe de pH
- La tolérance de la burette donnée par le constructeur
- La précision de la méthode employée pour déterminer la valeur du volume équivalent.

Q 16. Le résultat sur n_{OH^-} est donné par :

$$n_{\text{OH}^-} = (134 \pm 2) \times 10^{-5} \text{ mol}$$

L'incertitude-type correspondant à un niveau de confiance à 68%.

Q 17. Dans le volume V initial, une quantité de matière $n = CV$ d'ions hydroxyde est présente.

Après échange, une quantité $CE \times m$ d'ions H^+ est passée en solution. La réaction avec les ions hydroxyde étant considérée comme totale, on considère qu'il reste une quantité :

$$n_{\text{OH}^-} = n - CE \times m \quad \text{d'ions hydroxyde}$$

Or, d'après la réponse à la question Q 14., $n_{\text{OH}^-} = 2C_1V_{\text{eq}}$ d'où, l'expression de CE :

$$CE = \frac{CV - 2C_1V_{\text{eq}}}{m}$$

L'application numérique donne :

$$CE = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{g}^{-1}$$

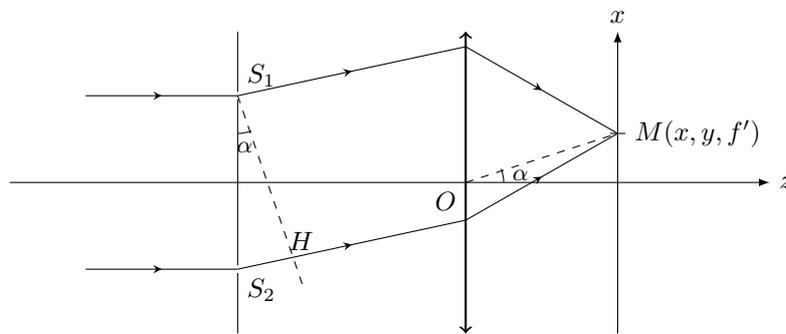
III La spectrométrie ICP-AES

III.A - Spectroscopie et résolution

III.A.1) Interférences à deux ondes

Q 18. Par définition, la différence de marche entre les deux rayons considérés est donnée par :

$$\delta(M) = (SM)_{\text{voie 2}} - (SM)_{\text{voie 1}} \quad \text{soit} \quad \delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$$



Imaginons qu'on place une source ponctuelle au point M . D'après le principe de retour inverse de la lumière, les rayons issus de M seraient les mêmes mais parcourus en sens inverse. Le plan passant par S_1 et orthogonal à ces rayons serait, d'après le théorème de Malus, un plan d'onde. On en déduit donc que $(MS_1) = (MH)$. Le chemin optique étant le même quel que soit le sens de parcours, on en déduit que $(S_1M) = (HM)$. On en déduit qu'il n'y a plus de différence de marche supplémentaire au delà du plan que l'on vient de définir. Le milieu étant de l'air, on a donc :

$$\delta(M) = \overline{S_2H}$$

Dans le triangle S_1S_2H , on peut établir :

$$\overline{S_2H} = a \sin \alpha \quad \text{or, d'après le schéma} \quad \tan \alpha = \frac{x}{f'}$$

La lentille étant utilisée dans les conditions de Gauss, les rayons étudiés sont considérés paraxiaux, on peut donc faire les approximations suivantes :

$$\delta(M) \approx a\alpha \approx a \frac{x}{f'}$$

Q 19. La formule de Fresnel nous donne :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(M)) \quad \text{où} \quad \begin{cases} I_1 \text{ et } I_2 \text{ sont les intensités de l'onde en } S_1 \text{ et } S_2 \\ \varphi(M) \text{ est le déphasage entre les deux ondes en } M \end{cases}$$

On considère que $I_1 = I_2 = I_0$ et on sait que $\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta(M)$, on a donc l'expression suivante pour $I(M)$:

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{f'\lambda}\right) \right]$$

On observe donc sur l'écran des franges d'interférences : des raies lumineuses sont alternées avec des raies sombres.

Q 20. L'interfrange est la distance entre deux raies sombres ou lumineuses consécutives. Or, la condition d'interférences constructives donne la position d'une raie lumineuse :

$$\delta = k\lambda \text{ avec } \lambda \in \mathbb{Z} \quad \text{soit} \quad \frac{ax}{f'} = k\lambda$$

Ainsi, pour deux entiers k consécutifs, on obtient l'interfrange i :

$$i = \frac{\lambda f'}{a}$$

L'application numérique donne : $i = 1,0 \text{ mm}$.

Q 21. Nous venons d'établir $i = \frac{\lambda f'}{a}$. Ainsi, en différentiant, on obtient :

$$di = \frac{d\lambda f'}{a} \quad \text{donc} \quad \Delta\lambda = \frac{a\Delta i}{f'} \quad \text{d'où} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta i}{i}$$

Or, d'après l'énoncé :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 4.10^{-5}$$

On obtient ainsi : $\Delta i = 40 \text{ nm}$ Il nous faudrait pouvoir mesurer i à 40 nm près pour résoudre ces deux raies, sur un interfrange de 1 mm, ce n'est pas raisonnable.²

III.A.2) Interférences à N ondes

Q 22. Menons un raisonnement analogue à celui mené en question 18.

La différence de marche entre deux rayons consécutifs se réduit à la distance entre le projeté orthogonal du trou T_n sur le rayon passant par le trou T_{n-1} , et le trou T_{n-1} d'après le théorème de Malus et le principe de retour inverse de la lumière :

2. Un raisonnement en étudiant la cohérence temporelle : Considérons deux ondes de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 . On cherche la distance entre deux abscisses où se produisent des brouillages des franges à cause de la différence de longueurs d'onde. On associe :

- à λ_1 une frange brillante : $p = \delta(M)/\lambda_1 = \delta(M)\sigma_1$ où $\sigma_1 = 1/\lambda_1$ est le nombre d'onde associé à λ_1 .
- à λ_2 une frange sombre : $q + \frac{1}{2} = \delta(M)/\lambda_2 = \delta(M)\sigma_2$ où $\sigma_2 = 1/\lambda_2$ est le nombre d'onde associé à λ_2 .

où p et q sont deux entiers relatifs. La différence de ces deux expressions donne :

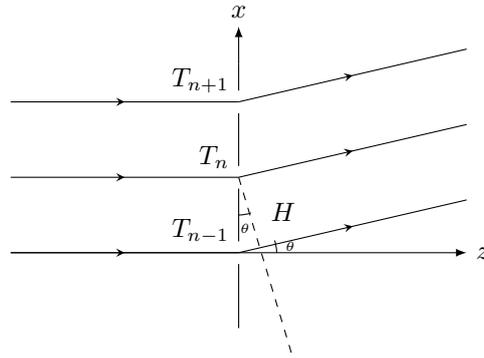
$$p - q + \frac{1}{2} = \delta(M)(\sigma_1 - \sigma_2) \quad \text{soit} \quad \delta(M) = \frac{p - q + \frac{1}{2}}{\Delta\sigma}$$

Or, on vient d'établir que $\delta(M) = \frac{ax}{f'}$ donc :

$$\frac{ax}{f'} = \frac{p - q + \frac{1}{2}}{\Delta\sigma} \quad \text{soit, entre deux brouillages successifs} \quad \Delta x = \frac{f'}{a\Delta\sigma} = \frac{f'\lambda_2\lambda_1}{a(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

L'application numérique donne : $\Delta x = 25 \text{ m}$.

Le rapport entre la distance entre deux brouillages et l'interfrange est de l'ordre de 25000, on ne peut donc pas raisonnablement utiliser cet interféromètre pour atteindre une résolution de 20 pm.



Ainsi, $\delta(M) = (T_{n-1}H) = \overline{T_{n-1}H}$. Dans le triangle $T_n T_{n-1} H$ rectangle en H , on peut trouver que :

$$\sin \theta = \frac{\overline{T_{n-1}H}}{a}$$

Or, on sait que $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M)$, on en déduit donc l'expression suivante du déphasage entre deux ondes issues de trous successifs :

$$\boxed{\varphi = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}}$$

Q 23. Pour observer un maximum d'intensité en un point de l'écran, il faut que les ondes issues de tous les trous interfèrent de manière constructive. A priori, l'énoncé ne nous demande pas tant, mais on aurait pu travailler ainsi : Pour prouver cette condition portant sur le maximum d'intensité, il nous faut calculer celle-ci. Considérons l'amplitude complexe en M du signal issu d'un trou T_n :

$$\underline{s}_n(M, t) = s_0 \exp(i(\omega t - \varphi_n(M))) \quad \text{où } \varphi_n(M, t) \text{ est la phase initiale du signal en question}$$

D'après l'expression donnée précédemment pour φ , on peut aussi écrire :

$$\underline{s}_n(M, t) = \underline{s}_{n-1}(M, t) \exp(-i\varphi) \quad \text{soit, par récurrence immédiate } \underline{s}_n(M, t) = \underline{s}_1(M, t) \exp(-i(n-1)\varphi)$$

On peut donc calculer l'expression de l'amplitude complexe résultante en M :

$$\underline{s}(M, t) = \sum_{k=1}^N \underline{s}_k(M, t) = \sum_{k=1}^N \underline{s}_1(M, t) \exp(-i(n-1)\varphi)$$

Connaissant l'expression de la somme des termes d'une suite géométrique, on obtient ainsi :

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) \frac{1 - \exp(iN\varphi)}{1 - \exp(-i\varphi)}$$

Or, $\underline{s}_1(M, t) = s_0 \exp(i\omega t)$ en prenant cette onde comme référence. On peut donc écrire, à l'aide des factorisations pertinentes :

$$\underline{s}(M, t) = s_0 \exp(i\omega t) \exp\left(-i\frac{(N-1)\varphi}{2}\right) \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

L'intensité en M est donnée par :

$$I(M) = \langle \underline{s}(M, t) \underline{s}^*(M, t) \rangle = \frac{I_0}{N^2} \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Cette amplitude est maximale à condition d'annuler le dénominateur de l'intensité, soit :

$$\varphi = 2p\pi \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z} \quad p \text{ est appelé ordre d'interférences.}$$

. Cela se traduit ainsi par la condition suivante sur φ :

$$\varphi = 2\pi p \quad \text{avec } p \text{ un entier relatif appelé ordre d'interférences}$$

On sait que $\varphi = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}$, on peut donc écrire, pour $p = 1$:

$$\boxed{\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a}}$$

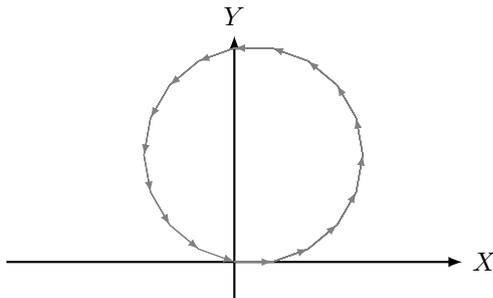
Q 24. L'application numérique donne, pour les valeurs données dans l'énoncé :

$$\theta_1 = 64^\circ$$

Les conditions de Gauss sont respectées pour des angles ne dépassant pas une valeur de 10° , ici, on ne peut donc plus utiliser le dispositif évoqué plus haut sous peine d'utiliser des rayons qui ne soient pas paraxiaux.

Q 25. On peut associer à chaque onde passant par l'un des trous un vecteur de Fresnel. En notant $s_n = S_0 \cos(\omega t - n\varphi)$ le signal associé à l'onde passant par le n -ième trou, on peut définir le vecteur de Fresnel \vec{S}_n de norme S_0 et faisant un angle $\omega t - n\varphi$ avec l'horizontale.

Le vecteur de Fresnel associé à la somme de toutes les ondes est donc la somme des différents vecteurs de Fresnel. Géométriquement, on peut voir que, pour que ce vecteur soit de norme nulle, il faut que la somme de tous les angles entre deux vecteurs consécutifs soit égale à 2π :



On en déduit donc que³ :

$$\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

On obtient ainsi l'égalité suivante :

$$2\pi + \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi a \sin(\theta_1 + \Delta\theta)}{\lambda} \quad \text{soit} \quad \sin(\theta_1 + \Delta\theta) = \frac{\lambda}{a} \left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

L'application numérique donne, avec $N = \frac{\ell}{a}$:

$$N = 90000 \quad \text{soit} \quad \Delta\theta = 4,7'' \text{ d'arc}$$

Q 26. D'après la réponse à la question 23/, $\theta_1 = \arcsin \frac{\lambda}{a}$ et $\theta'_1 = \arcsin \frac{\lambda'}{a}$. Or, on vient d'établir que :

$$\Delta\theta = \arcsin \left[\left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{\lambda}{a} \right] - \theta_1$$

Pour trouver l'expression de la résolution, on se place en limite de vérification de l'inégalité :

$$|\theta'_1 - \theta_1| = \Delta\theta \quad \text{soit, en prenant } \lambda' \text{ tel que } \theta'_1 > \theta_1, \quad \theta'_1 = \arcsin \left[\left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{\lambda}{a} \right]$$

On en déduit donc, d'après l'expression de θ'_1 :

$$\arcsin \frac{\lambda'}{a} = \arcsin \left[\left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{\lambda}{a} \right] \quad \text{d'où} \quad \frac{\lambda'}{a} = \left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{\lambda}{a} \quad \text{par croissance de } \sin \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

On obtient, *in fine* :

$$\lambda' - \lambda = \frac{\lambda}{N} \quad \text{et, plus généralement,} \quad |\lambda' - \lambda| = \frac{\lambda}{N}$$

Q 27. On obtient ainsi une valeur de résolution de l'ordre de 5,5 pm.

La diffraction par les montures des objectifs du capteur du spectromètre peut toutefois rentrer en jeu et augmenter la valeur de la résolution malgré tout.

3. On aurait pu utiliser l'expression de $I(M)$ si on l'avait établie à la question 23/ : En utilisant l'expression de l'intensité obtenue en question 23/, on peut remarquer que la première annulation intervient pour $\varphi = \frac{2\pi}{N}$, ce qui correspond à la demi-largeur d'un pic d'intensité lumineuse.

III.B - Interaction champs - plasma dans la torche

Q 28. Les quatre équations, sont, dans le même ordre et sous forme intégrale :

$$\begin{aligned} \oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{S}_P &= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \\ \oint_{P \in \Gamma} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P &= \frac{d \iint_{M \in \mathcal{S}_\Gamma} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S}_M}{dt} \\ \oiint_{P \in \mathcal{S}_\Gamma} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{S}_P &= 0 \\ \oint_{P \in \Gamma} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P &= \mu_0 I(\mathcal{S}_\Gamma, t) \end{aligned}$$

Ici, $I(\mathcal{S}_\Gamma, t)$ est le courant algébriquement enlacé par le contour Γ sur lequel s'appuie la surface \mathcal{S}_Γ .

III.B.1) Champ magnétique produit par les lames

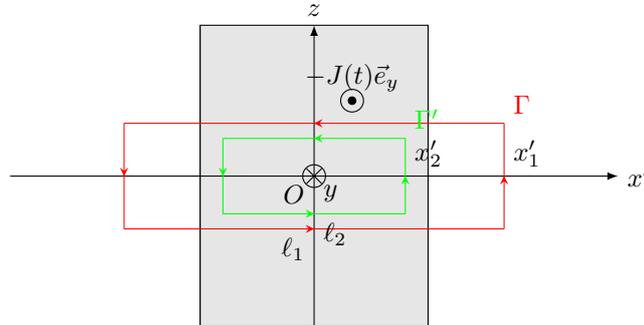
Q 29. Étude des symétries et invariances :

- Le plan (xOy) est un plan de symétrie pour la distribution de courants. On en déduit, d'après le principe de Curie, que le champ en un point M du plan est orthogonal à ce plan : \vec{B} est donc porté par \vec{e}_z .
- D'après l'énoncé, on néglige les effets de bord selon les directions y et z . On peut donc en déduire que le système est invariant selon ces directions : \vec{B} ne dépend que de x .

On peut donc écrire :

$$\vec{B} = B(x, t)\vec{e}_z$$

On procède à un changement de repère en posant $x' = x + a + \frac{b}{2}$, on place ainsi le point O' centre du repère au milieu de la lame de courant :



Premier cas : $|x'| > b/2$: On considère le contour d'Ampère Γ proposé en rouge sur la figure ci-dessus. Le théorème d'Ampère appliqué au système donne ainsi :

$$\oint_{P \in \Gamma} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = \mu_0 I(\mathcal{S}_\Gamma, t)$$

Soit :

$$B(x'_1, t) \times 2\ell_1 - B(-x'_1, t) \times 2\ell_1 = \mu_0 \times 2\ell_1 \times b \times J(t) \quad \text{soit} \quad B(x'_1, t) - B(-x'_1, t) = \mu_0 b J(t)$$

Or, $(x'O'z)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant, c'est donc un plan d'antisymétrie pour \vec{B} , on en déduit donc que $B(x'_1, t) = -B(-x'_1, t)$, on peut donc simplifier l'expression trouvée plus haut :

$$\begin{cases} 2B(x'_1, t) = \mu_0 b J(t) & \text{si } x' > b \\ 2B(x'_1, t) = -\mu_0 b J(t) & \text{si } x' < b \end{cases}$$

Deuxième cas : $|x'| < b/2$: On considère le contour d'Ampère Γ' proposé en vert sur la figure ci-dessus. Le théorème d'Ampère appliqué au système donne ainsi :

$$\oint_{P \in \Gamma'} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = \mu_0 I(\mathcal{S}'_\Gamma, t)$$

Soit :

$$B(x'_2, t) \times 2\ell_2 - B(-x'_2, t) \times 2\ell_2 = \mu_0 \times 2\ell_2 \times 2x'_2 \times J(t) \quad \text{soit} \quad B(x'_2, t) - B(-x'_2, t) = 2\mu_0 x'_2 J(t)$$

Le même raisonnement d'antisymétrie permet d'écrire :

$$B(x', t) = \mu_0 x' J(t)$$

On peut donc écrire, dans le repère de l'énoncé :

$$B(x, t) = \begin{cases} -\mu_0 \frac{b}{2} J(t) & \text{si } x < -a - b \\ \mu_0 (x + a + \frac{b}{2}) J(t) & \text{si } x \in [-a - b; -a] \\ \mu_0 \frac{b}{2} J(t) & \text{si } x > -a \end{cases}$$

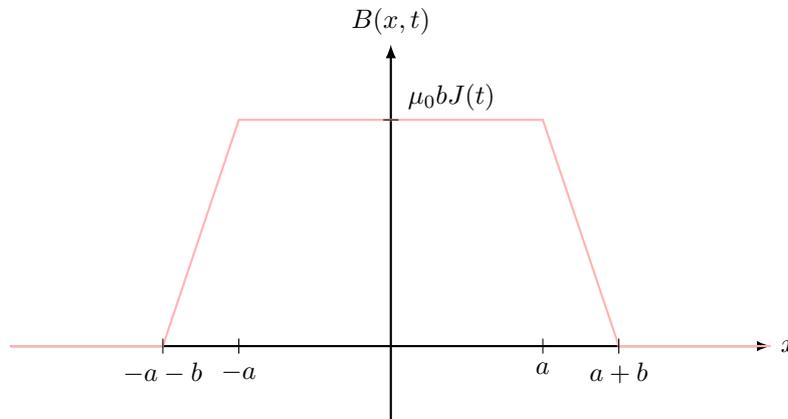
Q 30. Le même raisonnement nous permet d'établir l'expression du champ magnétique créé par la lame de droite :

$$B_d(x, t) = \begin{cases} \mu_0 \frac{b}{2} J(t) & \text{si } x < a \\ \mu_0 (x - a - \frac{b}{2}) J(t) & \text{si } x \in [a; a + b] \\ -\mu_0 \frac{b}{2} J(t) & \text{si } x > a + b \end{cases}$$

Le théorème de superposition nous donne la forme du champ magnétique dans tout l'espace en sommant les contributions de la lame de droite et de celle de gauche. On obtient :

$$B(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in] -\infty; -a - b] \cup [a + b; +\infty[\\ \mu_0 (x + a + b) J(t) & \text{si } x \in [-a - b; -a] \\ \mu_0 (x - a) J(t) & \text{si } x \in [a; a + b] \\ \mu_0 b J(t) & \text{si } x \in [-a; a] \end{cases}$$

On obtient ainsi le profil suivant :



III.B.2) Propriétés dans le plasma

Q 31. On vient de voir que la distribution de courant dans les lames est à l'origine d'un champ magnétique dans tout l'espace. Celui-ci, d'après la loi de Maxwell-Faraday, est également à l'origine d'un champ électrique. Le plan (xOz) est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant présente dans les lames. Le principe de Curie nous permet d'affirmer qu'en tout point du plan, le champ électrique est orthogonal à ce plan : le champ électrique est donc porté par \vec{e}_y .

On néglige les effets de bords dans les directions selon y et z , il y a donc invariance selon ces directions : \vec{E} dépend donc seulement de x et du temps.

On peut donc écrire :

$$\vec{E}(M, t) = E(x, t) \vec{e}_y$$

Le plan (yOz) est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant présente dans les lames. Le principe de Curie nous permet donc de le considérer comme un plan d'antisymétrie pour le champ électrique. Ainsi :

$$E(-x, t) = -E(x, t) \quad E(x, t) \text{ est bien une fonction impaire de } x$$

Q 32. Le champ créé par les lames est à l'origine d'une distribution de courant dans le plasma ce qui induit un champ magnétique créé par le plasma. On peut donc en déduire que ce champ n'est pas le même que celui seulement créé par les lames.

Le plan (xOy) est un plan de symétrie de la distribution de courants dans les lames et de la distribution de charges (nulle) dans le plasma. On en déduit donc que le champ magnétique est porté par \vec{e}_z , orthogonal au plan cité précédemment.

Les mêmes raisonnements d'invariances donnent la dépendance spatiale de \vec{B} .

Enfin, le plan (yOz) étant un plan d'antisymétrie pour les distributions de courant et de charge, il est donc un plan de symétrie pour \vec{B} , on peut donc écrire :

$$B(x, t) = B(-x, t) \quad B(x, t) \text{ est bien une fonction paire de } x$$

Q 33. L'équation de Maxwell-Ampère donnée dans l'énoncé permet d'écrire, en coordonnées cartésiennes :

$$-\frac{\partial B(x, t)}{\partial x} \vec{e}_y = \mu_0 j(x, t) \vec{e}_y \quad \text{soit, en projetant} \quad \boxed{-\frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = \mu_0 j(x, t)} \quad (\star\star)$$

L'équation de Maxwell-Faraday donnée dans l'énoncé permet d'écrire, en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} \vec{e}_z = -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} \vec{e}_z \quad \text{soit, en projetant} \quad \boxed{\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t}} \quad (\star)$$

III.B.3) Modèle non collisionnel

Q 34. On vient d'établir que :

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x \partial t}$$

On en déduit donc :

$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial t \partial x} \quad \text{or,} \quad -\frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = \mu_0 j(x, t) \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \mu_0 j(x, t)}{\partial t} = \mu_0 \frac{ne^2}{m} E(x, t)$$

En posant $\lambda = \sqrt{\frac{m}{n\mu_0 e^2}}$, on obtient bien l'équation attendue.

On sait que $[m] = M$, $[n] = L^{-3}$ et $[e] = I \times T$.

La force de Lorentz magnétique appliquée sur une particule de charge q se déplaçant à une vitesse \vec{v} et soumise à un champ magnétique \vec{B} s'exprime :

$$\vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \text{et, d'après le théorème d'Ampère} \quad [B]L = [\mu_0]I$$

Ainsi :

$$[\mu_0] = \frac{L[F]}{I[q][v]} = \frac{L.M.L.T^{-2}}{I^2.T.L.T^{-1}} = \frac{L.M}{I^2 T^2}$$

On en déduit donc que :

$$[\lambda] = \sqrt{\frac{M.I^2 T^2}{L^{-3}.L.M.I^2.T^2}} = L$$

λ a la dimension d'une longueur, ce qui est cohérent au vu de l'équation différentielle donnée dans l'énoncé.

Q 35. L'équation différentielle précédente en x est du deuxième ordre. Le discriminant de l'équation caractéristique est positif, on obtient ainsi la forme générale pour E :

$$E(x, t) = \alpha(t) \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \beta(t) \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{or, } E(x, t) \text{ est impaire par rapport à } x : \quad \boxed{E(x, t) = \beta(t) \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}$$

D'après (\star) , on obtient :

$$\frac{\beta(t)}{\lambda} \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) = -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t}$$

En intégrant par rapport au temps, on obtient :

$$B(x, t) = - \int_0^t \frac{\beta(t)}{\lambda} \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) dt = - \frac{\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\lambda} \int_0^t \beta(t) dt$$

en considérant qu'il n'y a pas de champ magnétique statique.
Évaluons B en $x = a$:

$$B(a, t) = B_0(t) = - \frac{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)}{\lambda} \int_0^t \beta(t) dt \quad \text{on en déduit donc que} \quad \int_0^t \beta(t) dt = - \frac{B_0(t)\lambda}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)}$$

On a donc l'expression attendue dans l'énoncé :

$$B(x, t) = \frac{\cosh(x/\lambda)}{\cosh(a/\lambda)} B_0(t)$$

Q 36. L'équation (*) permet ainsi d'écrire :

$$\frac{\beta(t)}{\lambda} \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) = - \frac{\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \frac{dB_0(t)}{dt}$$

Ainsi, on a :

$$\beta(t) = - \frac{\lambda}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \frac{dB_0(t)}{dt} \quad \text{d'où} \quad E(x, t) = - \frac{\lambda \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \frac{dB_0(t)}{dt}$$

L'équation (**) donne :

$$\mu_0 j(x, t) = - \frac{\sinh(x/\lambda)}{\lambda \cosh(a/\lambda)} B_0(t) \quad \text{soit} \quad j(x, t) = - \frac{\mu_0 \sinh(x/\lambda)}{\lambda \cosh(a/\lambda)} B_0(t)$$

Q 37. L'expression de la puissance volumique est la suivante :

$$\mathcal{P}_V = \vec{j}(x, t) \cdot \vec{E}(x, t) = \mu_0 \frac{\sinh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh^2\left(\frac{a}{\lambda}\right)} B_0(t) \frac{dB_0(t)}{dt} = \mu_0 \frac{\sinh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{2 \cosh^2\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \frac{dB_0^2(t)}{dt}$$

$B_0(t)$ est périodique, donc $B_0^2(t)$ l'est aussi (si $B_0(t+T) = B_0(t)$, alors on peut écrire que $B_0^2(t+T) = B_0^2(t)$ aussi). Notons $B_0^2(t) = S_0 + S_v(t)$ où S_0 est la valeur moyenne de $B_0^2(t)$ et $S_v(t)$ sa composante variable de valeur moyenne nulle.

Ainsi, $\frac{dB_0^2(t)}{dt} = \frac{dS_v(t)}{dt}$. Or, d'après le théorème de Fourier, avec ω la pulsation de l'excitation du

bobinage, on peut écrire : $S_v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$, soit :

$$\frac{dS_v(t)}{dt} = - \sum_{k=1}^{\infty} k\omega s_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \quad \text{donc} \quad \left\langle \frac{dS_v(t)}{dt} \right\rangle = 0$$

On en déduit donc que :

$$\left\langle \mathcal{P}_V \right\rangle = \left\langle \mu_0 \frac{\sinh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{2 \cosh^2\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \frac{dB_0^2(t)}{dt} \right\rangle = \mu_0 \frac{\sinh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{2 \cosh^2\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \left\langle \frac{dB_0^2(t)}{dt} \right\rangle = \mu_0 \frac{\sinh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{2 \cosh^2\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \left\langle \frac{dS_v(t)}{dt} \right\rangle = 0$$

En moyenne, aucune puissance n'est cédée par le champ aux électrons, le plasma peut difficilement être entretenu d'après ce modèle...

III.B.4) Modèle collisionnel

Q 38. Dérivons (**) par rapport à x :

$$-\frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \mu_0 j(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \mu_0 \sigma E(x, t)}{\partial x} \quad \text{d'après l'énoncé}$$

Ainsi, d'après (*) :

$$\boxed{\frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial B(x, t)}{\partial t}} \quad (***)$$

Q 39. D'après l'équation établie à la question précédente : $[\mu_0 \sigma] = T.L^{-2}$. Ainsi $[\mu_0 \sigma \omega] = L^{-2}$, donc :

$$\boxed{[\delta] = L}$$

Q 40. Le champ magnétique complexe vérifie l'équation (***), on peut donc écrire :

$$\frac{d^2 \underline{f}(x)}{dx^2} \exp(i\omega t) = \mu_0 \sigma \underline{f}(x) i\omega \exp(i\omega t) \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 \underline{f}(x)}{dx^2} - \mu_0 \sigma i\omega \underline{f}(x) = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2 \underline{f}(x)}{dx^2} - \left(\sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} (1+i) \right)^2 \underline{f}(x) = 0$$

Ainsi :

$$\frac{d^2 \underline{f}(x)}{dx^2} - \left(\frac{1+i}{\delta} \right)^2 \underline{f}(x) = 0$$

On peut donc donner les formes générales suivantes pour $\underline{f}(x)$:

$$\underline{f}(x) = \alpha \cosh \left(\frac{1+i}{\delta} x \right) + \beta \sinh \left(-\frac{1+i}{\delta} x \right)$$

On ne garde que la solution paire d'après la question 32/ :

$$\underline{f}(x) = \alpha \cosh \left(\frac{1+i}{\delta} x \right) \quad \text{or, } f(a) = f_0 \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{f_0}{\cosh \left(\frac{1+i}{\delta} x \right)}$$

On a donc l'expression suivante pour $\vec{B}(x, t)$:

$$\boxed{\vec{B}(x, t) = f_0 \frac{\cosh \left(\frac{1+i}{\delta} x \right)}{\cosh \left(\frac{1+i}{\delta} a \right)} \exp(i\omega t) \vec{e}_z}$$

Q 41. Au vu de l'expression de B , la puissance évolue en $\exp(-x/\delta)$ (E et j évoluant a priori en \sinh) près des bords. On peut donc y voir un effet de peau et il est notable que, plus la distance δ augmente, plus l'atténuation est abrupte. L'« épaisseur de peau » qu'on pourrait définir ici évolue dans le même sens que δ : c'est cohérent.

De plus, plus la pulsation augmente, plus la distance δ diminue, plus le rapport a/δ augmente. On remarque ainsi graphiquement qu'une augmentation de pulsation est liée à une augmentation de puissance moyenne transmise au plasma. On sait qu'en général, dans les phénomènes inductifs, la puissance volumique augmente avec la pulsation d'excitation, c'est donc bien cohérent.

Enfin, on remarque que sur les bords, la puissance est bien maximale, cela est cohérent avec la forme d'anneau qu'on observe sur la photographie. Sur celle-ci d'ailleurs, on peut observer un anneau d'épaisseur $\delta \approx \frac{2}{3} a \approx 0,7$ cm. Avec les valeurs numériques données, on obtient 5,5 mm.

Malgré une géométrie différente entre le système réel et la modélisation unidimensionnelle, on obtient des ordres de grandeurs assez proches.