

I. Equilibre vertical d'un gaz à la température ambiante

1). Pour $P_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ et $T_0 = 300 \text{ K}$, en utilisant la loi des gaz parfaits : $P_0 V = n R T_0$

donc $V_{\text{molaire}} = \frac{V}{n} = \frac{R T_0}{P_0} = \frac{8,314 \times 300}{10^5} = 25 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$

$$\bullet \frac{N_A \times \frac{4}{3} \pi R_m^3}{V_{\text{molaire}}} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \times 4 \pi \cdot 10^{-30}}{3 \times 25 \cdot 10^{-3}} = 10^{-4} = 0,01\%$$

2). Gaz parfait = gaz réel sous faible pression
On assimile les molécules à des points matériels sans interaction entre eux.

• Le volume occupé par les molécules est négligeable devant le volume de l'enceinte

⇒ on peut considérer que les molécules sont ponctuelles

⇒ on peut considérer qu'elles sont en moyenne suffisamment éloignées les unes des autres pour ne pas être en interaction. Elles ne le sont que brièvement sur des zones d'extension de l'ordre de R_m . On assimile ces interactions à des chocs.

$$\left. \begin{array}{l} 3). E_{\text{cm}} = \frac{3}{2} k_B T_0 \\ E_{\text{pm}} = m g z \end{array} \right\} \frac{E_{\text{cm}}}{E_{\text{pm}}} = \frac{3 \overset{\leftarrow \frac{k_B}{m} = \frac{R}{M}}{k_B T_0}}{2 m g z} \gtrsim \frac{3 \times 8,314 \times 300}{2 \times 30 \cdot 10^{-3} \times 9,8 \times 1}$$

$$\frac{E_{\text{cm}}}{E_{\text{pm}}} \gtrsim 10^4$$

⇒ L'agitation thermique permet de contre l'effet du champ de pesanteur et de maintenir les sphères en suspension.

4). D'après la loi des gaz parfaits : $\rho(z) = \frac{P(z) M}{R T_0}$

• A l'équilibre, pour une tranche de gaz entre z et $z + dz$:

$$\vec{0} = \vec{\pi} + \vec{P} \quad (\text{force de frottement nulle})$$

En projection sur l'axe Oz :

$$P(z) \times S - P(z + dz) \times S - P(z) \times S dz g = 0$$

Résultante verticale
des forces de pression.

$$\text{d'où} \quad -dP = P(z) g dz$$

$$\text{soit} \quad \frac{dP}{dz} = -P(z) g = -\frac{P(z) M}{RT_0} g$$

$$\text{d'où} \quad \left[\frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT_0} P(z) = 0 \right]$$

$$5) \text{ Par intégration: } \left[P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \right] \text{ avec } H = \frac{RT_0}{Mg}$$

$$\text{ou } \left[P(z) = P_0 A(z) \right]$$

$$\text{ou } \left[H = \frac{k_B T_0}{mg} \right]$$

$$\text{AN } H = \frac{1,8,314 \times 300}{30 \cdot 10^{-3} \times 9,8} \simeq 8 \text{ km.}$$

$\Rightarrow$ On peut considérer que la pression est uniforme dans le récipient car $R \simeq$ quelques mètres $\ll H \simeq 8 \text{ km}$.

Dans l'eau liquide, la pression varie de 1 bar tous les 10 m $\Rightarrow$ on ne pourrait plus considérer que la pression est uniforme dans le récipient

$$\text{En effet } \frac{dP}{dz} = -P(z) g \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -10^3 \times 10 = -0,1 \text{ bar m}^{-1}$$

*liquide incompressible.
 $\Rightarrow \frac{dP}{dz}$ uniforme.*

$$6) A(z) = \exp\left(-\frac{m_m g z}{k_B T_0}\right) = \exp\left(-\frac{E(z)}{k_B T_0}\right)$$

d'où $E(z) = m_m g z$ énergie potentielle de pesanteur d'une molécule.

• Si $E(z) \ll k_B T_0$ alors $P(z) \simeq P_0$

les molécules se répartissent de façon uniforme dans le récipient grâce à l'agitation thermique.

• Si $E(z) \gg k_B T_0$ alors $P(z) \rightarrow 0$

C'est l'effet du poids qui l'emporte. Les particules tombent au fond du récipient.

7) $c_g(z) = \frac{SN}{Sd_z}$ avec $SN =$ nombre de molécules entre z et $z + dz$. (3)

et $P(z) \times Sd_z = \frac{SN}{dA} RT_0$ (loi des gaz parfaits)

donc $SN = \frac{P(z) dA}{RT_0} Sd_z = \frac{P(z) Sd_z}{k_B T_0}$

d'où $c_g(z) = \frac{P(z)}{k_B T_0} = \frac{P_0}{k_B T_0} A(z) = c_{g0} A(z)$

II - Etude d'un équilibre de sédimentation.

8) Bilan des forces appliquées à un grain:

- Poids $\vec{P} = \mu_b V_b \vec{g}$
- Pousée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\mu_e V_b \vec{g}$
- Force de frottement visqueux $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$

9) PFD appliqué à un grain $m_b \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu_b V_b g \vec{u}_3 + \mu_e V_b g \vec{u}_3 - \alpha \vec{v}$

Soit en projection sur Oz avec $\vec{v} = -v \vec{e}_3$:

$$-m_b \frac{dv}{dt} = -\mu_b V_b g + \mu_e V_b g + \alpha v$$

soit $\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m_b} v(t) = \frac{(\mu_b - \mu_e) V_b g}{m_b}$

$v(t) = \frac{(\mu_b - \mu_e) V_b g}{\alpha} (1 - e^{-t/\tau})$ avec $\tau = \frac{m_b}{\alpha}$
et $v(0) = 0$.

Pour $t \gg \tau$: $v(t) = v_e$

d'où $v_e = \frac{(\mu_b - \mu_e) V_b g}{\alpha} = \frac{m^* g}{\alpha}$

avec $m^* = (\mu_b - \mu_e) V_b$ masse apparente du grain.

La pousée d'Archimède élimine l'effet du poids

$\Rightarrow$ tout se passe comme si la masse du grain était plus faible que dans le vide.

$$\text{AN } \zeta = \frac{m_b}{\alpha} = \frac{\mu_b \times \frac{4}{3} \pi R_b^3}{6 \pi \eta R_b} = \frac{1,2 \cdot 10^3 \times 4 \times 4 \times 10^{-14}}{3 \times 6 \times 1,2 \cdot 10^{-3}} \quad (4)$$

$$\zeta = \frac{8}{9} \cdot 10^{-8} \text{ s} \simeq 10 \text{ ns}$$

$$\text{et } v_e = \frac{(\mu_b - \mu_e) \times \frac{4}{3} \pi R_b^3 \times g}{6 \pi \eta R_b}$$

$$= \frac{(1,2 - 1) \cdot 10^3 \times 4 \times 4 \cdot 10^{-14} \times 9,8}{9 \times 1,2 \cdot 10^{-3}}$$

$$v_e \simeq 3 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-1}$$

R_m = en fait, la valeur de α est donnée en début d'énoncé.

10). $\vec{j}_c$ et $\vec{j}_m$ sont des densités de flux de particules soit des flux surfaciques de particules (analogie avec $\vec{j}$ en électricité ou $\vec{j}_m$ en thermo)
Ils peuvent s'exprimer en molécules $\cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ soit en $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

• d'où D peut s'exprimer en $\frac{\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}}{\text{m}^{-3}} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

• On considère une tranche entre z et $z+dz$ dont la concentration ne varie pas au cours du temps donc $(\vec{j}_c(z) + \vec{j}_m(z)) \times S = (\vec{j}_c(z+dz) + \vec{j}_m(z)) \times S$

$$\text{soit } \vec{j}_c(z) + \vec{j}_m(z) = \text{cte} = \underbrace{\vec{j}_c(0) + \vec{j}_m(0)}_{\text{flux de particule net à la surface}} = \vec{0}$$

d'où en projetant sur l'axe Oz :

$$-c(z) v_e - \frac{dc}{dz} D = 0$$

$$\text{soit } \left| \frac{dc}{dz} + \frac{v_e}{D} c(z) = 0 \right|$$

$$\text{donc avec } c(0) = c_0: \left| c(z) = c_0 e^{-\frac{v_e}{D} z} = c_0 A(z) \right|$$

$$\text{avec } A(z) = \exp\left(-\frac{z}{H_b}\right) \text{ et } H_b = \frac{D}{v_e} = \frac{D}{m^* g}$$

$$\text{soit } \left| H_b = \frac{D}{m^* g} \right|$$

$$11) E_p^*(z) = m^* g z \quad (\text{axe } Oz \text{ ascendant})$$

$$A(z) = \exp\left(-\frac{z}{H_b}\right) = \exp\left(-\frac{E_p^*(z)}{k_B T_0}\right)$$

donc on peut écrire $\frac{\cancel{z} \cancel{m^* g}}{D 6 \pi \gamma R_b} = \frac{\cancel{m^* g} z}{k_B T_0}$

d'où $\left| D = \frac{k_B T_0}{6 \pi \gamma R_b} \right|$

$$12) N = \int_0^{R_1} S N = \int_0^{R_1} c(z) \times S dz = \int_0^{R_1} c_0 \exp\left(-\frac{z}{H_b}\right) S dz$$

$$N = c_0 S \times (-H_b) \left[\exp\left(-\frac{R_1}{H_b}\right) - 1 \right] \approx c_0 S H_b$$

$R_1 \gg H_b$ dans
l'hypothèse du
récepteur de hauteur
infinie
 $\rightarrow \exp\left(-\frac{R_1}{H_b}\right) \ll 1$

d'où $\left| c_0 = \frac{N}{S H_b} \right|$

13) $c(z) = \frac{n(z)}{S e}$ car $n \ll H_b$, alors on peut considérer que la concentration d'une tranche d'épaisseur e est uniforme.

$$n(z) = S e c(z)$$

$$\ln n(z) = \ln(S e) + \ln c_0 - \frac{z}{H_b} \Rightarrow \text{équation d'une droite de pente } -\frac{1}{H_b}$$

d'où $-\frac{24}{1000} = -\frac{1}{H_b}$ soit $H_b = \frac{1000}{24} \approx 40 \mu\text{m}$.

On a $R_1 \approx 2,5 H_b \Rightarrow$ Jean Perrin a opéré sur une colonne dans laquelle la concentration variait de manière significative.

$$14) H_b = \frac{D 6 \pi \gamma R_b}{m^* g} = \frac{k_B T_0}{6 \pi \gamma R_b} \times \frac{6 \pi \gamma R_b}{m^* g}$$

d'où $k_B = \frac{H_b m^* g}{T_0} = \frac{H_b \times (\mu_b - \mu_e) \times 4 \pi R_b^3 g}{3 T_0}$

$$k_B = \frac{40 \cdot 10^{-6} \times 0,2 \cdot 10^3 \times 4 \pi \times 2 \cdot 10^{-21} \times 9,81}{3 \times 300}$$

$$k_B = \frac{8 \times 8\pi \times 9,81}{9} \times 10^{-26} = 2 \cdot 10^{-24} \text{ JK}^{-1}$$

6

Sources d'erreur

- Mouvement brownien des particules qui peut fausser le comptage.
- concentration non uniforme dans une manche d'épaisseur e si on n'a pas $e \ll \lambda_b$.

III - le modèle de Langevin

15) PFD appliqué à un grain: $m_b \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_c + \vec{f}$

Soit: $\boxed{m_b \frac{d\vec{v}}{dt} + \alpha \vec{v} = \vec{F}_c} \quad (EL)$

Si $\vec{F}_c = \vec{0}$ alors $\vec{v}(t) = \vec{v}(t=0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = \frac{m_b}{\alpha}$

Donc au bout de quelques τ : $\vec{v}(t) \rightarrow 0$.

16) $\frac{d(\alpha v)}{dt} = v^2 + \alpha \frac{dv}{dt}$ soit $\boxed{\alpha \frac{dv}{dt} = \frac{d(\alpha v)}{dt} - v^2}$

17) $u = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ vitesse quadratique moyenne.

$\langle E_{ct} \rangle = \frac{1}{2} m_b \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m_b u^2 = \frac{1}{2} k_B T_0 \quad (1D)$

d'après le théorème d'équipartition de l'énergie $\frac{1}{2} k_B T$ par degré de liberté quadratique.

donc $u^2 = \frac{k_B T_0}{m_b}$ soit $\boxed{u = \sqrt{\frac{k_B T_0}{m_b}}}$

18) Projection de (EL) sur Ose et multiplication par α :

$m_b \frac{dv}{dt} \times \alpha + \alpha v \times \alpha = F_c \times \alpha$

En valeur moyenne temporelle:

$$m_b \left\langle x \frac{dv}{dt} \right\rangle + \alpha \langle v \cdot x \rangle = \langle F_c x \rangle = 0.$$

$$m_b \left\langle \frac{d(xv)}{dt} \right\rangle - m_b \langle v^2 \rangle + \alpha \langle vx \rangle = 0$$

$$m_b \times \frac{d\varphi}{dt} - m_b \times u^2 + \alpha \varphi(t) = 0$$

donc: $\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\alpha}{m_b} \varphi(t) = u^2$

soit $\left| \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{\tau} \varphi(t) = u^2 \right|, \tau = \frac{m_b}{\alpha}$

d'où $\varphi(t) = u^2 \tau \times (1 - e^{-t/\tau})$ avec $\varphi(0) = 0$

soit $\left| \varphi(t) = \frac{k_B T_0}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m_b} t}) \right|$

19) $\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = 2\langle xv \rangle$ soit $\left\langle \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} \right\rangle = 2\langle xv \rangle$

avec l'hypothèse ergodique $\left\langle \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} \right\rangle = 2\langle xv \rangle$

soit $\left| \frac{d\psi}{dt} = 2\varphi(t) \right|$

d'où $\psi(t) = \frac{2k_B T_0}{\alpha} (t + \tau e^{-t/\tau}) + \text{cte}$

Or $\tau \approx 10 \text{ ns} \ll \text{durée de l'expérience} = 2 \text{ min}$
 Les mesures sont réalisées toutes les 30 ns (voir p5)
 donc $t \gg \tau$ et donc $e^{-t/\tau} \approx 1$

d'où $\psi(t) = \frac{2k_B T_0}{\alpha} (t + \tau) + \text{cte}$

Or avec le graphe p5 on voit que $\langle x^2 \rangle(t=0) = 0$

donc $\left| \psi(t) = \frac{2k_B T_0}{\alpha} t = D x t \right|$ avec $\left| D x = \frac{2k_B T_0}{\alpha} \right|$

$$20) \langle x^2 \rangle = \psi(t) = D_0 t = \underbrace{2k_B T_0}_{\alpha} \times t$$

Pente de la droite

(8)

$$\text{d'où } \frac{2k_B T_0}{\alpha} = \frac{45}{30} \mu\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{soit } k_B = \frac{45 \cdot 10^{-12}}{30} \times \frac{4,5 \cdot 10^{-9}}{300 \times 2} = \frac{5 \times 4,5}{2} 10^{-24} \text{ J K}^{-1}$$

$$\boxed{k_B = 1 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}} \quad \text{Bon ordre de grandeur.}$$

IV - Observations optiques

21) Conditions de Gauss = rayons paraxiaux c'est à dire rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique et frappant les lentilles au voisinage de l'axe optique.

Conséquences: Stigmatisme et aplanétisme.

22)

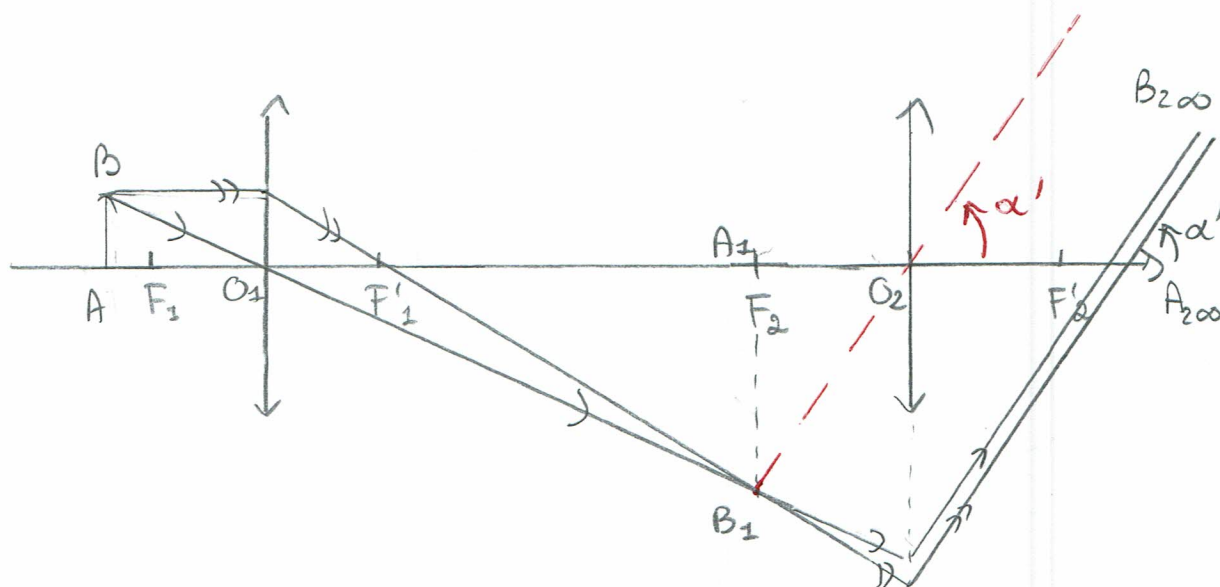


Image finale à l'infini $\Rightarrow$ image intermédiaire dans le plan focal objet de L_2 .

23). Il faut $\overline{AF_1} > 0$ pour que l'image A_1B_1 soit réelle et puisse donc se former dans le plan de front passant par F_2

• $\overline{O_1 F_2} = \overline{f'_1} + \Delta = 15,1 \text{ cm} \gg \overline{f'_1} = 0,1 \text{ cm}$
 $\Rightarrow$ pour la lentille L_2 , l'image A_1B_1 peut être considérée comme étant à l'infini et donc l'objet dans le plan focal objet de L_2

Pour un œil emmetrope, une observation à l'infini se fait sans accommodation donc sans fatigue de l'œil. L'image intermédiaire se forme dans le plan focal objet de L_2 (déjà vu en 22)).

Si $\overline{AF_1} < 0$ image virtuelle.

24) $P_i = \frac{\alpha'}{AB}$ avec $\alpha' = \frac{A_1 B_1}{f'_2}$ dans les conditions de Gauss

$$P_i = \frac{A_1 B_1}{AB} \times \frac{1}{f'_2} \simeq \frac{f'_1 + \Delta}{f'_1} \times \frac{1}{f'_2} \quad \text{si } AO_1 \simeq F_1 O_1.$$

AN $P_i = \frac{151}{1} \times \frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} = 75 \times 10^2$

Pour un grain de gomme-gutte : $AB = 2R_b = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$.

donc $\alpha' = P_i \times AB = 75 \cdot 10^2 \times 0,4 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

On le pouvoir de résolution de l'œil est de 1' arc soit

$$\frac{1}{60}^\circ = \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{1}{3600} \text{ rad} \simeq 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}.$$

On a donc $\alpha' >$ pouvoir de résolution de l'œil

$\Rightarrow$ observation possible des grains de gomme-gutte.