

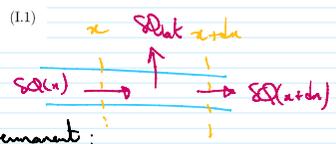
Corrigé UPS proposé par B. Hallé (Lycée Châtelet, Douai) et S. Laurette (Lycée Wallon, Valenciennes)
Librement distribuable aux élèves.

Q 1. Énoncer la loi de Fourier relative au vecteur densité de flux thermique \vec{j}_Q qui caractérise le phénomène de conduction thermique le long de l'axe de l'ailette.

$$\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad}(T)$$

Q 2. En réalisant un bilan de puissance thermique sur une tranche de longueur dx de l'ailette, montrer que la température suit l'équation différentielle

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T = -\frac{1}{\delta^2} T_a \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}} \quad (I.1)$$



écrire Σ de puissance d'ailette entre x et $x+dx$

1^{er} principe sur Σ entre t et $t+dt$, en régime permanent:

$$d(\Sigma) = \Sigma_{\text{ent}} + \Sigma_{\text{ext}} = \Sigma_Q(x) - \Sigma_Q(x+dx) - \Sigma_{Q,at}$$

0 en régime permanent (pointing to d(Sigma))
0 car transformation isotherme (pointing to Sigma_ext)

$$d'ou \quad \phi_{Qe}(x) dt - \phi_{Qe}(x+dx) dt - \phi_{Q,at} dt = 0$$

$$j_Q(x) S dt - j_Q(x+dx) S dt - h(T(x) - T_a) S dt = 0$$

$$d'ou \quad -\frac{dj_Q}{dx} dx \pi a^2 - 2h \frac{dT}{dx} h(T(x) - T_a) = 0$$

Surface latérale de Sigma (pointing to the second term)

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} a - 2h(T(x) - T_a) = 0$$

$$\frac{dT}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a} T = -\frac{2h}{\lambda a} T_a$$

$\frac{1}{\delta^2}$ (pointing to the coefficient of T)

Q 3. Vérifier l'homogénéité de l'expression du paramètre δ introduit dans la question précédente. Estimer sa valeur numérique dans le cas d'une ailette en silicium de rayon $a = 1$ mm.

d'une part, on déduit de $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$

que $\left[\frac{d^2 T}{dx^2} \right] = \left[\frac{T}{\delta^2} \right]$

dimension (pointing to the brackets)

$$\frac{\text{K}}{\text{m}^2} = \frac{\text{K}}{[\delta]^2} \quad \text{d'ou} \quad [\delta] = \text{L}$$

d'autre part, $[\delta] = \sqrt{\frac{[Da]}{[2h]}}$

$$a \quad [a] = \frac{[j_Q]}{[grad(T)]} = \frac{[j_Q]}{\text{K} \cdot \text{L}^{-1}}$$

$$[h] = \frac{[j_{Q,at}]}{[T]} \quad \text{car} \quad j_{Q,at} = h(T(x) - T_a)$$

donc $\frac{[a]}{[h]} = \text{L}$ d'ou $\frac{[Da]}{[2h]} = \text{L}^2$ et d'ou

$$[\delta] = \text{L}$$

AN $\delta = 2 \text{ cm}$

pour $h = "h_n"$ (air naturel) en présence de ventilateurs

Q 4. Expliciter les conditions aux limites que doit vérifier le champ de température $T(x)$ en $x = 0$ et en $x = b$.

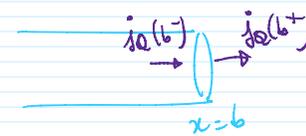
en $x = 0$, le contact parfait impose $T(x=0) = T_a$

en $x = b$, l'énoncé est moins explicite sur la modélisation retenue.

• de plus, au regard de "Figure 2" plus bas, $T(x=b)$ ne semble pas être imposée à T_a (car on voit que $T(x=b)$ dépend de b/δ).

→ pas de "contact parfait" entre l'ailette et l'air en $x = b$

→ utilisons alors la continuité du flux thermique:



dans le matériau / dans l'air à
 \Rightarrow loi de Fourier / \downarrow l'interface
 $j_Q(b^-) = j_Q(b^+) \Rightarrow$ loi de Newton

$$-\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=b^-} = h(T(x=b) - T_a)$$

Q 5. En précisant les approximations effectuées, obtenir une expression analytique approchée de $T(x)$ dans le cas où $b \gg \delta$. Vérifier la cohérence de cette expression avec la figure 2.

$\delta =$ "distance caractéristique d'atténuation de la température"

$\ast \quad b \gg \delta$ alors $T(x)$ ne varie quasiment plus au voisinage de $x = b$

$$d'ou \quad j_Q(x=b^-) = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=b^-} \rightarrow 0$$

$$d'ou \quad h(T(x=b) - T_a) \rightarrow 0$$

d'où $T(x=b) = T_a$ si $b \gg \delta$

Répondre donc le problème.

$$\frac{dT}{dx} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T(0) = T_d \\ T(b) = T_a \end{cases}$$

Equation homogène associée

$$\frac{dT}{dx} - \frac{T}{\delta^2} = 0$$

Equation caractéristique $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$

soit $r = \pm \frac{1}{\delta}$

donc $T_{hom} = A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta}$

solution particulière recherchée sous forme de cette (car 2nd membre cst)
 $\frac{dT_{part}}{dx^2} - \frac{T_{part}}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$

donc $T_{part} = T_a$

donc $T = T_{hom} + T_{part} = A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta} + T_a$

condition limite

$$\begin{cases} T(x=0) = A + B + T_a = T_d \\ T(x=b) = A e^{-b/\delta} + B e^{b/\delta} + T_a \approx B e^{b/\delta} + T_a = T_a \end{cases} \quad \begin{matrix} [*] \\ [**] \end{matrix}$$

$b/\delta \gg 1$

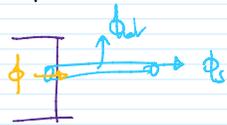
d'où $[**]$ donne $B=0$ et $[*]$: $A = T_d - T_a$

d'où : $T(x) = (T_d - T_a) e^{-x/\delta} + T_a$

d'où $\frac{T(x) - T_a}{T_d - T_a} = e^{-x/\delta}$; qui semble cohérent avec le tracé de la figure 2 pour $b/\delta = 10$.

Q 6. La figure 3 donne une représentation graphique de l'évolution de la résistance thermique d'une ailette cylindrique en fonction du rapport b/δ , pour différents matériaux. Interpréter physiquement l'existence d'une valeur asymptotique de R_{th} commune aux différents matériaux lorsque $b \ll \delta$; justifier sa valeur numérique.

si $b \ll \delta$, on voit d'après la figure 2 (pour $b/\delta = 0,1$) que T est uniforme dans la barre. Autrement dit le transfert thermique latéral est négligeable devant le transfert thermique à l'extrémité de l'ailette



(car δ est la distance caractéristique d'atténuation de T , due au flux latéral in : $b \ll \delta$: le flux latéral impacte peu le champ de T)

d'où $\phi = \phi_{ext} + \phi_{lat} = \phi_{ext} = h S (T(x=b) - T_a) = h S (T_d - T_a)$

d'où $R_{th} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_d - T_a}{\phi} = \frac{1}{h S}$

d'où $R_{th} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_d - T_a}{\phi} = \frac{1}{h S}$

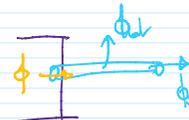
$T(x)$ uniforme si $b \ll \delta$
si le me dépend peu de la nature du métal / semi-conducteur (Si) ; ce que semblent suggérer les données à la fin de l'exercice, alors on a bien R_{th} indépendant du matériau lorsque $b \ll \delta$

AN avec substitutions ($h = \frac{1}{\delta}$)

$R_{th} = \frac{1}{h_r \pi a^2} = 1 \cdot 10^3 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
on retrouve la valeur du graphique.

Q 7. Retrouver, par le calcul, la valeur asymptotique de la résistance thermique R_{th} de l'ailette en silicium dans le cas où $b \gg \delta$.

si $b \gg \delta$, on a $T(x) = (T_d - T_a) e^{-x/\delta} + T_a$
à $\phi = \phi(x=0) = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{\lambda}{\delta} (T_d - T_a) S$



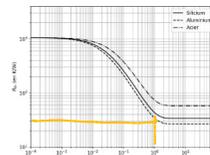
d'où $R_{th} = \frac{\delta}{\lambda S} = 0,03 \cdot 10^3 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
 $= 3,4 \cdot 10^1 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ avec 2CS.

Q 8. En pratique, les ailettes sont réalisées en aluminium et leur longueur est fixée à $b = 2 \text{ cm}$. En vous appuyant sur la figure 3, justifier ces choix, puis estimer le nombre d'ailettes (de rayon $a = 1 \text{ mm}$) à associer à un microprocesseur dissipant une puissance thermique de 200 W pour que la température de ce dernier n'excède pas 60 °C en régime stationnaire de fonctionnement. Commenter.

Pour l'Aluminium, on trouve $\delta = 2 \text{ cm}$

et donc $\frac{b}{\delta} = 1$

La figure 3 nous indique alors que



$R_{th} \approx 3,4 \text{ K/W} = \frac{T_d - T_a}{\phi}$

où ϕ est la puissance évacuée par 1 ailette.

En, avec N ailettes et une puissance totale à évacuer

$\phi_{tot} = 200 \text{ W}$; on a $\phi_{tot} = N \phi = N \frac{T_d - T_a}{R_{th}}$

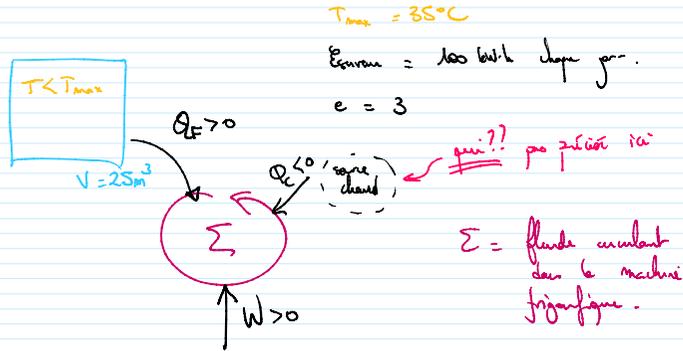
S: $T_d < 60^\circ\text{C}$, et en supposant $T_a = 20^\circ\text{C}$

on a $N = \frac{P_{\text{ext}} R_{\text{th}}}{T_d - T_a} > \frac{200 \times 30}{40} = 150$

150 ailettes paraissent nécessaires, ce qui semble être. Mais leur rayon étant de 1mm, c'est mesurable.

*NB je suis obligé de mettre 30S
ici alors que depuis le début, on a 1mm
je travaillais avec 1cs.
On pouvait travailler avec 20S depuis le début aussi, ce qui serait un meilleur compromis...*

Q 9. La solution première de refroidissement de la salle repose sur l'utilisation d'un système de conditionnement d'air (parfois désigné « climatiseur » par abus de langage). Estimer le coût annuel, en euros, de cette solution en considérant que le système de conditionnement d'air fonctionne en permanence et que son efficacité — ou COP (Coefficient de Performance) — est égale à 3.



La puissance constante dans ici la source froide de la machine frigorifique représentée ci-dessus.

Par définition $e = \frac{Q_E}{W}$

Sur une année $W^{an} = \frac{Q_E^{an}}{e} = \frac{365 \times \text{Energie/jour}}{e}$

faisant l'hypothèse qu'il faut évacuer toute l'énergie thermique apportée par les occupants (de sorte que la température de la pièce reste constante).

Soit un coût annuel $ca = p \times W^{an} = 0,17 \times \frac{365 \times 100}{3}$
 prix en kWh en kWh $ca = 2,1 \text{ k€}$

Q 10. L'air de la pièce est modélisé par un gaz parfait diatomique, à la pression atmosphérique et à la température T_{max} . Exprimer, puis évaluer numériquement, la masse volumique ρ_{air} de l'air dans ces conditions. En déduire le débit de masse d'air D_m , en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$, brassé par le ventilateur dans ces mêmes conditions.

loi de gaz parfait: $PV = nRT = \frac{m}{M} RT$

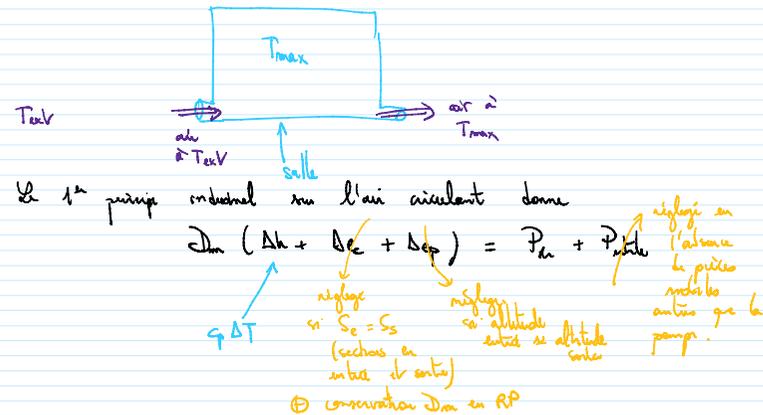
Donc $\rho_{\text{air}} = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \approx \rho = 0,2 M_{\text{O}_2} + 0,8 M_{\text{N}_2} = 29 \text{ g/mol}$

d'où $\rho_{\text{air}} = \frac{1 \times 10^5 + 29 \cdot 10^3}{8,31 \times (273 + 35)} \text{ kg/m}^3 = 1,1 \text{ kg/m}^3$

Le plus $D_m = \rho_{\text{air}} D_r = 0,84 \cdot 10^3 \text{ kg/s} = 0,26 \text{ kg/s}$

Q 11. À l'aide d'un modèle simple, estimer la période de l'année sur laquelle le système de free-cooling est fonctionnel. En déduire le gain annuel en euros obtenu grâce à l'installation du système de free-cooling dans cette salle informatique.

Modélisons le système « free-cooling » par de l'eau à la température T_{ext} entrant dans la salle (température T_{max}) et sortant à la température T_{max} .



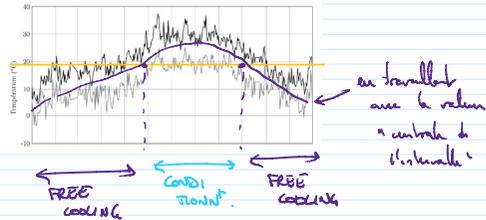
d'où $D_m \rho (T_{\text{max}} - T_{\text{ext}}) = \frac{P_{\text{th}}}{c_p}$
cas physique caractéristique: chaque degré de liberté quadratique (5 par 1P diatomique) compte pour R/2 dans C_v, molaire
 $\Rightarrow C_{v,m} = \frac{5R}{2}$
 $\Rightarrow C_{p,m} = C_{v,m} + R = \frac{7}{2}R$
puissance thermique captée par l'eau... et dans l'énergie par le free cooling.

$$\Rightarrow \gamma = \frac{7R}{2M} \text{ (massique)} = 1,2 \cdot 10^8 \text{ J.kg}^{-1}$$

$$\text{or } P_{th} = \frac{100 \text{ kW.h}}{24 \text{ h}} = 4,2 \text{ kW} \text{ à évaluer. (} \gg \text{ } \mathcal{P}_v \text{ dans hypothèse Pointe réfrigérée etc.)}$$

d'où $T_{max} - T_{min}$ doit être supérieur à $\frac{P_{th}}{2m\gamma} = 16^\circ\text{C}$.

soit $T_{min} < 15^\circ\text{C}$



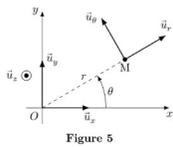
Donc pendant 8 mois : free cooling cost = $p + P_v \cdot \Delta t = 0,17 + 0,06 \cdot 8 \cdot 30 = 1,71 \text{ €}$
 4 mois : condensation cost = $\frac{2,1 \cdot 10^3}{3} = 700 \text{ €}$

soit cost = 0,8 k€

donc $\frac{\text{cost (avec free cooling)}}{\text{cost (sans free cooling)}} = 0,4$: ça vaut le coup.

gain en euros = 1 k€

Q 12. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.



$i \cdot i = 1$, d'après l'énoncé

$$r = R_T + h = \text{cste}$$

on a donc un mouvement circulaire.

systeme f point M f référentiel géocentrique support galiléen 2^{ème} loi de Newton.

$$m_0 \vec{a} = \vec{F}_{grav} = -\frac{G m_0 M_T}{r^2} \vec{ur}$$

or $\vec{OM} = r \vec{ur}$ donc $\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

$$\text{et } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2 r \vec{ur}$$

$$\text{d'où } m_0 r \begin{pmatrix} -\ddot{\theta} \\ \dot{\theta}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{G m_0 M_T}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui donne $\ddot{\theta} = 0$, d'où $\dot{\theta} = \text{cste}$ et $v = r \dot{\theta} = \text{cste}$

Le mouvement du satellite est donc uniforme.

Q 13. Déterminer l'expression de la vitesse orbitale du satellite v_0 sur son orbite circulaire en fonction de la constante de gravitation universelle G et des paramètres M_T , R_T et h .

sur \vec{ur} , la 2^{ème} loi de Newton donne

$$m_0 \dot{v}_0^2 = \frac{G M_T m_0}{r^2}$$

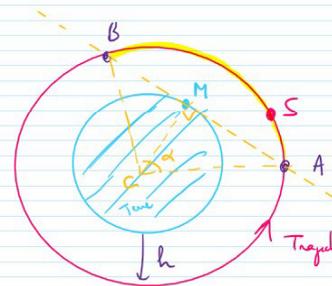
d'où $v_0 = \sqrt{\frac{G M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}}$

Q 14. Évaluer numériquement la vitesse v_0 , ainsi que la période de révolution T_0 correspondante.

$$v_0 = 7,58 \text{ km/s} = \frac{2\pi R}{T_0}$$

$$T_0 = \frac{2\pi(R_T + h)}{v_0} = 5,89 \cdot 10^3 \text{ s}$$

Q 15. Discuter quantitativement l'affirmation selon laquelle « la vitesse orbitale [rend] toute communication radio directe avec le sol impossible à établir plus d'une minute ».



La communication entre un point M fixe sur le sol et le satellite S n'est possible que lorsque S est dans la portion de trajectoire le portion de trajectoire comprise entre A et B (surlignée en jaune)

Le durée pendant laquelle reste le satellite dans cette zone est

$$\Delta t = \frac{\widehat{AB}}{v_0} \text{ où } \widehat{AB} \text{ est la longueur de l'arc}$$

$$\widehat{AB} = (R_T + h) \alpha$$

or dans le triangle CMA : $\cos(\alpha) = \frac{R_T}{R_T + h}$

donc $\widehat{AB} = 2(R_T + h) \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)$

et donc $\Delta t = \frac{2(R_T + h) \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)}{\sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}}} = 13 \text{ min avec les données}$

mais il faudra d'avoir une émission (récepteur isolé en M. si l'antenne en M est directionnelle, elle réduit la zone de point de vue du satellite pour avoir une communication ; et donc

ne bouce le satellite par avoir une communication ; et donc
 résul avec de pour attendre q minutes.

Q 16. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide et établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide, en l'absence de charge et de courant.

MG $\text{div}(\vec{E}) = 0$ car $\rho = 0$
 MT $\text{div}(\vec{B}) = 0$
 TB $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ car $\vec{j} = \vec{0}$
 TE $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

on $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$
 $\text{rot}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

d'où $\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Q 17. Établir la relation de dispersion de l'onde de champ électrique complexe $\vec{E}(M, t)$ dans le vide. Le vide est-il un milieu dispersif ?

$\vec{E} = E e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_x$

donc $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 \vec{E}$

de plus, $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$

l'équation d'onde devient alors $k^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E}$

soit $k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$ d'où $k = \pm \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \omega$

Ici on prouve, $k > 0$ car on s'intéresse à une onde se propageant dans le sens des x croissants

donc $k = \frac{\omega}{c}$ soit la relation de dispersion attendue.

Q 18. Déterminer, en notation complexe, le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ associé au champ électrique $\vec{E}(M, t)$.

On a vu que \vec{E} qui est une onde plane progressive harmonique, on peut donc utiliser la relation de structure

$\vec{B} = \frac{k \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} \vec{u}_x \wedge E e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$

$\vec{B} = \frac{\omega}{c} E e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_z$

Q 19. En admettant que le rapport des amplitudes du champ électrique et du champ magnétique dans le plasma soit assimilable à celui dans le vide, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant ceux de la partie électrique.

Dans le vide, $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ d'après la question précédente.

Comparons les composantes magnétiques et électriques de la force de Lorentz, s'incrémentant sur une particule de charge q

Comparons les composantes magnétiques et électriques de la force de Lorentz, s'incrémentant sur une particule de charge q

$\frac{\|\vec{f}_{mag}\|}{\|\vec{f}_{elec}\|} = \frac{\|q \vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|q \vec{E}\|} \approx \frac{q \|\vec{v}\| \|\vec{B}\|}{q \|\vec{E}\|} \approx \frac{\|\vec{v}\|}{c} \ll 1$ car $\|\vec{v}\| \ll c$
 (particules non relativistes)

D'où $\|\vec{f}_{mag}\| \ll \|\vec{f}_{elec}\|$

Q 20. En admettant que l'accélération d'un électron du plasma soit donnée par $\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t}$, déterminer l'expression du vecteur vitesse complexe \vec{v}_e d'un électron, positionné en M à l'instant t , en fonction de m_e , e , ω et $\vec{E}(M, t)$. De la même façon, donner l'expression du vecteur vitesse \vec{v}_c d'un cation. Que peut-on dire de $|\vec{v}_c|$ par rapport à $|\vec{v}_e|$?

oppose d'électrons
 référentiel géocentrique galiléen

2ème loi de Newton

$m_e \vec{a} = \sum \vec{f}_{at} = \vec{f}_{elec} = -e \vec{E}$

donc $m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e \vec{E}$

or, en régime sinusoïdal forcé : $\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = i\omega \vec{v}_e$

D'où $m_e i\omega \vec{v}_e = -e \vec{E}$

$\vec{v}_e = \frac{-e}{m_e i\omega} \vec{E}$

Pour un cation de charge $+e$ et de masse m_c , la même démarche

donne $\vec{v}_c = \frac{+e}{m_c i\omega} \vec{E}$

$m_c \gg m_e$ donne $\|\vec{v}_e\| \ll \|\vec{v}_c\|$

Q 21. Justifier qu'il existe dans le plasma une densité de courant $\vec{j}(M, t)$. En déduire, en utilisant les résultats précédents, que l'expression de la conductivité complexe du plasma notée γ s'écrit de façon approchée

$\gamma \approx -i \frac{n_e e^2}{m_e \omega}$

$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_{cations} = (-e n_e \vec{v}_e + e n_c \vec{v}_c)$
 $= -n_e e \vec{v}_e + n_c e \vec{v}_c$
 $= -n_e e (\vec{v}_e - \vec{v}_c) \approx -n_e e \vec{v}_e$ car $\|\vec{v}_e\| \ll \|\vec{v}_c\|$

D'où $\vec{j} = +n_e e^2 \vec{E} = -i \frac{n_e e^2}{m_e \omega} \vec{E}$

d'où
$$\vec{f} = \frac{+n_e e^2}{m_e i \omega} \vec{E} = -i \frac{n_e e^2}{m \omega} \vec{E}$$

Q 22. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

$$\langle p_V \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{f} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\gamma \vec{E} \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\|\vec{E}\|^2 \gamma) = 0$$

$\langle p_V \rangle = 0$

Aucune puissance n'est dissipée dans le plasma.

Cela est dû au fait que les charges vibrent en quadrature par rapport au champ électrique (comme dans une inductance ou une capacité).

Q 23. Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M, t)$ dans le plasma.

MG: $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ (plasma neutre)

MT: $\text{div}(\vec{B}) = 0$

MF: $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

MA: $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

rot(MF): $\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}$

$\text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\vec{B}) = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

d'où
$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Q 24. En déduire l'expression de k^2 dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique, dite pulsation plasma, notée ω_p , dont on fournira l'expression en fonction des grandeurs utiles parmi $c, \epsilon_0, \epsilon_p, m_e$ et n_e .

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$$

d'où
$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

L'équation d'onde de Q23 devient alors

L'équation d'onde de Q23 devient alors

$$-k^2 \vec{E} = \mu_0 \gamma i\omega \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E}$$

$$-i \frac{n_e e^2}{m \omega}$$

donc
$$-k^2 = \mu_0 \frac{n_e e^2}{m_e} - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$$

soit
$$k^2 = \underbrace{\mu_0 \epsilon_0}_{1/c^2} \left(\omega^2 - \underbrace{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}_{\omega_p^2} \right)$$

donc
$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

avec
$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}}$$

Q 25. Expliciter l'expression de k et en déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. On fera apparaître une épaisseur caractéristique δ , que l'on définira et que l'on exprimera en fonction de ω, ω_p et c .

ici $\omega < \omega_p$ donc $k^2 < 0$ donc $k = \pm i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$

donc
$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t \mp i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x)} \vec{u}_y$$

$$= E_0 e^{\pm \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x} e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

$k = +i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$ nous donne à un champ \vec{E} qui décroît lorsque $x \rightarrow \infty$, ce qui est une solution non physiquement acceptable.

→ on garde donc $k = -i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$ (NB le signe de $\text{Im}(k)$ est le plus important pour l'énergie: la justification n'étant donc pas nécessaire)

on déduit
$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) = E_0 e^{-\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x} \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

(NB onde stationnaire spatialement amortie → onde évanescente)
$$e^{-x/\delta} \text{ avec } \delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$ étant une pseudo-onde ($k \in \mathbb{C}$), on peut utiliser la relation de circulation dans Γ :

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{E} = -i \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega} \frac{1}{\omega} E_0 e^{-x/\delta} e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \frac{-i}{\omega \delta} E_0 e^{-x/\delta} e^{i\omega t} \vec{u}_y = \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - \pi/2)} \vec{u}_y$$

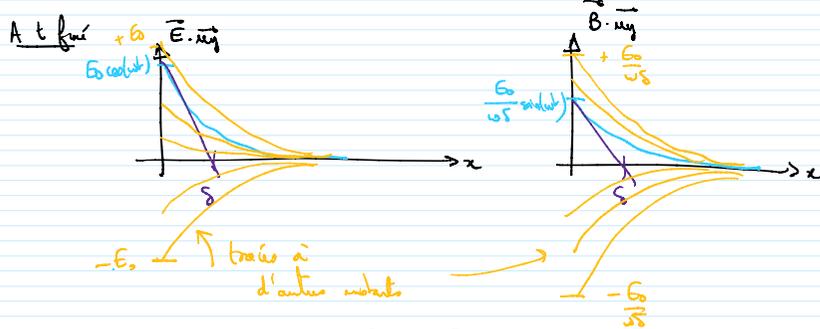
d'où
$$\vec{B} = \text{Re}(\vec{B}) = \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - \pi/2) \vec{u}_y$$

d'où $B = \text{Re}(B) = \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - \pi/2) \vec{u}_y$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-x/\delta} \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

Q 26. Représenter l'évolution spatiale à un instant quelconque des profils des champs électrique et magnétique de l'onde et décrire leur évolution temporelle.

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) e^{-x/\delta} \vec{u}_y$$



En un point donné, \vec{E} et \vec{B} vibrent sinusoidalement, en quadrature.

Q 27. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à cette onde. Caractériser l'onde obtenue.

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{E_0 e^{-x/\delta} e^{i\omega t} \vec{u}_y \wedge \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-x/\delta} e^{-i(\omega t - \pi/2)} \vec{u}_y}{\mu_0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{E_0^2}{\mu_0 \omega \delta} e^{-2x/\delta} e^{i\pi/2} \vec{u}_z \right) = 0 = \langle \vec{\pi} \rangle$$

intégrer par

Pas de déplacement de puissance dans le milieu (on retrouve le caractère stationnaire de l'onde évanouissante).

Q 28. De la même façon que pour le premier cas, expliciter l'expression de k . En déduire les expressions des champs réels $E(M, t)$ et $B(M, t)$, puis établir l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} > 0 \rightarrow k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

On s'intéresse à une onde se propageant dans le sens des $x \rightarrow$ donc on prend $k > 0$ (car $v_p = \frac{\omega}{k} > 0$)

$$d'où \quad k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

$$\text{Donc} \quad \vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} x)} \vec{u}_y$$

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} x) \vec{u}_y$$

OPPH $\Rightarrow \vec{B} = \frac{R \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega c} \vec{u}_x \wedge E_0 \cos(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} x) \vec{u}_y$

$$\vec{B} = \frac{E_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega c} \cos(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} x) \vec{u}_z$$

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2 \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\mu_0 \omega c} \cos^2(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} x) \vec{u}_x$$

$$d'où \quad \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \vec{u}_x$$

Q 29. Déterminer l'expression de la vitesse de phase v_p ainsi que celle de la vitesse de groupe v_g en fonction de ω_p , ω et c . Tracer v_p et v_g en fonction de ω . Le milieu est-il dispersif? Comparer ces vitesses à c et commenter.

$$v_p = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \text{ dépend de } \omega \rightarrow \text{milieu dispersif.}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \text{ or } k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} \text{ donc } k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$$

différencions

$$2k dk c^2 = 2\omega d\omega$$

$$d'où \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega} c^2 = \frac{c^2}{v_p}$$

$$v_g = \frac{c^2}{v_p} = \frac{c \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega}$$

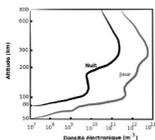
on a donc $v_g v_p = c^2$ avec $v_p > c$ et $v_g < c$



v_g étant la vitesse d'une OPPH, et celle-ci n'ayant pas de réalité physique (excursions temporelle et spatiale ∞), il n'est pas gênant d'avoir $v_g < c$ la vitesse de groupe, qui correspond à la vitesse d'un paquet d'onde, est bien inférieure à c .

Q 30. Calculer la valeur numérique de la fréquence minimale que doit posséder l'onde pour atteindre un satellite relais géostationnaire à partir de la surface de la Terre. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette fréquence?

• l'orbite géostationnaire est à une altitude de 36000 km



- L'orbite géostationnaire est à une altitude de 36000 km (c'est-à-dire "Le Monde"). (c'est résultat classique d'examen)
- on ne dépend de l'altitude dans ϵ_0 dépend de l'altitude.

Pour communiquer avec le satellite, il faut traverser la ionosphère \forall altitude $h \leq 36000$ km

donc il faut que la perturbation ω de l'onde vérifie

$$\omega > \omega_p(h) \quad \forall h \leq 36000 \text{ km.}$$

$$\text{soit } \omega > \omega_p^{\text{max}} = \sqrt{\frac{n_e^{\text{max}} e^2}{m_e \epsilon_0}}$$

avec $n_e^{\text{max}} \approx 0,8 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$ (300 km le jour sur figure 6)

AN

$$\omega > 0,2 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

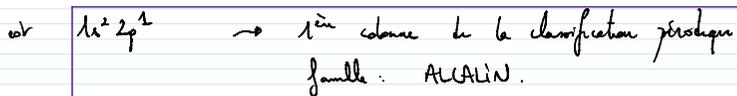
soit $f > 0,03 \text{ GHz}$.

cohérent (radio AM $\approx 100 \text{ kHz}$ ne travail pas ionosphère FM $\approx 100 \text{ MHz}$ travail)

Q 31. Donner la configuration électronique de l'élément lithium dans l'état fondamental. À quelle famille appartient-il ?



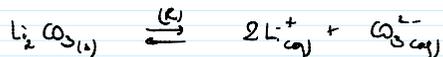
D'après la règle de Klechkowski, sa structure électronique



Q 32. Justifier le caractère réducteur de lithium. Quel ion le lithium peut-il former le plus facilement ?

Afin d'atteindre la structure électronique d'un gaz noble (par l'exemple ici de l'hélium $1s^2$), Li va "aisément" perdre un électron, d'où son caractère réducteur: il formera alors l'ion Li^+ .

Q 33. Écrire l'équation de la réaction (R) de dissolution du carbonate de lithium.



Q 34. Calculer la valeur de l'enthalpie standard de réaction associée à la réaction (R). Commenter son signe.

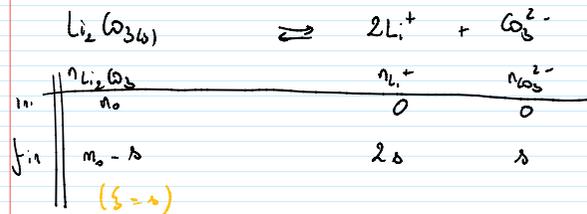
En l'absence de tables thermodynamiques dans le dossier, et sachant que $\Delta_r H^\circ$ est associé aux "effets thermiques", c'est cette information qu'il va falloir utiliser:

Le carbonate de lithium Li_2CO_3 est un composé peu soluble dans l'eau. Sa solubilité est égale à $13,1 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ à 20°C et vaut $7,2 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ à 100°C .

$$\text{D'après la loi de Van't Hoff: } \frac{d \ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$$

Donc si on arrive à relever K° à 2, on pourra probablement déterminer $\Delta_r H^\circ$.

Considérons $V=1\text{L}$ d'eau, dans lequel on a ajouté une quantité m_0 de Li_2CO_3 supérieure à la solubilité s : il reste du Li_2CO_3 en solution, et on va pouvoir "écrire le K_s ".



$$\text{A l'équilibre } K_s = Q = [\text{Li}^+]^2 [\text{CO}_3^{2-}] = 4s^2 \cdot s$$

$$\text{d'où } \ln K_s = 2 \ln(4) + 3 \ln(s)$$

de la loi de Van't Hoff donc alors

$$3 \frac{d \ln s}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$$

$$\text{soit } 3 \int_{T=20^\circ\text{C}}^{T=100^\circ\text{C}} d \ln(s) = \frac{\Delta_r H^\circ}{R} \int_{T=20^\circ\text{C}}^{T=100^\circ\text{C}} \frac{dT}{T^2}$$

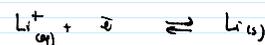
supposé indépendant de T (approximation d'Ellingham)

$$\text{Donc } 3 \ln \left(\frac{s(100^\circ\text{C})}{s(20^\circ\text{C})} \right) = \frac{\Delta_r H^\circ}{R} \left[-\frac{1}{T} \right]_{20^\circ\text{C}}^{100^\circ\text{C}} = \frac{\Delta_r H^\circ}{R} \left[\frac{1}{298} - \frac{1}{373} \right]$$

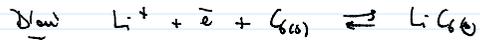
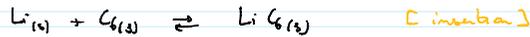
$$\text{D'où } \Delta_r H^\circ = \frac{3R T_{100} T_{20}}{T_{100} - T_{20}} \ln \left(\frac{s(100^\circ\text{C})}{s(20^\circ\text{C})} \right)$$

$$= -20 \text{ kJ/mol} < 0$$

Réaction de dissolution endothermique - cohérent avec la diminution de la solubilité avec T. En effet, d'après la loi de Van't Hoff, c'est le sens en déduisant (c'est donc inversement à ce qui est favorisé quand T \uparrow , ce qui suggère bien de lithium dans le graphite, puis en déduire la demi-équation électronique bilan modélisant l'ensemble de ces phénomènes pendant la charge.



[réduction Li^+]



Q 36. Déterminer le nombre maximum d'atomes de lithium qui peuvent être insérés dans 1g de carbone solide. En déduire la charge électrique maximale que peut délivrer l'électrode de graphite lors de la décharge en A.h, par kilogramme de graphite.

$$n_{Li}^{max} = \frac{n_C}{6} \quad \text{car on a 1 atome de Li pour 6 atomes de C dans une maille occupée par Li.}$$

$$d'autre \quad N_{Li}^{max} = N_A * n_{Li}^{max} = N_A \frac{m_C}{6} = \frac{N_A}{6} \frac{m}{M_C} = 2,4 \cdot 10^{24} \text{ atomes de Li au max dans 1g de graphite}$$

Chaque atome de Lithium libère 1 e lors de l'oxydation



$N_{e^-}^{max} = N_{Li}^{max}$ et donc la charge délivrable correspondante

$$Q^{1g} = N_{Li}^{max} * e = 1,4 \cdot 10^3 C = 1,4 \cdot 10^3 A.s \quad \leftarrow \frac{1}{3600}$$

$$Q^{1g} = 0,37 \text{ A.h}$$

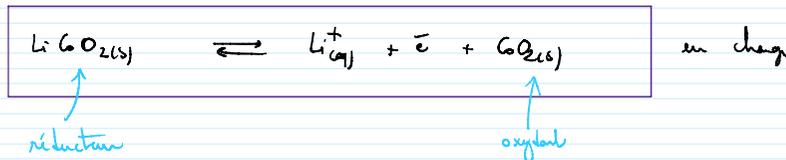
$$\text{et donc } Q^{1kg} = 0,37 \text{ kA.h}$$

Q 37. Les espèces $LiCoO_2$ et CoO forment un couple redox. Identifier l'oxydant et le réducteur dans ce couple sachant que le nombre d'oxydation dans l'espèce $LiCoO_2$ est égal à la charge de l'ion monovalent le plus stable qu'il forme. En déduire la demi-équation électronique qui se produit lors de la charge au niveau de l'électrode contenant du cobalt.

de qui?
de Co à priori
(commun aux deux)

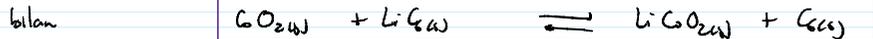
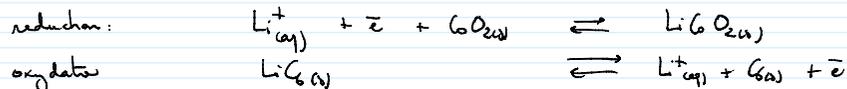
de l'élément Co ou Li?
En l'absence d'informations sur Co, je suppose que l'on parle de Li ... qui forme donc l'ion stable Li^+ .

on avertit alors



Q 38. Écrire l'équation bilan du fonctionnement de l'accumulateur lors de la décharge et lors de la charge.

le charge (figure 7 : Li^+ va du pôle - vers +)



bilan



(1e échangé)
1Li+

Pour le charge, on a donc la réaction inverse:



1e ab
1Li+ échangé

Q 39. Déterminer la masse minimale de graphite nécessaire pour faire fonctionner des batteries de sorte qu'elle débite un courant de 10 A lorsque le satellite est dans l'ombre.

chargé la batterie doit donc être capable de délivrer $I = 10 \text{ A}$ pendant $\Delta t = 35 \text{ min}$.

Sait une charge nécessaire $q = I \Delta t = 5,8 \text{ A.h}$

la masse de graphite nécessaire minimale sera

$$\text{donc } m = \frac{q}{0,37} = 16 \text{ g}$$