

CONCOURS COMMUN
Mines-Ponts
CCMP

ÉPREUVE DE PHYSIQUE 1 -MP

MOHAMED AFEKIR
LYCÉE D'EXCELLENCE DE BENGUÉRIR
cpgeafek@gmail.com
Si vous avez des remarques, n'hésitez pas à me contacter.

L'anémométrie à fil chaud

I.— Étude énergétique de l'anémomètre

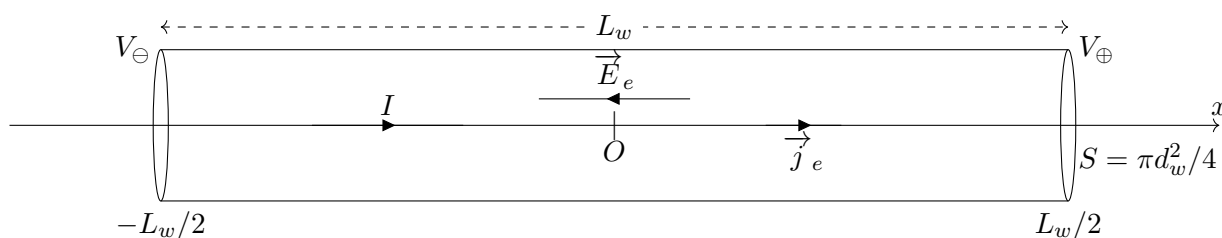
I.A.— Bilan d'énergie dans le fil chaud

□ 1 —

- La loi d'ohm locale :

$$\vec{j}_e(M, t) = \gamma(M) \vec{E}(M, t) \quad ; \quad \begin{cases} \vec{j}_e(M, t) : \text{vecteur densité de courant (courant volumique), } A.m^{-2} \\ \gamma(M) : \text{conductivité électrique, } S.m^{-1} \\ \vec{E}_e(M, t) : \text{champ électrique responsable du courant électrique, } V.m^{-1} \end{cases}$$

- Résistance électrique R_w :



- $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_{\oplus} - V_{\ominus} = E_e L_w = U,$

- $I = \oiint \vec{j}_e \cdot d\vec{S} = j_e S = j \pi d_w^2 / 4,$

- $j_e = \gamma_w E_e = \frac{E_e}{\rho_w},$

La résistance électrique R_w du fil :

$$\begin{aligned} R_w &= \frac{U}{I} \\ &= \frac{E_e L_w}{j \pi d_w^2 / 4} \\ &= \frac{4 \rho_w L_w}{\pi d_w^2} \end{aligned}$$

- La puissance $\mathcal{P}_J$ dissipée par effet Joule dans le fil :

$$\mathcal{P}_J = R_w I^2 = \frac{4\rho_w L_w}{\pi d_w^2} I^2$$

- La puissance volumique $\mathcal{P}_J$ dissipée par effet Joule :

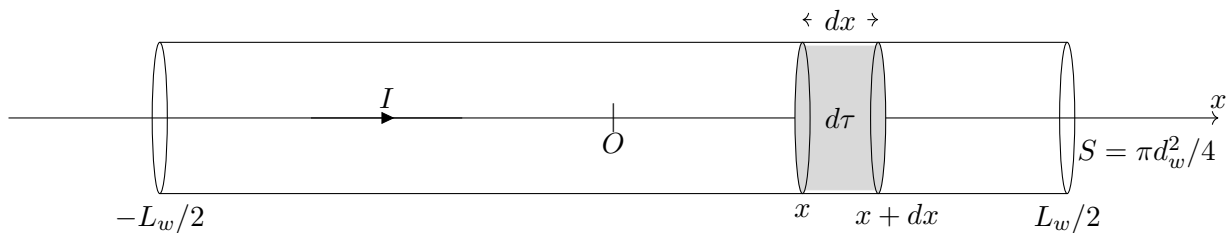
$$\mathcal{P}_v = \frac{d\mathcal{P}_J}{d\tau} = \frac{\mathcal{P}_J}{L_w} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\mathcal{P}_J}{SL_w} = \frac{16\rho_w}{\pi^2 d_m^4} I^2$$

□ 2 —

- La loi de FOURIER :

$$\vec{j}_{th}(M, t) = -\lambda(M) \overrightarrow{\text{grad}} T(M, t) \quad ; \quad \begin{cases} \vec{j}_{th}(M, t) : \text{vecteur densité de courant thermique, } W.m^{-2} \\ \lambda(M) : \text{conductivité thermique, } W.m^{-1}.K^{-1} \\ T(M, t) : \text{Champ de température absolue, } K \end{cases}$$

- La loi de FOURIER est une loi phénoménologique : elle décrit le phénomène de transfert thermique sans se baser sur la connaissance du mécanisme sous-jacent.
- Chaque section est une isotherme et la conduction thermique est unidimensionnelle.
- Équation de diffusion thermique :



Le premier principe de la thermodynamique appliqué au système (Σ) de volume $d\tau = Sdx$, d'énergie interne $U_\Sigma(t)$, au cours de sa transformation entre les instants t et $t + dt$:

$$dU_\Sigma = U_\Sigma(t + dt) - U_\Sigma(t) = \delta U^e + \delta U^p$$

avec :

- δU^e est l'énergie interne **échangée** par le système à travers la surface délimitant (Σ) ;
- δU^p est l'énergie interne **produite** ou **créée** dans le volume $d\tau$.

$$\frac{dU_\Sigma}{dt} = \frac{\delta U^e}{dt} + \frac{\delta U^p}{dt} \Rightarrow \Phi_\Sigma = \Phi_{ech} + \Phi_p \quad ; \quad \begin{cases} \Phi_\Sigma : \text{la puissance stockée dans } (d\tau) \\ \Phi_\Sigma = \mu_w c_w d\tau \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right) \\ \Phi_{ech} : \text{la puissance échangée à travers } (S) \\ \Phi_{ech} = j_{th}(x, t)S - j_{th}(x + dx, t)S = - \left(\frac{\partial j_{th}(x, t)}{\partial x} \right) S dx \\ \Phi_p : \text{la puissance produite dans } (d\tau) \\ \Phi_p = \mathcal{P}_v d\tau \end{cases}$$

Soit :

$$\mu_w c_w \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right) = - \left(\frac{\partial j_{th}(x, t)}{\partial x} \right) + \mathcal{P}_v \quad \text{et} \quad j_{th}(x, t) = -\lambda_w \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)$$

d'où :

$$\mu_w c_w \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right) = \lambda_w \left(\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right) + \mathcal{P}_v$$

□ **3** —

- L'unité de h est $W.m^{-2}.K^{-1}$.
- h augmente avec la vitesse V de l'écoulement
- quant V augmente, la température T_w diminue.

□ **4** — En régime permanent la puissance stockée dans l'élément de volume $d\tau = Sdx$ est nulle, soit le bilan :

$$\begin{aligned}
 0 = \Phi_{ech} + \Phi_p \quad \text{avec} \quad \Phi_{ech} &= \Phi_{ech,cd} + \Phi_{ech,cv} \\
 &= - \left(\frac{dj_{th}(x)}{dx} \right) Sdx - \delta \dot{Q}_f \\
 &= - \left(\frac{dj_{th}(x)}{dx} \right) Sdx - h(T_w - T_f) 2\pi r_w dx \quad \text{avec} \quad r_w = d_w/2 = \sqrt{S/\pi}
 \end{aligned}$$

Équation aux dérivées partielles vérifiée par $T_w(x, t)$:

$$\begin{aligned}
 0 &= - \left(\frac{dj_{th}(x)}{dx} \right) Sdx - h(T_w - T_f) \pi d_w dx + \mathcal{P}_v Sdx \\
 j_{th}(x) = -\lambda_w \frac{dT_w(x)}{dx} \quad \Rightarrow \quad 0 &= \lambda_w \left(\frac{d^2 T_w(x)}{dx^2} \right) - \frac{4h}{d_w} (T_w - T_f) + \frac{16\rho_w}{\pi^2 d_m^4} I^2
 \end{aligned}$$

D'où l'équation :

$$\frac{d^2 T_w(x)}{dx^2} - \frac{4h}{\lambda_w d_w} (T_w(x) - T_f) + \frac{16\rho_w}{\pi^2 d_m^4 \lambda_w} I^2 = 0$$

□ **5** — Avec $T_1(x) = T_w(x) - T_f$ et $\rho_w = \rho_f (1 + \alpha(T_w(x) - T_f))$ on peut écrire l'équation différentielle précédente sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 T_1(x)}{dx^2} - \frac{4h}{\lambda_w d_w} T_1(x) + \frac{16}{\pi^2 d_m^4 \lambda_w} I^2 \rho_f (1 + \alpha T_1(x)) &= 0 \\
 \frac{d^2 T_1(x)}{dx^2} + T_1(x) \underbrace{\left(-\frac{4h}{\lambda_w d_w} + \frac{16\rho_f \alpha}{\pi^2 d_m^4 \lambda_w} I^2 \right)}_{K_1} + \underbrace{\frac{16\rho_f}{\pi^2 d_m^4 \lambda_w} I^2}_{K_2} &= 0
 \end{aligned}$$

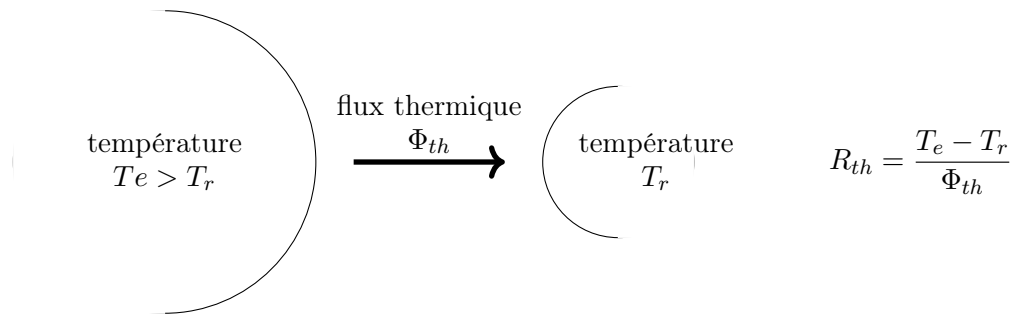
Soit :

$$\frac{d^2 T_1(x)}{dx^2} + K_1 T_1(x) + K_2 = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_2 = \frac{16\rho_f}{\pi^2 d_m^4 \lambda_w} I^2 \\ K_1 = -\frac{4h}{\lambda_w d_w} + \frac{16\rho_f \alpha}{\pi^2 d_m^4 \lambda_w} I^2 = -\frac{4h}{\lambda_w d_w} + \alpha K_2 \\ \Rightarrow \quad \alpha K_2 = K_1 + \frac{4h}{\lambda_w d_w} \end{cases}$$

$$K_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha K_2 < \frac{4h}{\lambda_w d_w} \quad \Rightarrow \quad h > \frac{4\alpha\rho_f}{\pi^2 d_w^3} I^2.$$

□ **6** — On pose $\ell_c = \frac{1}{\sqrt{|K_1|}} \Rightarrow K_1 = -|K_1| = \frac{1}{\ell_c^2}$.

- La résistance thermique R_{th} est la capacité d'un matériau à résister aux variations des échanges thermiques. Elle s'exprime en $K.W^{-1}$.



- Contact sans résistance thermique : transfert intégrale et instantané du flux thermique et continuité de la température.
- Solution générale de l'équation :

$$\frac{d^2 T_1(x)}{dx^2} - \frac{T_1(x)}{\ell_c^2} + K_2 = 0$$

$$T_1(x) = A_1 \cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right) + B_1 \sinh\left(\frac{x}{\ell_c}\right) + \ell_c^2 K_2$$

A_1 et A_2 sont deux constantes qui dépendent des conditions aux limites.

- Conditions aux limites : $T_w(-L_w/2) = T_w(+L_w/2) = T_f$, soient :

$$0 = A_1 \cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) - B_1 \sinh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) + \ell_c^2 K_2 \quad (\text{C.L1})$$

$$0 = A_1 \cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) + B_1 \sinh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) + \ell_c^2 K_2 \quad (\text{C.L2})$$

(C.L2)-(C.L1) donne : $2B_1 \sinh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{B_1 = 0}$. Il ne reste, alors dans $T_1(x)$, que le terme en cosinus hyperbolique.

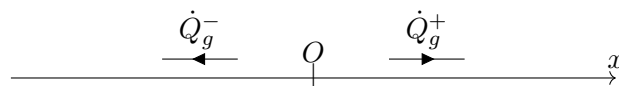
- Profil de température $T_w(x)$:

$$T_1(x) = A_1 \cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right) + \ell_c^2 K_2 \Rightarrow T_w(x) = T_f + \ell_c^2 K_2 + A_1 \cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right)$$

De la relation (C.L1) ou de la relation (C.L2), on déduit que $A_1 = -\frac{\ell_c^2 K_2}{\cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)}$. Soit :

$$T_w(x) = T_f + \ell_c^2 K_2 - \ell_c^2 K_2 \frac{\cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right)}{\cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)} = T_f + \ell_c^2 K_2 \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right)}{\cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)} \right]$$

□ **7** — Puissance thermique $\dot{Q}_g$ cédée par le fil :



$$\begin{aligned} \dot{Q}_g &= \dot{Q}_g^+ + \dot{Q}_g^- = S j_{th}(x = L_w/2) - S j_{th}(x = -L_w/2) \\ &= -\lambda_w S \left[\left(\frac{dT_w}{dx} \right) (x = L_w/2) - \left(\frac{dT_w}{dx} \right) (x = -L_w/2) \right] \\ \dot{Q}_g &= \frac{1}{2} \pi \ell_c K_2 \lambda_w d_w^2 \tanh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) \end{aligned}$$

□ 8 — La moyenne spatiale $\langle T_w \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle T_w \rangle = \langle T_w \rangle_x &= \frac{1}{L_w} \int_{-L_w/2}^{L_w/2} T_w(x) dx = T_f + \ell_c^2 K_2 - \frac{\ell_c^2 K_2}{L_w \cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)} \int_{-L_w/2}^{L_w/2} \cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right) dx \\ &= T_f + \ell_c^2 K_2 \left[1 - \Lambda \tanh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) \right] \quad \text{avec} \quad \Lambda = \frac{2\ell_c}{L_w}\end{aligned}$$

□ 9 — La fonction $f(y) = \frac{T_w - T_f}{\langle T_w \rangle - T_f}$ avec $y = \frac{x}{L_w}$ et le coefficient $\xi = \frac{T_{w,max} - T_f}{\langle T_w \rangle - T_f}$. D'après le graphe de la fonction $f(y)$, le maximum se présente en $y = 0$ (et donc en $x = 0$) :

$$T_{w,max} = T_w(x=0) = T_f + \ell_c^2 K_2 \left[1 - \frac{1}{\cosh(k)} \right] \approx T_f + \ell_c^2 K_2 \quad \text{car} \quad k = \frac{1}{\Lambda} = 4 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cosh(4)} \ll 1.$$

$$T_{w,max} - T_f = \ell_c^2 K_e \quad \text{et} \quad \langle T_w \rangle - T_f = \ell_c^2 K_2 \left(1 - \frac{1}{k} \tanh(k) \right) \Rightarrow \xi = \frac{1}{1 - \frac{\tanh(k)}{k}} = 1,33.$$

I.B.— Puissance thermique cédée au fluide

□ 10 —

- Une distribution de température non uniforme est présent en raison de la pertes de chaleur par conduction vers les broches
- la température est maximal au milieu du fil.
- plus k est grand, plus la courbe présente un palier : la température devient uniforme en tout point du fil.
- pour un fil long ($L_w/2 \gg \ell_c$), T_w pourra être considérée homogène et tend vers sa valeur moyenne $\langle T_w \rangle$.

□ 11 — Résistance $R_{w,\infty}$:

$$R_{w,\infty} = \frac{\rho_{w,\infty} L_w}{S} = \frac{4\rho_f L_w}{\underbrace{\pi d_w^2}_{R_f}} [1 + \alpha (T_{w,\infty} - T_f)] = R_f [1 + \alpha (\langle T_w \rangle - T_f)]$$

□ 12 — En régime permanent ;

$$\dot{Q}_f = \dot{Q}_g + \dot{Q}_j \simeq \dot{Q}_j \Rightarrow \dot{Q}_j = h\pi d_w L_w (\langle T_w \rangle - T_f).$$

□ 13 — Le nombre de REYNOLDS $\mathcal{R}_e = \frac{\mu_f V d_w}{\eta}$:

$$[\mathcal{R}_e] = \frac{[\rho][V][d_w]}{[\eta]} = \frac{M.L^{-3}.L.T^{-1}.L}{M.L.T^{-1}.L^{-2}.T} = 1 \Rightarrow \mathcal{R}_e \text{ est sans dimension.}$$

□ 14 — Le nombre de NUSSELT $\mathcal{N}_u = \frac{h d_w}{\lambda_f}$:

$$[\mathcal{N}_u] = \frac{[h][d_w]}{[\lambda_f]} = \frac{M.T^{-3}.\Theta^{-1}.L}{M.L.T^{-3}.\Theta^{-1}} = 1 \Rightarrow \mathcal{N}_u \text{ est sans dimension.}$$

$\mathcal{N}_u$ est d'autant plus élevé que la convection est *prédominante* sur la conduction et la convection augmente avec la vitesse ; donc $\mathcal{N}_u$ augmente aussi avec V .

□ **15** — La loi de KING : $\mathcal{N}_u = A + B\sqrt{\mathcal{R}_e}$;

$$\langle T_w \rangle = T_f + \ell_c^2 K_2 \left[1 - \Lambda \tanh \left(\frac{L_w}{2\ell_c} \right) \right] = T_f + \ell_c^2 K_2 \left[1 - \frac{\tanh(k)}{k} \right] \quad (1)$$

$$R_{w,\infty} = R_f [1 + \alpha (\langle T_w \rangle - T_f)] \quad (2)$$

$$\mathcal{N}_u = \frac{hd_w}{\lambda_f} \Rightarrow h = \frac{\lambda_f \mathcal{N}_u}{d_w} \quad (3)$$

$$\alpha K_2 = K_1 + \frac{4h}{\lambda_w d_w} = -\frac{1}{\ell_c^2} + \frac{4h}{\lambda_w d_w} \quad (4)$$

- Fil long : $\begin{cases} \frac{L_w}{2} \gg \ell_c & \text{ou} & k \gg 1 \\ \frac{\tanh(k)}{k} \approx 0 \end{cases}$; l'expression (1) s'écrit : $\langle T_w \rangle \approx T_f + \ell_c^2 K_2$.
- L'expression (2) permet d'écrire : $\frac{R_{w,\infty}}{R_f} = 1 + \alpha (\langle T_w \rangle - T_f) = 1 + \alpha \ell_c^2 K_2$.
- On remplace αK_2 à l'aide de la relation (4) : $\frac{R_{w,\infty}}{R_f} = 1 + \ell_c^2 \left(-\frac{1}{\ell_c^2} + \frac{4h}{\lambda_w d_w} \right) = \frac{4h\ell_c^2}{\lambda_w d_w}$.
- En remplaçant h par son expression (3) : $\frac{R_{w,\infty}}{R_f} = \frac{4\lambda_f \mathcal{N}_u \ell_c^2}{\lambda_w d_w^2} \Rightarrow \ell_c = \frac{d_w}{2} \sqrt{\frac{\lambda_w R_{w,\infty}}{R_f \lambda_f \mathcal{N}_u}}$

Soit :

$$\ell_c = \frac{d_w}{2} \theta^\nu \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{1}{\mathcal{N}_u} \frac{\lambda_w}{\lambda_f} \frac{R_{w,\infty}}{R_f} \quad \text{et} \quad \nu = 1/2.$$

□ **16** — La puissance thermique $\dot{Q}_f$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \dot{Q}_f}{dS} = h(T_w - T_f) & \Rightarrow \dot{Q}_f = \pi d_w h \ell_c^2 K_2 \int_{-L_w/2}^{L_w/2} \left[1 - \frac{\cosh \left(\frac{x}{\ell_c} \right)}{\cosh \left(\frac{L_w}{2\ell_c} \right)} \right] dx \\ & \Rightarrow \dot{Q}_f = \pi d_w h \ell_c^2 K_2 L_w \left(1 - \Lambda \tanh \left(\frac{L_w}{2\ell_c} \right) \right) \\ & \Rightarrow \dot{Q}_f = \pi d_w h L_w (\langle T_w \rangle - T_f) \end{aligned}$$

□ **17** —

$$\begin{aligned} \circ \quad \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} &= \frac{\pi d_w h \ell_c^2 K_2 L_w}{\frac{1}{2} \pi \ell_c K_2 \lambda_w d_w^2} \left[\frac{1 - \Lambda \tanh \left(\frac{L_w}{2\ell_c} \right)}{\tanh \left(\frac{L_w}{2\ell_c} \right)} \right] = \frac{4h\ell_c^2}{\lambda_w d_w} \left[\frac{L_w}{2\ell_c} \coth \left(\frac{L_w}{2\ell_c} \right) - 1 \right] \\ \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} &= \frac{4\lambda_f \ell_c^2}{\lambda_w d_w^2} \mathcal{N}_u [k \coth(k) - 1] = 10 \frac{\lambda_f}{\lambda_w} [k \coth(k) - 1] \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse "fil long" : $k \gg 1 \Rightarrow \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} \approx 10 \frac{\lambda_f}{\lambda_w} k \coth(k) \gg 1$ ou $\dot{Q}_f \gg \dot{Q}_g$; les pertes par conduction sont, alors, négligeables.

◦ Dépendance de V à la résistance :

$$\mathcal{N}_u = A + B\sqrt{\mathcal{R}_e} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_e = \frac{\mu_f V d_w}{\eta} \Rightarrow \mathcal{N}_u = A + B\sqrt{\frac{\mu_f d_w}{\eta}} \sqrt{V}$$

Or $\theta = \frac{1}{\mathcal{N}_u} \frac{\lambda_w}{\lambda_f} \frac{R_{w,\infty}}{R_f} = 1$ (*par hypothèse*) $\Rightarrow \mathcal{N}_u = \frac{\lambda_w}{\lambda_f} \frac{R_{w,\infty}}{R_f} = A + B \sqrt{\frac{\mu_f d_w}{\eta}} \sqrt{V}$. Soit :

$$V = \frac{\eta}{\mu_f d_w B^2} \left[\frac{\lambda_w}{\lambda_f} \frac{R_{w,\infty}}{R_f} - A \right]^2 = g \left(\frac{R_{w,\infty}}{R_f} \right)$$

La mesure de V se ramène, alors, à une mesure de résistance.

◦ Expression de V en fonction de $R_{w,\infty}$, R_f et I :

On rappelle l'équation bilan établie précédemment, en régime permanent ;

$$\dot{Q}_g - \dot{Q}_f + \dot{Q}_j = 0$$

Par *hypothèse* : $\dot{Q}_g \ll \dot{Q}_f$ et $\dot{Q}_g \ll \dot{Q}_j$ (fil long) ;

$$\Rightarrow \dot{Q}_f = \dot{Q}_j \Rightarrow \pi h d_w L_w (T_w - T_f) = R_{w,\infty} I^2 \text{ avec } \begin{cases} R_{w,\infty} = R_f [1 + \alpha (\langle T_w \rangle - T_f)] \\ \mathcal{N}_u = \frac{h d_w}{\lambda_f} \Rightarrow h d_w = \lambda_f \mathcal{N}_u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi L_w \lambda_f \mathcal{N}_u \frac{R_{w,\infty} - R_f}{\alpha R_f} = R_{w,\infty} I^2 \Rightarrow \mathcal{N}_u = \frac{\alpha R_f R_{w,\infty}}{(R_{w,\infty} - R_f)} \frac{I^2}{\pi L_w \lambda_f} = A + B \sqrt{\frac{\mu_f d_w}{\eta}} \sqrt{V}$$

D'où :

$$V = \frac{\eta}{\mu_f d_w B^2} \left[\frac{\alpha R_f R_{w,\infty}}{(R_{w,\infty} - R_f)} \frac{I^2}{\pi L_w \lambda_f} - A \right]^2$$

II.— Anémométrie à deux fils

□ **18** — Pendant phase de chauffe les pertes d'énergie par convection de l'air étant négligeables, la puissance Φ_{st} stockée dans le fil émetteur (d'énergie interne $U(t)$) est égale à la puissance Φ_{st} dissipée par effet JOULE :

$$\Phi_{st} = \Phi_J \Rightarrow \frac{dU}{dt} = R_w I^2 \Rightarrow \mu_w c_w S L_w \left(\frac{dT_e}{dt} \right) = R_f I^2 [1 + \alpha (T_e - T_f)] \text{ avec } S = \frac{\pi d_w^2}{4}.$$

Soit :

$$\begin{aligned} \mu_w c_w \frac{\pi d_w^2}{4} L_w \left(\frac{dT_e}{dt} \right) - \alpha R_f I^2 (T_e - T_f) &= R_f I^2 \\ \left(\frac{dT_e}{dt} \right) - \frac{4 \alpha R_f I^2}{\mu_w c_w \pi d_w^2 L_w} (T_e - T_f) &= \frac{4 R_f I^2}{\mu_w c_w \pi d_w^2 L_w} \\ \Rightarrow \left(\frac{dT_e}{dt} \right) - \frac{(T_e - T_f)}{\tau_1} &= \frac{R_f I^2}{C} \text{ avec } \begin{cases} C = \frac{\mu_w c_w \pi d_w^2 L_w}{4} \\ \tau_1 = \frac{\mu_w c_w \pi d_w^2 L_w}{4 \alpha R_f I^2} = \frac{C}{\alpha R_f I^2} \end{cases} \end{aligned}$$

La constante C a pour unité $J.K^{-1}$: elle est, donc, homogène à une capacité thermique. C'est la capacité thermique du fil de longueur L_w .

□ **19** — Solution :

$$T_e - T_f = -\frac{R_f I^2}{C} \tau_1 + A_1 \exp \left(\frac{t}{\tau_1} \right)$$

Conditions initiales : $T_e(t=0) = T_f$; ce qui donne la constante $A_1 = \frac{R_f I^2}{C} \tau_1 = \frac{1}{\alpha}$. L'évolution $T_e(t)$ s'écrit :

$$T_e(t) = T_f + \frac{1}{\alpha} \left[\exp \left(\frac{t}{\tau_1} \right) - 1 \right]$$

Amplitude de l'impulsion thermique $\Delta T_{e,max}$:

$$\Delta T_{e,max} = T_{e,max} - T_f \quad \text{avec} \quad T_{e,max} = T_e(t = \tau) = T_f + \frac{1}{\alpha} \left[\exp\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) - 1 \right]$$

Soit :

$$\Delta T_{e,max} = \frac{1}{\alpha} \left[\exp\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) - 1 \right]$$

□ **20** — Pendant la phase de relaxation, l'équation bilan s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} = -h\pi d_w L_w (T_e - T_f) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu_w c_w L_w \pi d_w^2}{4} \left(\frac{dT_e}{dt} \right) = -h\pi d_w L_w (T_e - T_f)$$

Soit :

$$\left(\frac{dT_e}{dt} \right) + \frac{T_e - T_f}{\tau_2} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau_2 = \frac{\mu_w c_w d_w}{4h}$$

- **Solution** : $T_e(t) - T_f = A_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)$,
- **Continuité de la température** : $T_e(t = \tau, \text{chauffe}) = T_e(t = \tau, \text{relaxation})$;

$$A_2 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_2}\right) = \frac{1}{\alpha} \left[\exp\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) - 1 \right] = \Delta T_{e,max} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \Delta T_{e,max} \exp\left(\frac{\tau}{\tau_2}\right)$$

- D'où :

$$T_e(t) = T_f + \Delta T_{e,max} \exp\left(-\frac{t - \tau}{\tau_2}\right)$$

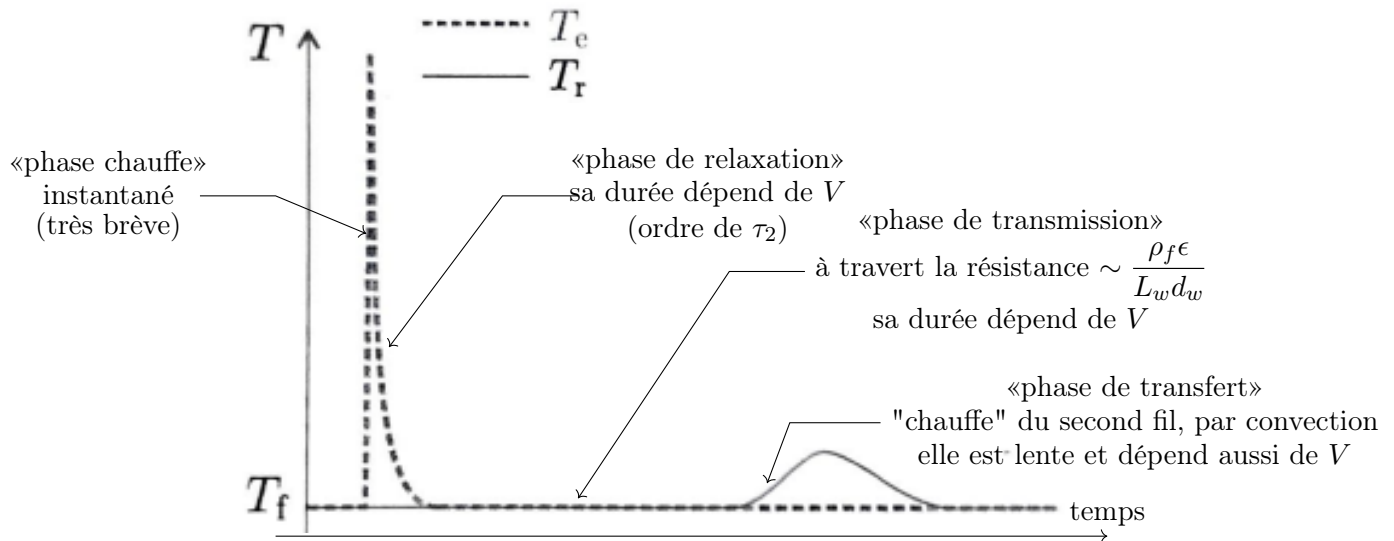
□ **21** — Pendant la phase de chauffe, l'impulsion est très brève.

□ **22** — $\ln\left(\frac{T_e - T_f}{\Delta T_{e,max}}\right) = -\frac{t - \tau}{\tau_2}$ est une fonction linéaire de pente négative (en accord avec les courbes des droites de la figure 4). La pente de cette droite est $\left(-\frac{1}{\tau_2}\right)^{(1)}$ dépend du nombre de NUSSELT $\mathcal{N}_u$ par la relation $\tau_2 = \frac{\mu_w c_w d_w^2}{4\lambda_f \mathcal{N}_u}$. Ce nombre $\mathcal{N}_u$ dépend à son tour de la norme V de la vitesse (*expression vue précédemment* - Cf. question □ 17 - page 6/9). Soit :

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{4\lambda_f}{\mu_w c_w d_w^2} \mathcal{N}_u = \frac{4\lambda_f}{\mu_w c_w d_w^2} \left[A + B \sqrt{\frac{\mu_f d_w}{\eta}} \sqrt{V} \right]$$

□ **23** — Commentaires :

⁽¹⁾ou l'abscisse à l'origine $\left(\frac{\tau}{\tau_2}\right)$ puisque τ sera donnée par la courbe de gauche.



□ **24** — On constate que la courbe de droite que $T_{r,max}$ est indépendante de la vitesse, alors que l'écart temporel Δt_{er} entre les deux pics de la courbe de gauche en dépend via τ_2 . Il suffit, alors, de mesurer Δt_{er} pour accéder à la vitesse V .