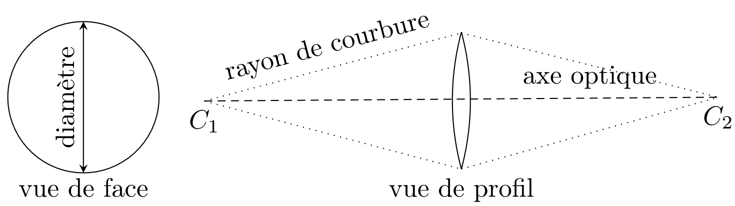
Lentilles

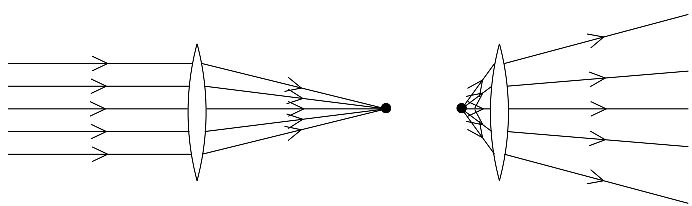
1 Modélisation des lentilles minces

1.1 Lentilles convergentes et divergentes

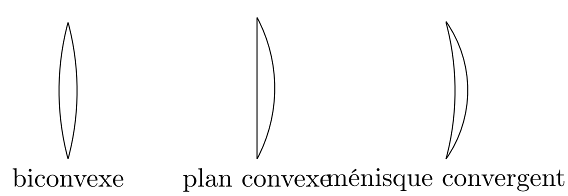
Une lentille est constituée de deux surfaces, planes ou sphériques et possède une symétrie de révolution autour d'un axe, qui est appelé axe optique. Sa géométrie est caractérisée par le rayon de courbure des faces sphériques et par son diamètre (sa taille, vue de face). On qualifie une lentille de *mince* lorsque son épaisseur est très inférieure au rayon de courbure.



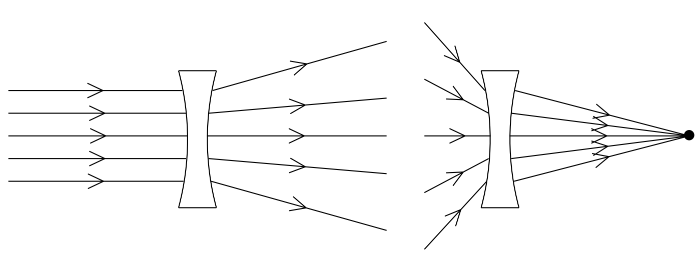
Les lentilles convergentes ont tendance à faire converger la lumière. Elles sont plus épaisses au centre que sur les bords.



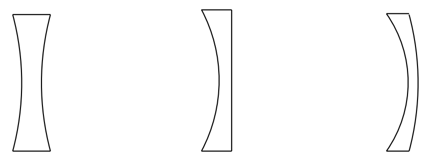
Il existe plusieurs formes possibles :



Les lentilles divergentes ont tendance à faire diverger la lumière. Elles sont plus épaisses sur les bords que au centre.



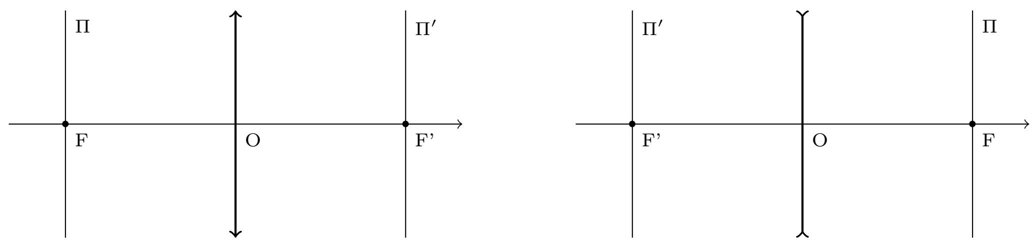
Là encore, plusieurs formes sont possibles :



biconcave plan concave ménisque divergent

1.2 Modélisation

Les éléments importants d'une lentille convergente sont le centre, les foyers et les plans focaux. Comme on néglige l'épaisseur d'une lentille mince, on la représente simplement par un trait orthogonal à l'axe optique, en ajoutant deux flèches pour indiquer si la lentille est convergente ou divergente.



1.3 Distance focale et vergence

La distance focale (ou plus familièrement *focale*) d'une lentille est égale à la distance entre le centre et les foyers (les distances OF et OF' sont toujours égales, sauf dans le cas où le milieu matériel n'est pas le même des deux cotés de la lentille, par exemple aire d'un coté et eau de l'autre). Pour distinguer les lentilles convergentes et divergentes, on algébrise la distance focale :

$$f' = \overline{OF'}$$

Ainsi, la distance focale d'une lentille convergente est positive et celle d'une lentille divergente est négative. L'unité est évidemment le mètre, mais on utilise souvent le cm. La vergence est simplement l'inverse de la distance focale :

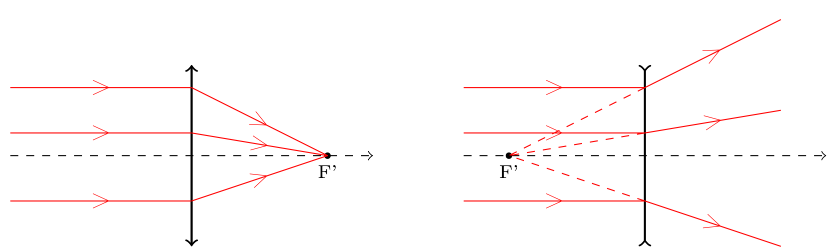
$$c = \frac{1}{f'}$$

L'unité est le m^{-1}, on utilise également le nom de dioptries (symbole δ). Par exemple, une lentille de contact de vergence -4 δest une lentille divergente avec une distance focale de -25 cm.

2 Mise en évidence expérimentale des foyers

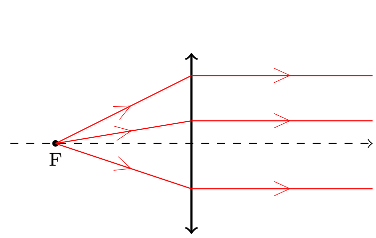
2.1 Foyer (principal) image

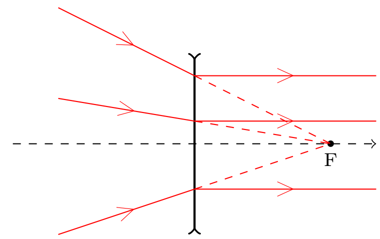
Des rayons lumineux incidents parallèles à l'axe optique émergent en se coupant au foyer image.



2.2 Foyer (principal) objet

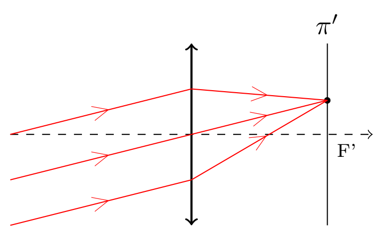
Des rayons lumineux incidents qui passent par le foyer objet émergent parallèles à l'axe optique.

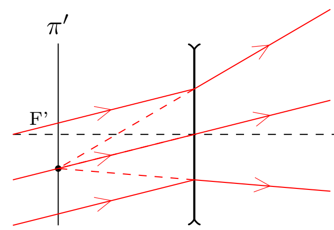




2.3 Plan focal image

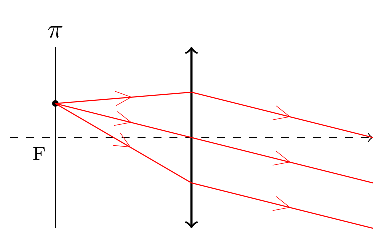
Des rayons lumineux incidents parallèles entre eux émergent en se coupant en un point situé dans le plan focal image (foyer secondaire image).

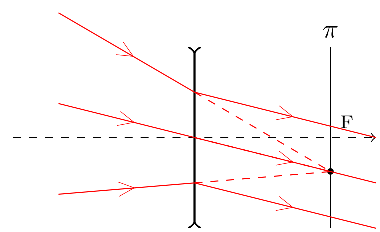




2.4 Plan focal objet

Des rayons lumineux incidents qui passent par un point du plan focal objet (foyer secondaire objet) émergent parallèles entre eux.

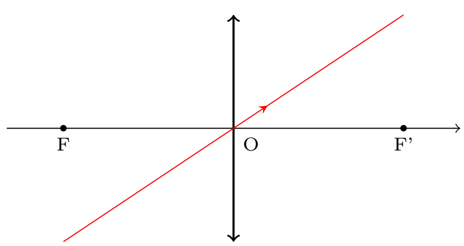


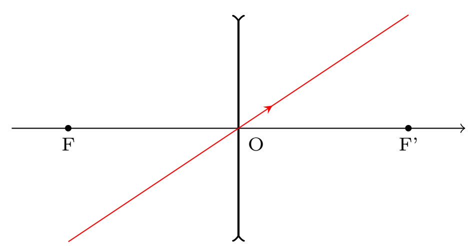


3 Tracé des rayons lumineux réfractés par une lentille

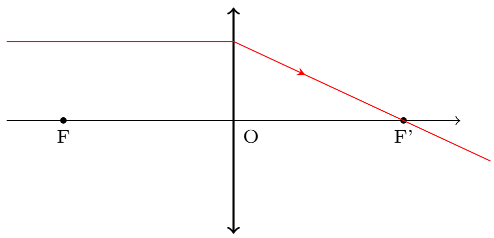
3.1 Cas particuliers

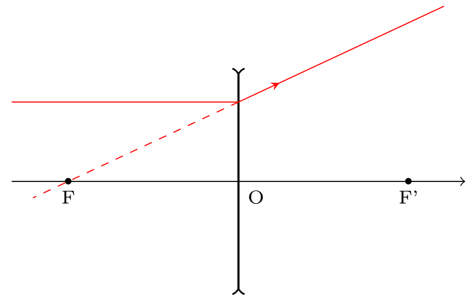
Un rayon lumineux incident qui passe par le centre n'est pas dévié.



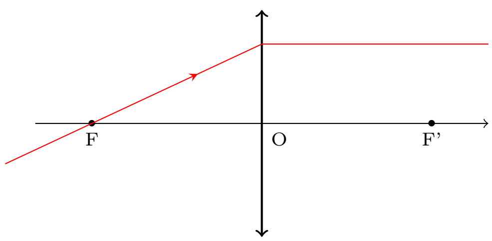


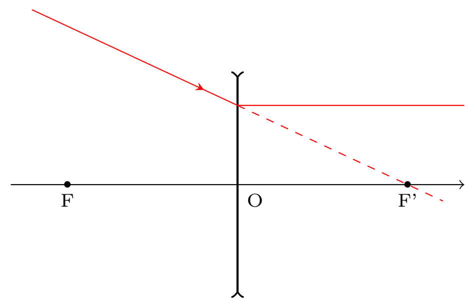
Un rayon lumineux incident parallèle à l'axe optique émerge en passant par le foyer image.





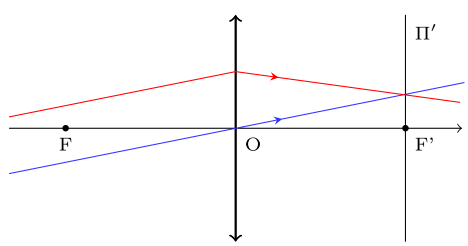
Un rayon lumineux incident qui passe par le foyer objet émerge parallèlement à l'axe optique.



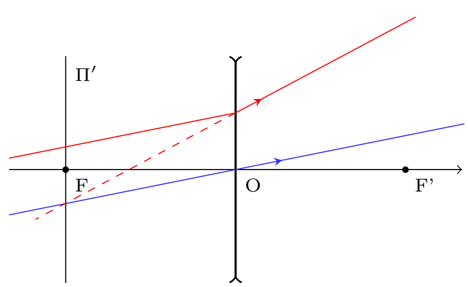


3.2 Rayon lumineux quelconque

Dans ce cas on s'appuie (par exemple) sur les propriétés du plan focal image : On imagine un autre rayon lumineux (on peut le qualifier d'auxiliaire, ou de fictif) parallèle au rayon considéré, et qui passe par le centre (et donc n'est pas dévié). Les deux rayons émergents doivent se couper sur le plan focal image, ce qui permet de tracer le rayon émergent recherché.



Un autre exemple, cette fois avec une lentille divergente :



On peut bien sur considérer plusieurs variantes à la méthode ci-dessus : on peut prendre un rayon auxiliaire parallèle au rayon incident, mais qui passe par le foyer objet. On peut aussi prendre un rayon auxiliaire qui coupe le rayon incident dans le plan focal objet, soit passant par le centre soit parallèle à l'axe optique : ils émergent parallèles entre eux.

4 Construction d'une image par une lentille

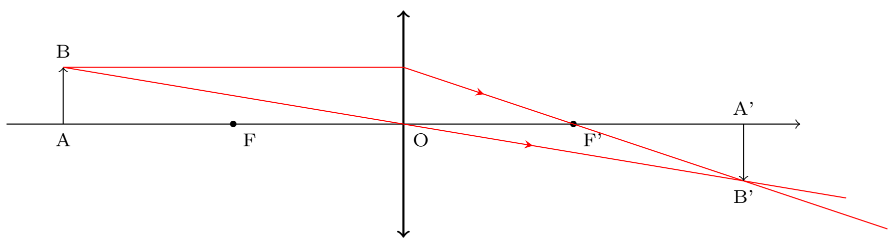
4.1 Stigmatisme et aplanétisme

Dans de nombreuses situations (et dans la totalité des exercices !), on considère que les conditions de Gauss sont satisfaites et on raisonne comme si les lentilles étaient stigmatiques. Dans ces mêmes conditions, les lentilles ont aussi la propriété d'être *aplanétiques* : l'image d'un objet plan orthogonal à l'axe optique est plane et orthogonale à l'axe optique. On ne considérera dans la suite que des objets plans, orthogonaux à l'axe optique (si on s'intéresse à un objet ayant une certaine épaisseur, la démarche serait de le découper en tranches orthogonales à l'axe optique et de considérer l'image de chaque tranche). Pour modéliser un objet plan, deux points (ses deux extrémités suffisent), en général on les relie et on ajoute une flèche qui indique le haut de l'objet.

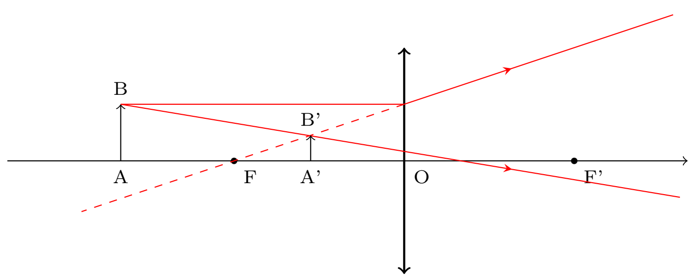
4.2 Construction de l'image

Pour construire l'image, il faut à priori construire l'image de chaque point objet. Dans le cas très fréquent où l'un des deux points est sur l'axe optique, il suffit en fait de l'image d'un seul point objet (celui qui est en dehors de l'axe optique, plus facile à construire) puisque l'autre est dans le même plan (orthogonal à l'axe optique) et sur l'axe optique.

Pour construire l'image d'un point, dans la mesure où l'on considère la lentille comme stigmatique, deux rayons lumineux suffisent, puisque *tous* les rayons lumineux émergents se coupent en un même point. Dans de nombreux cas il est possible de trouver deux rayons lumineux particuliers, les choses sont alors très simples... Application avec un objet de hauteur 2cm placé à 6cm devant une lentille convergente de focale 3cm. (image réelle, de même taille et renversée à 6 cm derrière la lentille).



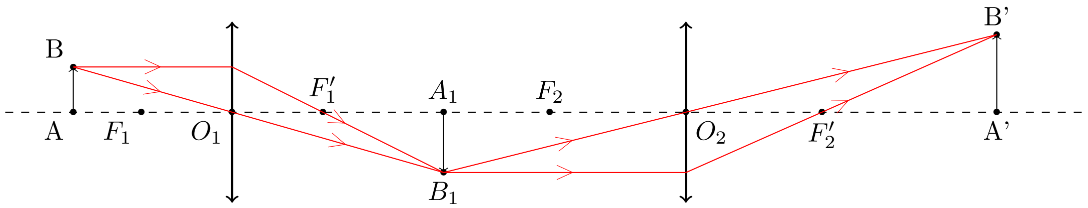
Avec une lentille divergente, l'image créée est virtuelle.



4.3 Cas de deux lentille successives

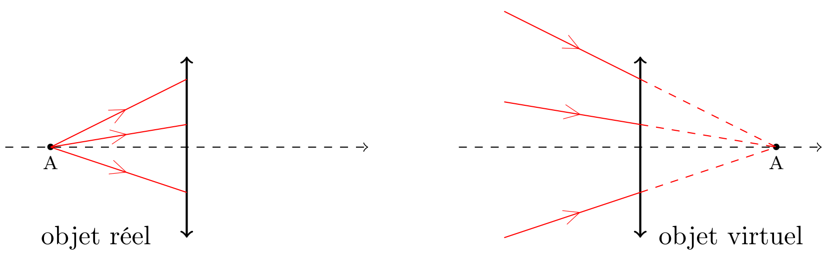
Beaucoup d'instruments d'optique ne se limitent pas à une seule lentille, et il faut chercher l'image d'un objet au travers de plusieurs lentilles consécutives. On considère d'abord le cas de deux lentilles, la démarche envisagée peut être étendue à un nombre quelconque de lentilles.
Une première idée est de suivre le cheminement d'un rayon lumineux au travers des deux lentilles, mais cette méthode n'est pas la plus efficace car pour le deuxième lentille elle oblige à tracer le rayon émergent pour un rayon incident quelconque. Il est beaucoup plus efficace de chercher d'abord l'image de l'objet par la première lentille (que l'on peut qualifier d'image intermédiaire), puis de considérer cette image intermédiaire comme un objet pour la seconde lentille, il suffit alors d'en chercher l'image.

Objet		Image intermédiaire		Image finale
AB	$\longrightarrow$	A_1B_1	$\longrightarrow$	A'B'

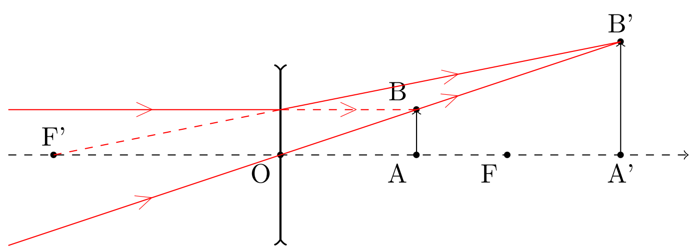


4.4 Objet virtuel

Un problème se pose dans la démarche précédente : si l'image intermédiaire est située *après* la deuxième lentille, à priori elle ne peut pas constituer un objet pour elle. On introduit alors la notion d'*objet virtuel* : un objet réel est un point d'où partent des rayons lumineux qui vont rencontrer la lentille, un objet virtuel est un point vers lequel se dirigent les rayons lumineux qui vont rencontrer la lentille.



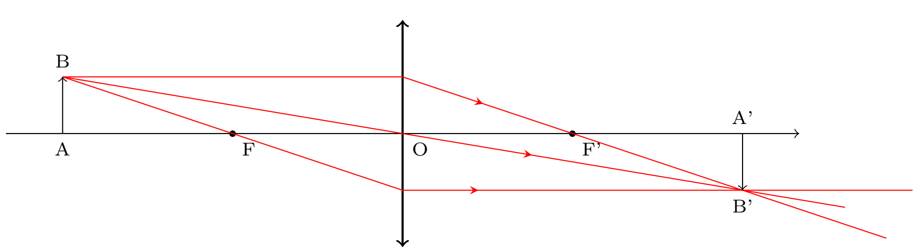
Pour tracer l'image correspondant à un objet virtuel, il suffit de choisir deux rayons lumineux qui se dirigent vers ce point et de tracer les rayons émergents correspondants. Avec un objet virtuel, il est possible d'obtenir une image réelle avec une lentille divergente.



5 Formules de conjugaison

5.1 Construction géométrique

Pour établir les relations de conjugaison, on exploite des relations géométriques dans une figure où l'on représente un objet et son image par une lentille. On considère le cas d'une lentille convergente, avec objet et image réels, mais les résultats établis sont valables de manière tout à fait générale (lentilles divergentes, objets/images virtuels).



On remarque les égalités suivantes :

$$(1) \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} \qquad (2) \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{FO}} \qquad (3) \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{F'A'}}$$

5.2 Formule de conjugaison

Pour obtenir la formule de conjugaison (Descartes), on combine (1) et (3) puis on utilise la relation de Chasles :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{A'F'}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{A'O}+\overline{OF'}}{\overline{OF'}} = -\frac{\overline{OA'}}{f'} + 1 \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{\overline{OA}} = -\frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA'}}$$

Ce qui conduit au résultat :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

On peut faire une petite application (objet de 2cm placé à 5cm d'une lentille convergente de focale 3cm), on trouve OA'=7,5 cm.

5.3 Grandissement

La formule de grandissement se déduit directement de la relation (1), le grandissement étant défini par le rapport (algébrique) de taille de l'image sur taille de l'objet :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

La formule de grandissement sert en général à calculer la taille de l'image. En reprenant l'exemple précédent, on trouve A'B'=3cm.

5.4 Formule de Newton

il existe enfin une autre manière d'exprimer la formule de conjugaison dite formule de Newton, qui se déduit directement des relations (2) et (3) :

$$\overline{FA}\,.\,\overline{F'A'} = -f'^2$$

On peut également exprimer le grandissement :

$$\gamma = \frac{f'}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

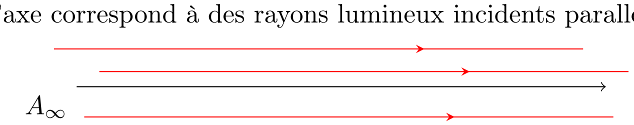
Ces formules sont dites avec origine aux foyers (par opposition avec la formule de Descartes qui est avec origine au centre). Elles sont occasionnellement utiles (voir TD), mais ne sont pas à mémoriser.

6 Objets et images à l'infini

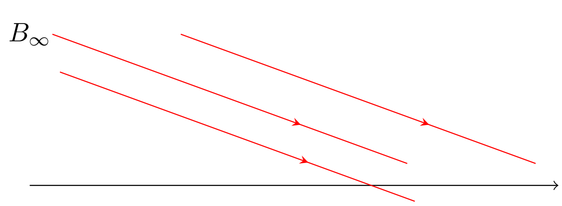
6.1 Objet à l'infini

Un objet peut être considéré à l'infini par rapport à une lentille si la distance entre cet objet et la lentille est grande devant les caractéristiques de la lentille (diamètre et distance focale). Ainsi, considérer un objet à l'infini est simplement une approximation, dans laquelle les tous RL issus d'un même point objet sont parallèles entre eux.

Un point objet à l'infini sur l'axe correspond à des rayons lumineux incidents parallèles à l'axe optique :

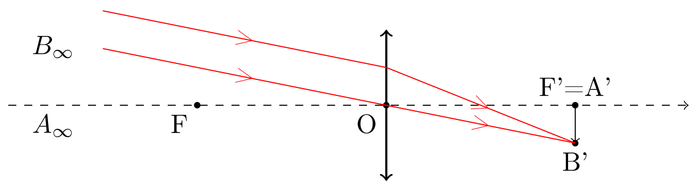


Un point objet à l'infini en dehors de l'axe à des rayons lumineux incidents parallèles entre eux, mais faisant un certain angle avec l'axe.



L'image d'un objet à l'infini est dans le plan focal image. Cela se retrouve à la fois dans la construction, puisque les rayons incidents sont parallèles entre eux (et donc ils convergent dans le plan focal image) et dans la relation de conjugaison :

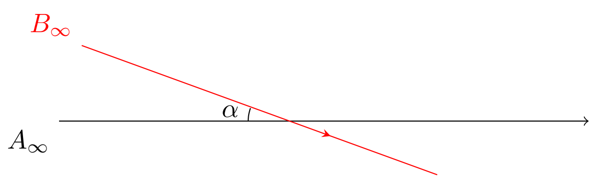
$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'} \simeq \frac{1}{f'} \quad \text{puisque } OA \gg f'$$



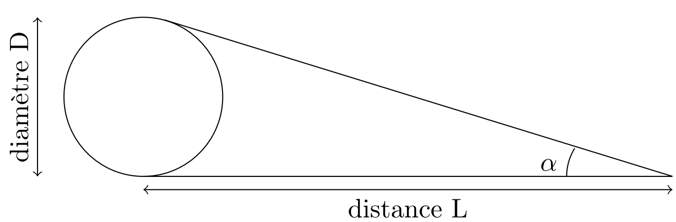
En fait, l'infini en optique est souvent à quelques mètres... Si on regarde un objet à un mètre avec l'oeil, qui a une focale de l'ordre de 2cm et que l'on fait l'approximation d'un objet à l'infini, on obtient la position de l'image à 2cm du cristallin au lieu de 2,04 cm, soit une erreur relative de 2% seulement...

6.2 Diamètre angulaire et taille de l'image

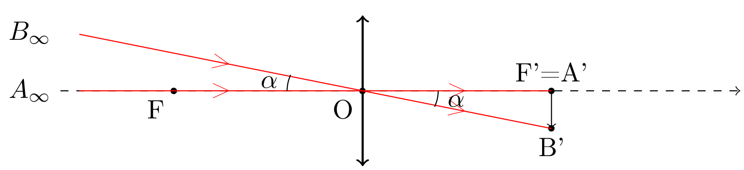
Dans l'approximation à l'infini, un objet ne peut pas avoir de taille exprimée par une longueur ! La taille est caractérisée par l'angle entre les rayons lumineux issus des deux points objet, que l'on appelle diamètre angulaire ou diamètre apparent.



Pour calculer cet angle, il faut bien entendu revenir à la distance entre l'objet et la lentille, ainsi qu'à la taille de l'objet exprimée par une longueur. Par exemple, la lune est à une distance $L = 380000km$ de la terre en moyenne et son diamètre est $D = 3500km$, son diamètre apparent (vu depuis la terre) est donné par $\alpha = \frac{D}{L}$ ce qui fait environ 0,009 radians, soit 0,5 degrés.



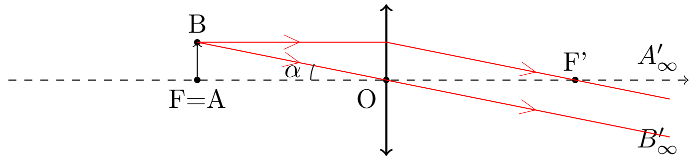
Dans l'approximation à l'infini, une fois connu le diamètre apparent, calculer la taille de l'image est particulièrement simple : $A'B' = f'a$.



Finalement retenons que tous les résultats pourraient être obtenus avec les formules de conjugaison et de grandissement, mais que si il est légitime de l'utiliser l'approximation de l'objet à l'infini simplifie nettement les calculs !

6.3 Image à l'infini

Cette situation se produit lorsque un objet est situé dans le plan focal objet d'une lentille. Les rayons lumineux issus d'un point de l'objet émergent de la lentille parallèles entre eux. On peut alors considérer qu'ils se coupent à l'infini, d'où le nom d'image à l'infini. Cela n'est pas complètement abstrait, puisque si l'on place un écran à une distance de la lentille très supérieure à sa distance focale, on obtient effectivement une image nette !



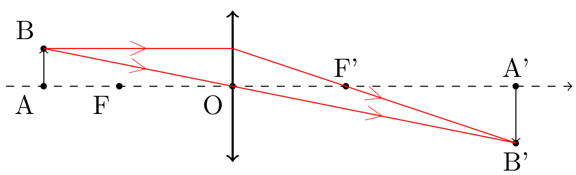
La taille de l'image est là encore caractérisée par un angle, égal à la taille de l'objet divisée par la focale de la lentille (on se place toujours dans l'approximation des petits angles) :

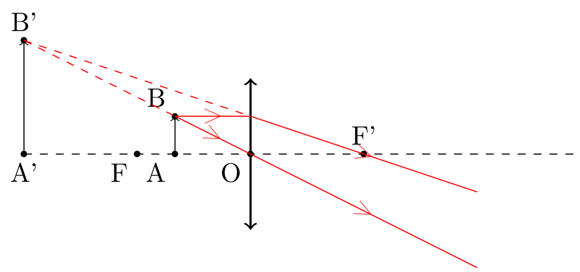
$$\alpha = \frac{AB}{OA}$$

7 Situations importantes

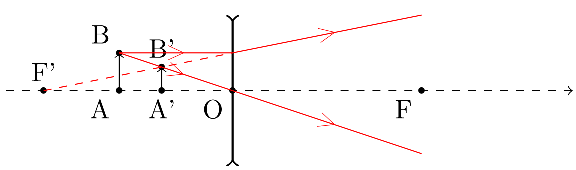
7.1 Quand obtient-on une image réelle ? virtuelle ?

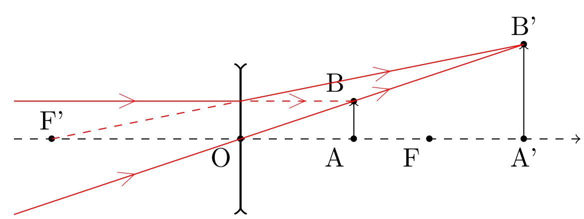
Avec une lentille convergente : l'image est toujours réelle, sauf si l'objet est entre le centre et le foyer objet (objet réel trop près de la lentille).





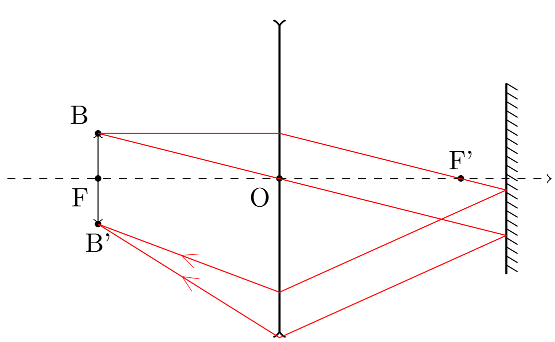
Avec une lentille divergente : l'image est toujours virtuelle, sauf si l'objet est entre le centre et le foyer objet (objet virtuel proche de la lentille).





7.2 Autocollimation

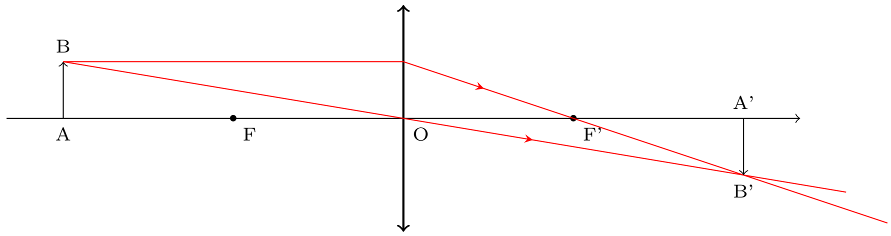
Il s'agit d'obtenir, par traversée d'une lentille (convergente) puis réflexion sur un miroir plan et enfin re-traversée de la lentille (la lumière va alors dans l'autre sens !) une image exactement dans le même plan que l'objet. Cette situation implique que l'objet soit dans le plan focal objet de la lentille :



C'est en fait un excellent moyen, après avoir enlevé le miroir, d'obtenir une image à l'infini (on dit aussi que, après la lentille, on est en lumière parallèle).

7.3 Montage 4f

Cela correspond à un objet placé devant une lentille convergente à une distance qui est exactement le double de sa focale, donc 2f'. L'image est alors également à 2f' de la lentille. Elle est réelle, renversée et de même taille que l'objet.



Le montage 4f est une situation importante car il correspond, à f' fixé, à la plus petite distance entre l'objet et l'image. On le retrouve dans de nombreuses situations et il est important de savoir l'identifier.

7.4 Critère D>=4f'

On remarque expérimentalement que, f' étant fixée, la distance D entre l'objet et l'image doit être supérieure à 4f' pour pouvoir obtenir une image nette (le cas limite correspondant au montage 4f). On peut montrer ceci à partir de la loi de conjugaison :

$$\text{on pose } x = \overline{OA'} \text{ et ainsi } \overline{OA} = \overline{OA'} + \overline{A'A} = x - D \text{ ce qui donne } \frac{1}{x} - \frac{1}{x-D} = \frac{1}{f'}$$

On obtient ainsi l'équation du second degré x^2-xD+f'D=0, dont le discriminant est D^2-4f'. On remarque alors que l'équation n'a de solution que si D>=4f', ce qui confirme bien les observations expérimentales.