Cinématique

1 Description du mouvement

L'objet de la *cinématique* est la description du mouvement, indépendamment de ses causes, identifiées sous le terme de forces. Il s'agit essentiellement de mettre en place les notions de référentiel, de vitesse et d'accélération ainsi que leur traduction dans un formalisme vectoriel.

1.1 Mécanique du point

Pour avancer dans la description physique d'une situation, il est nécessaire de commencer par la simplifier afin d'en faire une modélisation qui permette la mise en place de calculs : il faut parvenir à décrire la réalité par des équations, des formules mathématiques, pour pouvoir faire ensuite des prédictions quantitatives (par exemple, si on veut envoyer une fusée sur la lune, il faut être capable de prévoir par le calcul son mouvement si on veut être sur de la lancer de manière adéquate).

En mécanique, la manière la plus simple de représenter un objet est de le réduire à un point (on peut s'interroger sur le choix de ce point relativement à l'objet réel, par exemple pour un solide le centre de masse), on se limite alors à la *mécanique du point*. Cela peut sembler réducteur, mais c'est un point de départ indispensable, les développements effectués en mécanique du point servant ensuite à construire la mécanique du solide, des systèmes de points matériels et des fluides.

1.2 Référentiels

L'expérience courante montre que le mouvement dépend de l'observateur, c'est ce que l'on appelle la relativité du mouvement (par exemple, le passager d'une voiture bouge par rapport à la route mais ne bouge pas par rapport au conducteur). On doit donc définir ce par rapport à quoi on considère le mouvement, ce qui conduit à définir un repère d'espace (ou simplement repère).

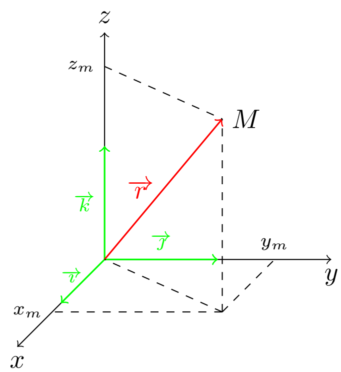
Pour décrire un mouvement, il faut associer au repérage spatial un repérage temporel, et donc disposer d'une *horloge* (le concept d'horloge en physique signifie se donner un moyen de mesurer le temps, comme dans langage courant). Un *référentiel* associe une horloge à un repère d'espace, et donne ainsi le cadre nécessaire à la description du mouvement. En mécanique classique (non relativiste), la base de temps est la même dans tous les référentiels et deux référentiels différents ne se distinguent que par leur repère d'espace. Il suffit donc, pour définir un référentiel, de préciser le repère d'espace (on pourra donc utiliser indifféremment les termes repère et référentiel en mécanique classique).

Exemples :

- Référentiel terrestre : défini localement, fixe par rapport à la terre.
- Référentiel géocentrique : l'origine est le centre de la terre et les axes sont définis par trois étoiles.
- Référentiel héliocentrique : l'origine est le centre du Soleil, et les axes sont définis par trois étoiles.
- Référentiel défini par un objet : véhicule, manège, ascenseur...

1.3 Coordonnées cartésiennes

En trois dimensions, il faut trois variables d'espace pour décrire la position d'un point. Le système le plus simple correspond aux coordonnées cartésiennes.



(x_m, y_m, z_m) sont les coordonnées cartésiennes de M.

Vecteur position : Le vecteur position est défini par $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$. On peut décomposer $\overrightarrow{OM}$ sur la base orthonormée associée à $(Oxyz)$, notée $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ ou $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$:

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$$

1.4 Mouvement et trajectoire

La *trajectoire* est l'ensemble des positions successives d'un point au cours de son mouvement, c'est donc une courbe. On observe couramment des trajectoires rectiligne, circulaire, parabolique...

La trajectoire suivie n'indique rien sur l'évolution temporelle de la position. La seule manière de le préciser complètement est de définir l'abcisse curviligne (usuellement notée s) le long de la trajectoire et de donner sa valeur à chaque instant. On peut cependant donner quelques indications qualitatives, en particulier le terme *uniforme* indique que le mouvement a lieu à vitesse constante. On peut ainsi parler de mouvement rectiligne uniforme, rectiligne accéléré, circulaire uniforme...

2 Vitesse et accélération

2.1 Cinématique en une dimension

La position d'un point M est décrite par une variable de position x, si on connait cette position x à tout instant, on connait le mouvement de l'objet.

La *vitesse moyenne* est calculée entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\langle v \rangle = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La *vitesse instantanée* est associée à un instant t et peut être vue comme la vitesse moyenne entre t_1 et t_2 de part et d'autre de t ($t_1 < t < t_2$) avec $t_2 - t_1 \to 0$:

$$v(t) = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La vitesse (instantanée) est donc la dérivée de la position par rapport au temps :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

On exprime la vitesse en $m \cdot s^{-1}$ ou en $km \cdot h^{-1}$ ($1\ m \cdot s^{-1} = 3,6\ km \cdot h^{-1}$)

L'accélération est définie à partir de la vitesse comme la vitesse l'est par rapport à la position, d'où la définition de l'*accélération instantanée* :

$$a(t) = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

L'accélération est donc la dérivée de la vitesse par rapport au temps :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Ainsi, l'accélération correspond à la dérivée seconde de la position par rapport au temps.

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

L'accélération d'exprime en $m{\cdot}s^{-2}$ (que l'on peut voir comme des $(m{\cdot}s^{-1}){\cdot}s^{-1}$, afin de souligner que l'accélération résulte d'une variation de vitesse au cours du temps).

2.2 Vecteur vitesse

On se place maintenant dans une situation en 3 dimensions, la position d'un point M est décrite, en coordonnées cartésiennes, par les coordonnées (x, y, z). Sur chaque axe, la vitesse instantanée est définie comme précédemment, soit :

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

On condense ces 3 nombres en une notation vectorielle en définissant le *vecteur vitesse* :

$$\overrightarrow{v} = v_x\,\overrightarrow{e_x} + v_y\,\overrightarrow{e_y} + v_z\,\overrightarrow{e_z}$$

Le lien entre le vecteur vitesse et le vecteur position est :

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

En effet,

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}\right) = \frac{dx}{dt}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{dy}{dt}\,\overrightarrow{e_y} + \frac{dz}{dt}\,\overrightarrow{e_z}$$

La notation v correspond à la norme de $\overrightarrow{v}$:

$$v = \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

2.3 Vecteur accélération

Comme pour la vitesse, il y a une composante d'accélération pour chaque axe :

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

Là encore, on regroupe dans une notation vectorielle :

$$\overrightarrow{a} = a_x\,\overrightarrow{e_x} + a_y\,\overrightarrow{e_y} + a_z\,\overrightarrow{e_z}$$

Le vecteur accélération est la dérivée (par rapport au temps) du vecteur vitesse, et la dérivée seconde (toujours par rapport au temps) du vecteur position :

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}$$

La norme de l'accélération s'écrit $a = \|\overrightarrow{a}\|$.

Remarque : Il faut faire attention à dériver les vecteurs et non les normes, sinon c'est faux :

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$$

$$a \neq \frac{dv}{dt}$$

Du point de vue de la physique, tout mouvement pour lequel l'accélération n'est pas nulle est un mouvement accéléré.
— Un véhicule qui freine a un mouvement accéléré.
— Un mouvement circulaire uniforme est accéléré, même si la vitesse est constante.
— Le *seul* mouvement qui n'est pas accéléré est le mouvement rectiligne uniforme.

3 Mouvements à accélération constante

3.1 Principe général

Lorsque l'on parle de mouvement à accélération constante, cela signifie que le **vecteur** accélération est constant ($\overrightarrow{a} = \overrightarrow{cste}$), et pas seulement sa norme (a=cste). Par exemple un mouvement circulaire uniforme vérifie a=cste mais la direction de l'accélération change, donc $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{cste}$.

Un mouvement à accélération constante est nécessairement en 2 dimensions (le plan de la trajectoire étant défini par la vitesse initiale et l'accélération). Il y a alors deux possibilités :
— si la vitesse initiale et l'accélération sont colinéaires, le mouvement est rectiligne
— si la vitesse initiale n'est pas colinéaire à l'accélération, le mouvement est parabolique

Comme $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{cste}$, a_x, a_y et a_z sont fixés. On obtient en intégrant, compte tenu des conditions initiales :

$$vitesse\ : \begin{cases} v_x &= a_x\, t + v_{0_x} \\ v_y &= a_y\, t + v_{0_y} \\ v_z &= a_z\, t + v_{0_y} \end{cases}$$

$$position\ : \begin{cases} x &= \frac{1}{2}\, a_x\, t^2 + v_{0_x} t + x_0 \\ y &= \frac{1}{2}\, a_y\, t^2 + v_{0_y} t + y_0 \\ z &= \frac{1}{2}\, a_z\, t^2 + v_{0_y} t + z_0 \end{cases}$$

3.2 Chute libre

Un objet en chute libre n'est soumis qu'à son poids, et donc son accélération, égale à l'accélération de la pesanteur, est constante ($\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g} = \overrightarrow{cste}$). On choisit un axe vertical (Ox) orienté vers le bas. Un objet tombe à partir de $x = 0$. avec une vitesse initiale nulle. En projetant $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$ sur (Ox), on obtient :

$$a_x = g$$

Il faut ensuite intégrer pour obtenir la vitesse et la position :

$$v_x = gt + v_0$$

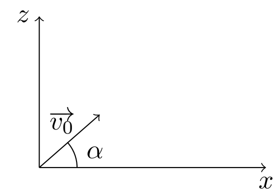
$$x = \frac{1}{2}\, gt^2 + v_0 + x_0$$

On peut en déduire une expression de la vitesse en fonction de la position :

$$v_x = \sqrt{2gx}$$

3.3 Mouvement dans le champ de pesanteur

La situation est la même du point de vue de l'accélération ($\vec{a} = \vec{g} = \overrightarrow{cste}$), mais la vitesse initiale n'est pas nulle, et fait un angle α avec l'horizontale. Le mouvement est plan, on utilise un repère (Oxz).



On obtient les composantes de l'accélération en projetant $\vec{a} = \vec{g}$:

$$acceleration \ : \left\{ \begin{array}{lcl} a_x & = & 0 \\ a_z & = & -g \end{array} \right.$$

Les conditions initiales sont $\vec{r}(t=0) = \vec{0}$ et $\vec{v}(t=0) = \vec{v_0}$. On trouve en intégrant :

$$vitesse \ : \left\{ \begin{array}{lcl} v_x & = & v_0 \, \cos\alpha \\ v_z & = & -g\,t + v_0 \, \sin\alpha \end{array} \right.$$

$$position \ : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & v_0 \, \cos\alpha t \\ z & = & -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \, \sin\alpha t \end{array} \right.$$

En éliminant t dans les équations horaires de la position, on obtient l'équation (cartésienne) de la trajectoire :

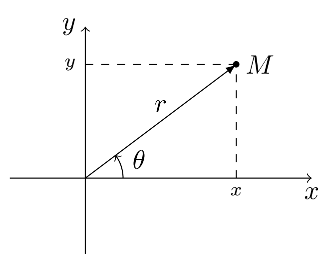
$$z = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{v_0^2 \, \cos^2\alpha} + \tan\alpha\,x$$

Ceci montre bien que la trajectoire est parabolique.

4 Coordonnées polaires

4.1 Définitions

Les coordonnées polaires permettent un repérage en deux dimensions différent des coordonnées cartésiennes : au lieu de spécifier deux distances (une pour chaque axe), on spécifie une distance et un angle.



La position est caractérisée par la distance r et l'angle θ, définis par :

$$r = OM$$

$$\theta = (\vec{e_x}, \overrightarrow{OM})$$

On établit facilement (trigonométrie...) le lien entre coordonnées polaires et cartésiennes :

$$x = r\cos\theta$$

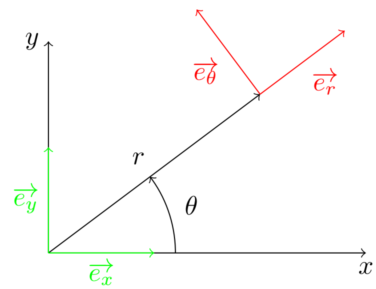
$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

4.2 Vecteurs tournants

On associe aux coordonnées polaires une nouvelle base de vecteurs $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ que l'on qualifie de *vecteurs tournants* car ils ne sont pas fixes dans $(R) = (Oxy)$.



La direction du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est qualifiée de *radiale* tandis que la direction orthogonale à $\overrightarrow{OM}$ est *orthoradiale* :

$$\textit{vecteur radial} : \overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

$$\textit{vecteur orthoradial} : \overrightarrow{e_\theta} = \left\{ \begin{array}{ccc} \|\overrightarrow{e_\theta}\| & = & 1 \\ (\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}) & = & +\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

On vérifie facilement que, avec ces définitions, $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ sont bien unitaires. Pour exprimer $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ sur la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$, on les projette :

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y}$$

On a également, dans l'autre sens :

$$\overrightarrow{e_x} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\overrightarrow{e_\theta} = \sin\theta\,\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Dérivation des vecteurs tournants : On se place dans $(R) = (Oxy)$, donc $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ sont variables tandis que $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ sont fixes. On dérive donc $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ dans le repère (Oxy) :

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y}) = \frac{d}{dt}\cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \frac{d}{dt}\sin\theta\,\overrightarrow{e_y} + \cos\theta\,\frac{d\overrightarrow{e_x}}{dt} + \sin\theta\,\frac{d\overrightarrow{e_y}}{dt}$$

Or, $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ sont fixes, donc $\frac{d\overrightarrow{e_x}}{dt} = \vec{0}$ et $\frac{d\overrightarrow{e_y}}{dt} = \vec{0}$.

Par ailleurs, $\frac{d\cos\theta}{dt} = \frac{d\cos\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta \cdot \dot{\theta}$ et $\frac{d\sin\theta}{dt} = \cos\theta \cdot \dot{\theta}$.
On en déduit donc que $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\,[-\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y}]$, et comme $-\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_\theta}$, finalement :

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Exactement de la même manière, on trouve :

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_r}$$

On peut retenir que pour dériver un vecteur tournant il faut tourner d'un quart de tour dans le sens direct et multiplier par $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

4.3 Vitesse et accélération en coordonnées polaires

On cherche à exprimer la vitesse et l'accélération de M dans le repère $(R) = (Oxy)$ en utilisant les coordonnées polaires (r, θ) et la base de vecteurs tournants $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

Vitesse :

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Or, $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$, donc

$$\overrightarrow{v} = \frac{d}{dt}\left(r\overrightarrow{e_r}\right) = \frac{dr}{dt}\,\overrightarrow{e_r} + r\,\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

La vitesse a *à priori* deux composantes :
— radiale, sur $\overrightarrow{e_r}$: $\dot{r}$
— orthoradiale, sur $\overrightarrow{e_\theta}$: $r\,\dot{\theta}$

Accélération :

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}\right) = \ddot{r}\,\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + r\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} - r\,\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}$$

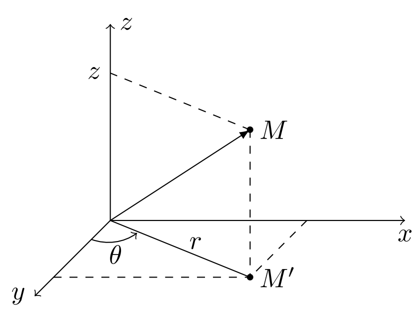
$$\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

Là encore, l'accélération a *à priori* deux composantes :
— radiale, sur $\overrightarrow{e_r}$: $\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$
— orthoradiale, sur $\overrightarrow{e_\theta}$: $r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}$

4.4 Coordonnées cylindriques et sphériques

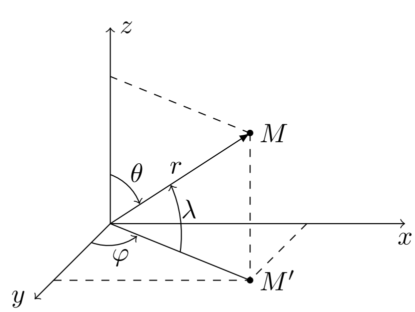
On se place cette fois en 3 dimensions.

Coordonnées cylindriques : Ce sont les coordonnées polaires dans un plan (généralement (Oxy)) avec une troisième dimension comme en coordonnées cartésiennes (généralement z).



Les relations entre (r, θ) et (x, y) sont les mêmes qu'en coordonnées polaires, et plus généralement tout ce qui a été vu avec les coordonnées polaires peut être transposé aux coordonnées cylindriques.

Coordonnées sphériques : On veut cette fois repérer la position d'un point M avec une distance ($r = OM$) et deux angles θ et ϕ définis de la manière suivante : $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{OM}}\right)$ et $\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OM'}}\right)$, où M' est le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy).



On voit que $OM' = r\sin\theta$, ce qui permet d'établir :

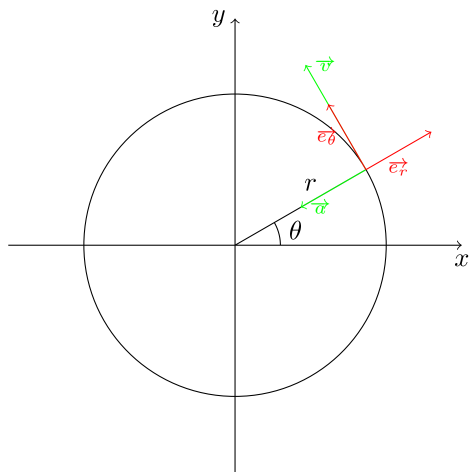
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

On peut faire une analogie avec le repérage à la surface de la terre (latitude et longitude). L'axe (Oz) correspond à l'axe des pôles, l'équateur est donc dans le plan (Oxy). On note λ $(= \pi/2 - \theta)$ la latitude, repérée par rapport à l'équateur (de 90 degrés nord à 90 degrés sud) et φ la longitude, repérée par rapport au méridien de Greenwich (de 180 degrés ouest à 180 degrés est).

5 Mouvements circulaires

5.1 Description en cartésiennes et en polaires

Le mouvement circulaire est caractérisé, en coordonnées polaires, par $r = c^{ste}$.



Il faut remarquer que la description du mouvement est ici plus compliquée en coordonnées cartésiennes qu'en coordonnées polaires, puisqu'elle s'écrit :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Expression de la vitesse :

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Or, $\dot{r} = 0$, donc

$$\vec{v} = r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} = v_\theta \overrightarrow{e_\theta}$$

La vitesse est donc orthoradiale (ce qui est cohérent avec le fait qu'elle doit être tangente à la trajectoire). La vitesse angulaire ω est définie par $v_\theta = r\omega$, elle s'identifie donc à $\dot{\theta}$ $(w = \dot{\theta})$ et s'exprime en $rads^{-1}$.

5.2 Accélération dans le mouvement circulaire uniforme

Si le mouvement circulaire est uniforme, cela signifie que la trajectoire circulaire est parcourue à vitesse constante. Dans ce cas la vitesse angulaire est elle aussi constante $(w = \dot{\theta} = cste)$ et peut être reliée à la fréquence de rotation f par $w = 2\pi f$.

$$\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

r est constante donc $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$, $\dot{\theta}$ est constante donc $\ddot{\theta} = 0$. Ainsi,

$$\vec{a} = -r\,\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} = -r\,\omega^2\overrightarrow{e_r} = -\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_r}$$

L'accélération n'est pas nulle, elle est dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire (centripète).