Dynamique

1 Lois de Newton

1.1 Masse et point matériel

A priori, on distingue deux concepts de masse différents, l'un associé à la gravitation et l'autre à l'inertie.

$$\overrightarrow{f} = \mathbf{m}\overrightarrow{a} \qquad \textit{inertie}$$

$$\overrightarrow{P} = \mathbf{m}\overrightarrow{g} \qquad \textit{gravitation}$$

En fait, toutes les expériences ont montré que ces deux grandeurs coïncident, et la relativité générale les rassemble d'un point de vue conceptuel. On peut également associer la masse d'un objet à la composition en termes de particules d'un objet. En première approche, on réduit un objet à un simple point auquel on affecte la masse de l'objet : on utilise ainsi le modèle de *point matériel*.

Cette première approche devra ensuite être complétée par l'étude des rotations (mécanique du solide), voire des déformations (mécanique des systèmes de points matériels). L'étude de la mécanique du point peut également déboucher sur la mécanique des fluides.

Remarques :

— Le mouvement d'un point matériel associé à un objet correspond à celui de son centre de masse.

— L'approximation « point matériel »ne fonctionne pas nécessairement si l'objet est « petit », mais plutôt si on peut négliger les rotations.

1.2 Principe d'inertie

Énoncé : Un objet sur lequel la résultante des forces est nulle — isolé, pseudo-isolé — a un mouvement rectiligne uniforme, ou reste immobile.

Mathématiquement, cela revient à écrire :

$$\sum \overrightarrow{f} = \vec{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overrightarrow{a} = \vec{0}$$

Ce principe d'inertie (ou première loi de Newton) a été découvert par Galilée. Il a du pour cela faire abstraction des frottements (à cause des frottements, on a pensé pendant longtemps q'une force était nécessaire pour entretenir un mouvement rectiligne uniforme), et ainsi écrire une loi dans une situation idéalisée.

Ce principe fonctionne dans certains référentiels (dits galiléens) et pas dans d'autres (dits non galiléens). La seule manière de savoir si un référentiel est galiléen ou non, c'est de faire une expérience permettant de vérifier si oui ou non le principe d'inertie est vérifié.

Il existe une propriété intéressante : ceux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre sont aussi (ou aussi peu) galiléens l'un que l'autre.

1.3 Deuxième loi de Newton

Cette loi est la base de toute la mécanique. Elle relie l'accélération $\overrightarrow{a}$ et la résultante des forces $\overrightarrow{f}$ via la masse m :

$$\overrightarrow{f} = m\overrightarrow{a}$$

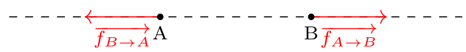
Comme le principe d'inertie, cette loi ne fonctionne que dans les référentiels galiléens.

Il est important de remarquer qu'elle n'a d'intérêt que si on est *par ailleurs* capable de donner des expressions pour les forces.

On peut aussi écrire cette loi en faisant apparaitre la quantité de mouvement, définie pour un objet de masse m animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ par la relation : $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$. On écrit alors :

$$\overrightarrow{f} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$$

1.4 Principe de l'action-réaction



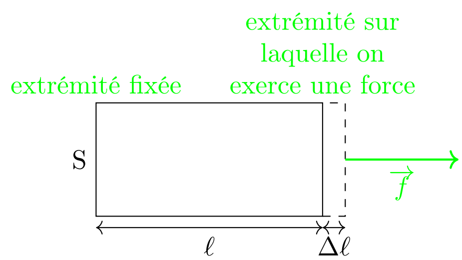
Deux objets en interaction exercent l'un sur l'autre des forces égales et opposées, et avec la même droite d'action.

2 Exemples de forces

2.1 Force de rappel élastique

Tous les matériaux possèdent une certaine élasticité, c'est à dire que si l'on exerce une force sur un bloc de matériau il subit un allongement proportionnel à la force (ceci dans un certain domaine d'élongation, c'est à dire que si la force exercée est trop importante le matériau subit une déformation permanente, voire une rupture).

Ceci est résumé par la *loi de Hooke* :



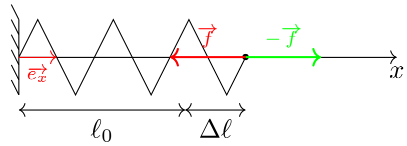
La loi reliant f et $\Delta\ell$, c'est-à-dire la force et l'allongement, s'écrit

$$f = k\,\Delta\ell \qquad avec\ k = \frac{S\,E}{\ell}$$

S est la section du matériau, ℓ est la longueur du matériau et E est le module de Young, et caractérise l'élasticité intrinsèque de tel ou tel matériau. L'unité de E est le $N \cdot m^{-2}$.

Exemples :
— Acier : $200 \cdot 10^9\ N \cdot m^{-2}$
— Aluminium : $70 \cdot 10^9\ N \cdot m^{-2}$
— Ciment : $20 \cdot 10^9\ N \cdot m^{-2}$
— Bois (pin) : $1 \cdot 10^9\ N \cdot m^{-2}$

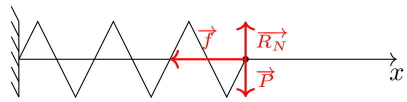
Un ressort est conçu pour être élastique (proportionnalité entre la force et l'allongement) même pour de grands allongements. Sa raideur est caractérisée par une coefficient k en $N \cdot m^{-1}$, qui varie typiquement de 10 jusqu'à $10000 N \cdot m^{-1}$.



$$\overrightarrow{f} = -k\,\Delta\ell\,\overrightarrow{e_x} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{e_x}$$

— Ressort étiré $\Delta\ell > 0$
— Ressort comprimé $\Delta\ell < 0$

Application : Oscillations d'une masse m accrochée à un ressort



On néglige les frottements. La deuxième loi de Newton donne :

$$m\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{f} + \left(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R_N}\right)$$

Et donc en projetant sur (Ox) :

$$m\,\ddot{x} = -k\,(\ell - \ell_0)$$

x désigne la position de la masse, par rapport à (2 possibilités) :

— l'extrémité gauche, alors $x = \ell$, et on obtient

$$m\,\ddot{x} + k\,x = k\,\ell_0$$

— la position moyenne de l'extrémité droite — lorsque $\ell = \ell_0$ —, et alors $x = \ell - \ell_0$. On obtient ainsi

$$m\,\ddot{x} + k\,x = 0$$

La solution dans ce dernier cas est de la forme

$$x = X_m \cos\left(w_0 t + \varphi\right)$$

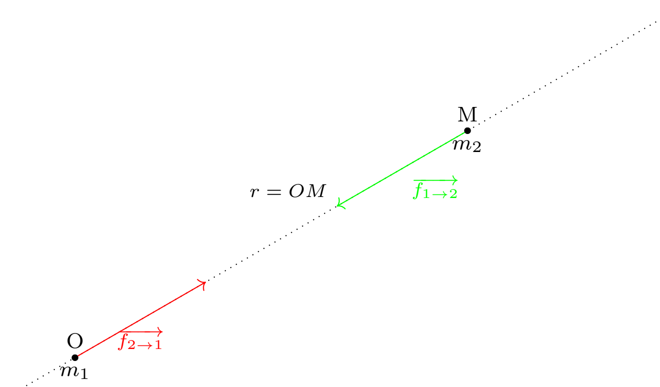
X_m est l'amplitude des oscillations, et $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre. Ces oscillations sont harmoniques, c'est-à-dire sinusoïdales.

2.2 Force de gravitation et poids

Deux masses, quelles qu'elles soient, exercent l'une sur l'autre une force attractive : $\overrightarrow{f}_{1\to 2} = -\overrightarrow{f}_{2\to 1}$ avec :

$$\left\|\overrightarrow{f}_{1\to 2}\right\| = \left\|\overrightarrow{f}_{2\to 1}\right\| = \frac{G\,m_1\,m_2}{r^2}$$

La constante de gravitation universelle vaut $G = 6,67.10^{-11} SI$.



Le poids d'un objet est (essentiellement) la force de gravitation exercée sur lui par la terre. On peut calculer cette force de gravitation en assimilant la terre à un point matériel, situé en son centre, et qui contiendrait toute la masse de la terre (cela peut sembler très discutable mais, compte-tenu de géométrie quasiment sphérique de la terre, c'est une bonne approximation). Si l'on se place juste à la surface de la terre (donc $r = R_T$), on obtient :

$$p = \frac{Gm\,M_T}{{R_T}^2} \quad soit \quad p = mg \quad avec \quad g = \frac{GM_T}{{R_T}^2}$$

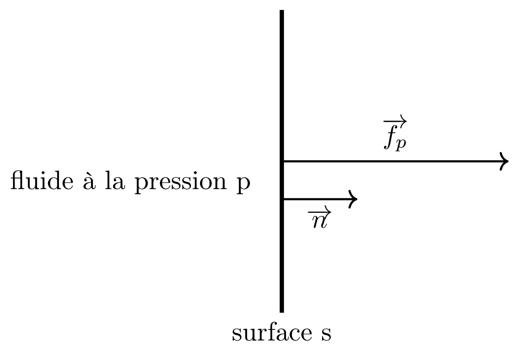
Avec $M_T = 6.10^{24} kg$ et $R_T = 6400 km$, on retrouve $g \simeq 10 m.\,s^{-2}$.

2.3 Forces de pression et poussée d'Archimède

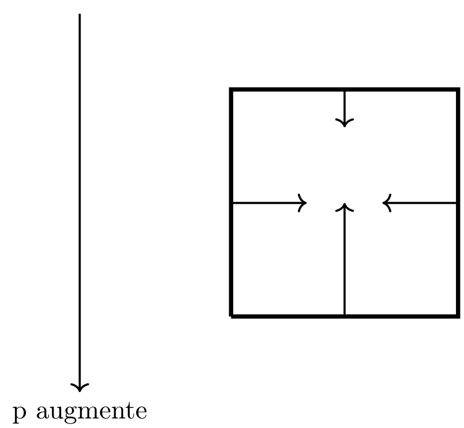
Lorsqu'un fluide (liquide ou gaz) est en contact avec une paroi, il exerce sur elle une force de pression, dirigée du fluide vers la paroi. Dans le cas simple d'une pression uniforme au voisinage d'une paroi plane, l'expression de la force de pression $\overrightarrow{f_p}$ est :

$$\overrightarrow{f_p} = p\, s\, \overrightarrow{n}$$

— p est la pression, en Pascal (Pa)
— s est l'aire de la surface plane
— $\overrightarrow{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface, dirigé du fluide vers la surface



La poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression sur un objet. Si la pression était uniforme tout autour de l'objet, les forces de pression se compenseraient, et leur résultante serait nulle. Mais la pression, même à petite échelle, n'est pas exactement uniforme : du fait de la pesanteur, il y a systématiquement un gradient de pression vertical, dirigé vers le haut (c'est à dire que la pression augmente avec l'altitude). La résultante des forces de pression sur un objet, ou poussée d'Archimède, n'est donc pas nulle, mais dirigée vers le haut.



L'expression de la poussée d'Archimède, notée $\overrightarrow{\pi}$ est :

$$\overrightarrow{\pi} = \rho V \overrightarrow{g}$$

— ρ est la masse volumique *du fluide*
— V est le volume *de l'objet*
— $\overrightarrow{g}$ est le champ de pesanteur

Cette relation «contient» les énoncés historiques tels que «tout corps plongé dans un liquide reçoit de la part de celui ci une poussée verticale dirigée du bas vers le haut égale au poids du volume de liquide déplacé»... La poussée d'Archimède existe tout autant dans les gaz que dans les liquides, mais elle est en général beaucoup plus faible dans les gaz (elle est proportionnelle à la masse volumique du fluide et, par exemple, l'eau liquide est de l'ordre de 1000 fois plus dense que l'air dans les conditions usuelles de température et de pression).

2.4 Frottements fluides

Un fluide est un liquide ou un gaz. La caractéristique générale des frottements dans un fluide est de *dépendre de la vitesse*. Il existe deux cas simples :

— Les frottements proportionnels à la vitesse, typiquement pour un écoulement laminaire.

— Les frottements proportionnels à v^2, typiquement pour un écoulement turbulent.

On s'intéresse dans la suite aux frottements proportionnels à la vitesse. L'expression est :

$$\overrightarrow{f_\alpha} = -\alpha \overrightarrow{v}$$

Le frottement fluide est opposé à la vitesse, α est le coefficient de frottement fluide, et s'exprime en $kg \cdot s^{-1}$. Il dépend de la forme de l'objet, ainsi que de la viscosité du fluide. La viscosité traduit la résistance d'un fluide au mouvement (par exemple, il est plus difficile de déplacer la main dans un fluide très visqueux que dans un fluide peu visqueux), et n'a rien à voir avec la densité. Pour l'exemple simple d'une sphère, il existe une formule donnant le coefficient de frottement fluide (formule de Stokes) :

$$\alpha = 6\pi\, r\, \nu$$

où r est le rayon de la sphère, et ν est la viscosité du fluide.

Chute « libre » avec frottement fluide : C'est une situation classique, que l'on peut réaliser expérimentalement en laissant tomber une bille en métal dans un tube rempli de glycérine (liquide particulièrement visqueux).

On peut prévoir l'existence d'une vitesse limite : lorsque la force de frottement devient égale au poids, alors $\overrightarrow{f_\alpha} + \overrightarrow{P} = 0$, et l'objet est pseudo-isolé. Son mouvement est donc rectiligne uniforme, il tombe à vitesse constante, sa vitesse limite. $f_\alpha = P$ donc $\alpha\, v = m\, g$. On en déduit que

$$v_{lim} = \frac{m\, g}{\alpha}$$

Déterminons maintenant l'évolution temporelle de la vitesse, en considérant que l'objet est lâché sans vitesse initiale. La deuxième loi de Newton donne :

$$m \overrightarrow{a} = \overrightarrow{f_\alpha} + \overrightarrow{P}$$

On projette :

$$m\ddot{z} = -\alpha \dot{z} + m\, g$$

On utilise $v_z = \dot{z}$. On pose $\tau = \frac{m}{\alpha}$. On a ainsi

$$\dot{v_z} + \frac{1}{\tau}\, v_z = g$$

La solution est

$$v_z = \lambda\, e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau\, g$$

On détermine λ à partir des conditions initiales. À $t = 0$, $v_z = 0$ donc

$$0 = \lambda\, e^{-\frac{0}{\tau}}$$

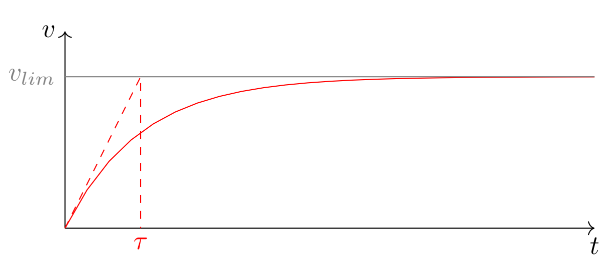
$$\lambda = -\tau\, g$$

Ainsi,

$$v_z = \tau\, g \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

On note $v_{lim} = \tau\, g = \frac{m\, g}{\alpha}$, et on écrit donc

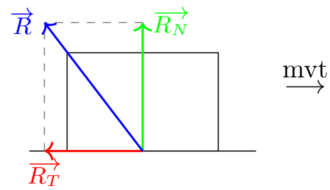
$$v_z = v_{lim} \left(1 - e^{\frac{t}{\tau}}\right)$$



La vitesse limite est atteinte « après quelques τ ».

2.5 Réaction normale et frottement solide

Des forces de contact s'exercent entre deux solides lorsqu'ils sont en contact. On considère ici un support et un objet en contact, et on s'intéresse aux forces exercées par le support sur l'objet.



La force exercée par le support sur l'objet se décompose en :
— une réaction normale $\overrightarrow{R_N}$.
— une réaction tangentielle $\overrightarrow{R_T}$, qui correspond aux frottements solides.

Lois sur le frottement solide $\vec{R_T}$:

Direction et sens : $\overrightarrow{R_T}$ est opposé au mouvement ou à celui qu'il y avait en absence de frottements.

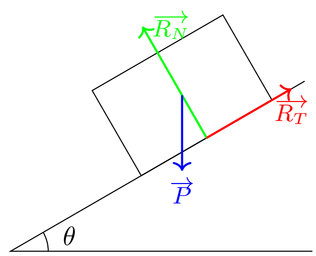
Intensité : Elle dépend de la nature des surfaces via le coefficient de frottement solide μ, et de la charge, la force avec laquelle les surfaces appuient l'une sur l'autre, R_N.

$$Si\ il\ y\ a\ glissement : R_T = \mu\, R_N$$

$$Si\ il\ y\ n'y\ a\ pas\ de\ glissement : R_T \leq \mu\, R_N$$

Remarque : R_T ne dépend pas de la vitesse, ni de l'aire de la surface de contact. Les valeurs de coefficients de frottement solide sont déterminées expérimentalement, une valeur étant associée à un couple de surfaces.

Détermination de μ : Pour déterminer μ entre deux matériaux donnés, on peut prendre un bloc de l'un et surface plane de l'autre, et rechercher pour quel inclinaison de la surface plane le bloc commence à glisser.



À la limite du glissement :

$$\begin{cases} R_T = \mu\, R_N \\ \overrightarrow{\Sigma f} = \vec{0} \end{cases}$$

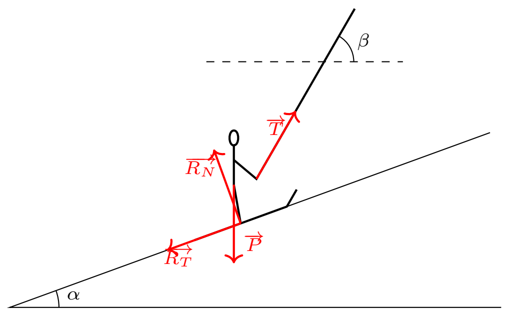
$$Projection \begin{cases} R_T - m\, g \sin\theta = 0 \\ R_T - m\, g \cos\theta = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\tan\theta = \frac{R_T}{R_N}$, et donc $\mu = \tan\theta$.

3 Exemples de problèmes

3.1 Projection de forces

Un skieur se déplace en remontant une piste tiré par une perche, selon un mouvement rectiligne uniforme. On donne $R_N = 500\, N$, $P = 700\, N$, $\alpha = 20°$ et $\beta = 50°$; et on cherche à calculer T et R_T.



Bilan des forces :
— Poids $\vec{P}$
— Tension de la perche $\vec{T}$
— Réaction normale $\vec{R_N}$
— Frottements solides $\vec{R_T}$

On considère un mouvement rectiligne et uniforme, donc l'accélération est nulle et d'après la deuxième loi de Newton la résultante des forces est nulle :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R_N} + \vec{R_T} = \vec{0}$$

On projette sur (Ox) (direction du mouvement) et (Oy) (orthogonal au mouvement) :

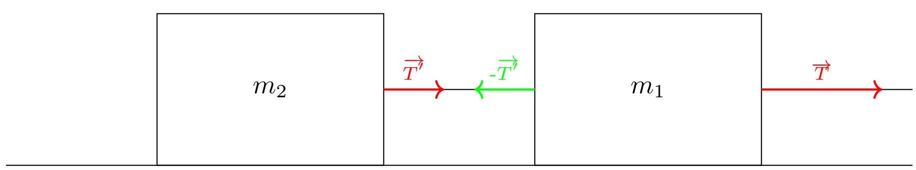
$$Sur(Ox) : -P\sin\alpha + T\cos(\beta - \alpha) + 0 - R_T = 0$$

$$Sur(Oy) : -P\cos\alpha + T\sin(\beta - \alpha) + R_N + 0 = 0$$

On trouve au final $R_T = 33\,N$ et $T = 315\,N$.

3.2 Masses reliées

Deux masses m_1 et m_2 reliées par un fil inextensible et glissant sans frottement sur un plan horizontal sont en mouvement accéléré sous l'action d'une force $\vec{T}$ exercée sur m_1 (on peut imaginer qu'il s'agit de deux wagons tirés par une locomotive...) On s'intéresse à l'accélération de m_1 et m_2 (qui ont nécessairement la même accélération) ainsi qu'à la force qu'exercent les deux masses l'une sur l'autre.



Intuitivement :
— La force $\vec{T}$ accélère l'ensemble de masse $m_1 + m_2$ donc l'accélération est égale à $\frac{T}{m_1+m_2}$.
— $T' < T$, car une partie de la force T va être nécessaire pour accélérer m_1.

En appliquant la deuxième loi de Newton :
— sur m_1 :

$$m_1\vec{a} = \left(\vec{P_1} + \vec{R_{N_1}}\right) + \vec{T} - \vec{T'}$$

On projette :

$$m_1 a = T - T'$$

— sur m_2 :

$$m_2\vec{a} = \left(\vec{P_2} + \vec{R_{N_2}}\right) + \vec{T'}$$

On projette :

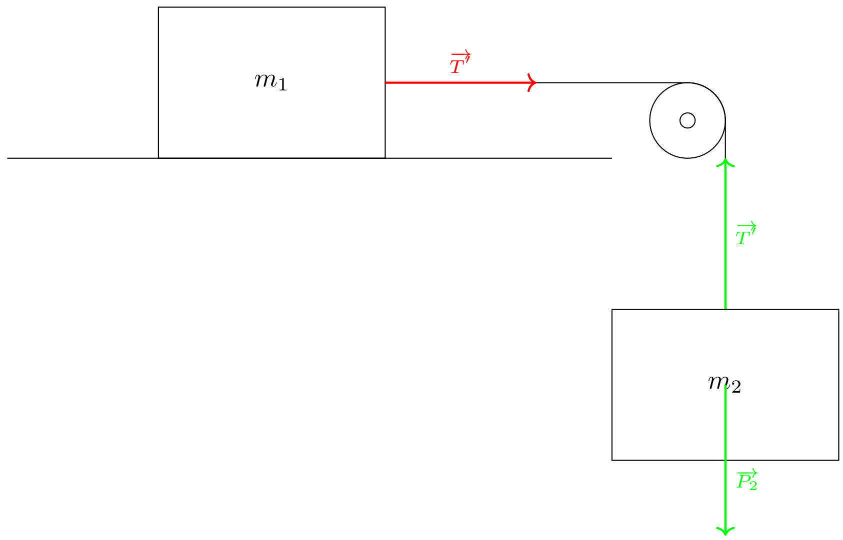
$$m_2 a = T'$$

— On en déduit que :

$$(m_1 + m_2)\, a = T - T' + T' \qquad etdonc \qquad a = \frac{T}{m_1 + m_2}$$

$$T' = \frac{m_2 \cdot T}{m_1 + m_2}$$

Autre situation analogue : La masse m_1 glisse sans frottements, on néglige tout frottement et toute inertie au niveau de la poulie. Ainsi, les tensions $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{T'}$ ont même intensité. Par ailleurs, le fil restant tendu, les accélérations des deux masses sont égales.



— Deuxième loi de Newton appliquée à m_2 :

$$m_2 \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T'}$$

Projection :

$$m_2 a = m_2 g - T'$$

— Deuxième loi de Newton appliquée à m_1 :

$$m_1 \overrightarrow{a_1} = \left(\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{R_N}\right) + \overrightarrow{T}$$

Projection :

$$m_1 a = T$$

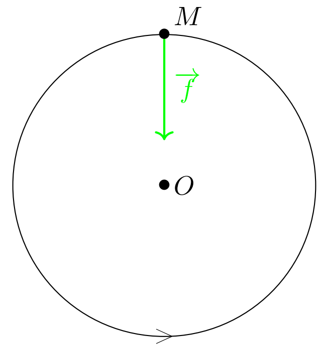
Ainsi,

$$(m_1 + m_2)\, a = m_2\, g$$

$$a = \frac{m_2\, g}{m_1 + m_2}$$

3.3 Mouvement circulaire uniforme

On a vu en étudiant la cinématique que lors d'un mouvement circulaire uniforme l'accélération était *centripète*, c'est à dire constamment dirigée vers le centre de la trajectoire. La résultante des forces ayant, d'après la deuxième loi de Newton, même direction et même sens que l'accélération, on en déduit que la force nécessaire à l'entretien d'un mouvement circulaire est elle aussi centripète. Le mouvement (quasi circulaire) des planètes autour du soleil, la force de gravitation exercée sur la planète par le soleil étant dirigée vers le centre du soleil, en est un bon exemple.



Application : On considère cette situation avec des ordres de grandeur que l'on peut associer à une fronde du moyen âge : $m = 200\,g$, $r = 30\,cm$ et une fréquence de rotation de $3,5\,tr/s$. Que vaut la force ?

$$\overrightarrow{f} = m\,\overrightarrow{a}$$

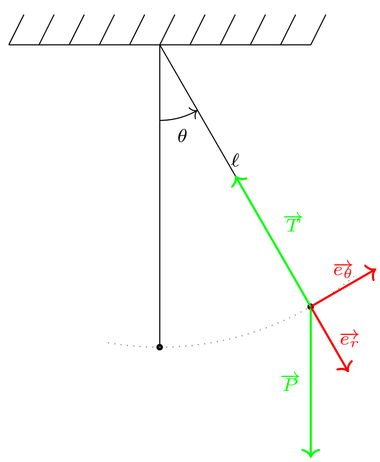
$$\overrightarrow{a} = -r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_r}$$

$$f = m\,r\,\dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta} = 2\pi\,f$$

On trouve $f = 29\,N$.

3.4 Pendule simple



On a un mouvement d'oscillations dans un plan. Bilan des forces :
- Poids $\overrightarrow{P}$
- Tension $\overrightarrow{T}$

La deuxième loi de Newton donne :

$$m\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T}$$

Or, l'expression de l'accélération en coordonnées polaires est, compte tenu du fait que le mouvement est circulaire (de rayon $r = \ell$) :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} = -r\,\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + r\,\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

On projette :

$$sur\ \overrightarrow{e_r} : -\,m\,r\,\dot{\theta}^2 = m\,g\cos\theta - T$$

$$sur\ \overrightarrow{e_\theta} : m\,r\,\ddot{\theta} = -m\,g\sin\theta$$

On déduit de la seconde projection l'équation du mouvement :

$$\ell\,\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

On utilise l'approximation des petits angles, $\sin\theta \approx \theta$. On a alors $\ell\ddot{\theta} + g\,\theta = 0$. On pose $w_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Alors, on a

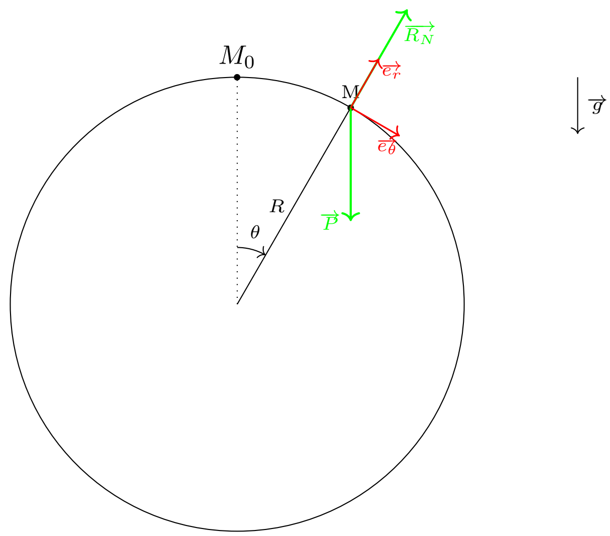
$$\ddot{\theta} + w_0^2\,\theta = 0$$

La solution est sinusoïdale, ce qui correspond à des oscillations harmoniques de période

$$T = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

3.5 Mouvement à la surface d'une sphère

On abandonne un objet M sans vitesse initiale au sommet d'une sphère ($\theta = 0$), sur laquelle il glisse sans frottements. Quelle est la valeur de θ lorsque M quitte le contact avec la sphère ?



Bilan des forces :
- Poids $\overrightarrow{P}$
- Réaction normale du support $\overrightarrow{R_N}$

On peut traduire le fait que le contact cesse en écrivant que la réaction normale du support s'annulle.
On utilise la deuxième loi de Newton :

$$m\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R_N}$$

Or,

$$\overrightarrow{a} = -r\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r} + r\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

On projette :

$$\textit{sur } \overrightarrow{e_r} : -\,m\,r\,\dot{\theta}^2 = -m\,g\cos\theta + R_N$$
$$\textit{sur } \overrightarrow{e_\theta} : m\,r\,\ddot{\theta} = m\,g\sin\theta + 0$$

On déduit de la première projection :

$$R_N = m\,g\cos\theta - m\,r\,\dot{\theta}^2$$

On remarque que $r\,\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r}$. On cherche donc à exprimer la vitesse en fonction de θ. On va utiliser la conservation de l'énergie entre M_0 et M.

$$0 + m\,g\,R = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,R\cos\theta$$

On en déduit que $v^2 = 2\,g\,r\,(1-\cos\theta)$, et donc

$$R_N = m\,g\cos\theta - 2\,m\,g\,(1-\cos\theta) = 3\,m\,g\cos\theta - 2\,m\,g$$

Ainsi, $R_N = 0$, donc

$$3\,m\,g\cos\theta = 2\,m\,g$$
$$\theta_{lim} = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48°$$