Travail et énergie potentielle

1 Conservation de l'énergie

1.1 Principe de conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie d'un système isolé est une loi qui recouvre tous les domaines de la physique. Le texte qui suit est extrait du livre de Richard Feynman, savant américain du $20^{ème}$ siècle.

Qu'est-ce que l'énergie ?

Dans ce chapitre, nous commençons notre étude plus détaillée de différents aspects de la physique, ayant terminé notre description des choses en général. Afin d'illustrer les idées et les types de raisonnement qui peuvent être utilisés en physique théorique, nous allons maintenant examiner l'une des lois les plus fondamentales de la physique, la conservation de l'énergie.

C'est un fait, si vous voulez une *loi*, qui gouverne tous les phénomènes naturels connus à ce jour. Il n'y a pas d'exception connue à cette loi — elle est exacte pour autant que nous le sachions. La loi est appelée *conservation de l'énergie*. Elle affirme qu'il y a une certaine quantité que nous appelons énergie, qui ne change pas dans les multiples modifications que peut subir la nature. C'est une idée très abstraite, car c'est un principe mathématique ; ce principe dit qu'il existe une quantité numérique, qui ne change pas, lorsque quelque chose se passe. Ce n'est pas la description d'un mécanisme, ou de quoi que ce soit de concret ; c'est simplement ce fait étrange que nous puissions calculer un certain nombre et que, lorsque nous avons terminé d'observer l'évolution de la nature et que nous recalculons ce nombre, il soit le même. (Un peu comme ce fou sur un carré blanc qui, après un certain nombre de mouvements — aux détails inconnus — est toujours sur un carré blanc. C'est une loi de cette nature.)

Puisque c'est une idée abstraite, nous illustrerons sa signification par une analogie. Imaginons un enfant, par exemple « Denis la menace », qui possède des cubes absolument indestructibles, et qui ne peuvent pas être divisés en morceaux. Tous les cubes sont identiques. Supposons qu'il ait 28 cubes. Sa mère le met dans une chambre au début de la journée avec 28 cubes. À la fin de la journée, étant curieuse, elle compte les cubes avec attention et découvre une loi phénoménale — quoi qu'il fasse avec ses cubes, il en reste toujours 28 ! Ceci se répète plusieurs jours durant, jusqu'au jour où il n'y a que 27 cubes, mais un peu de recherche montre qu'il y en a un sous le tapis — elle doit regarder partout pour s'assurer que le nombre de cubes n'a pas changé. Un jour, cependant, le nombre semble changer — il n'y a que 26 cubes. Une recherche attentive montre que la fenêtre était ouverte, et en regardant dehors, elle retrouve les deux autres cubes. Un autre jour, un compte précis indique qu'il y en a 30 ! Ceci lui causa une consternation considérable, jusqu'au moment où elle réalisa que Bruce était venu en visite, amenant ses cubes avec lui, et qu'il en laissa quelques-uns à la maison de Denis. Après s'être débarrassée de ces cubes supplémentaires, elle ferme la fenêtre, ne laisse pas rentrer Bruce et tout, alors, se passe bien, jusqu'au moment où recomptant elle ne trouve que 25 cubes. Néanmoins, il y a une boite dans la chambre, une boite de jouets, et la mère essaye d'ouvrir la boite, mais le garçon dit « Non, n'ouvre pas la boite à jouets », et se met à crier. La mère n'a pas le droit d'ouvrir la boite à jouets. Étant extrêmement curieuse et quelque peu ingénieuse, elle invente un stratagème ! Elle sait qu'un cube pèse cent grammes, aussi pèse-t-elle la boite au moment où elle voit 28 cubes, et elle trouve 500 grammes. À la vérification suivante, elle repèse la boite, soustrait 500 grammes et divise par 100. Elle découvre la chose suivante :

$$(nombre\ de\ cubes\ observés) + \frac{(poids\ de\ la\ boite) - 500\ grammes}{100\ grammes} = constante$$

Puis de nouvelles déviations apparaissent, mais une étude précise indique que le niveau de l'eau sale de la baignoire s'est modifié. L'enfant jette les cubes dans l'eau, et elle ne peut les voir parce que cette eau est trop sale, mais elle peut savoir combien de cubes se trouvent dans l'eau, en ajoutant un terme à sa formule. Puisque la hauteur initiale de l'eau était de 15 centimètres, et que chaque cube élève le niveau d'un demi-centimètre, cette nouvelle formule sera :

$$(nombre\ de\ cubes\ observés) + \frac{(poids\ de\ la\ boite) - 500\ grammes}{100\ grammes}$$

$$+\frac{(hauteur\ de\ l'eau) - 15cm}{0,5cm} = constante$$

Dans l'augmentation progressive de la complexité de son univers, elle trouve toute une série de termes représentant des manières de calcules combien de cubes se trouvent dans des endroits où il ne lui est pas permis de regarder. En conclusion, dans son cas, elle trouve une formule complexe, une quantité qui *doit être calculée*, et qui reste toujours la même.

Quelle est l'analogie entre ceci et la conservation de l'énergie ? L'aspect le plus remarquable qui doit être écarté de ce schéma est qu'il *n'y a pas de cubes*. Éliminez les premiers termes dans les deux formules et vous allez découvrir que vous calculez des choses plus ou moins abstraites. L'analogie est réalisée sur les points suivants. D'abord, lorsque nous calculons l'énergie, une certaine quantité de cette énergie quitte quelquefois le système et s'en va, ou d'autres fois un peu d'énergie rentre dans le système. Afin de vérifier la conservation de l'énergie, nous devons avoir soin de ne pas en ajouter ni en enlever. Ensuite, l'énergie apparait sous un très grand nombre de *formes différentes*, et il existe une formule pour chacune.

Ce sont : l'énergie gravitationnelle, l'énergie cinétique, l'énergie thermique, l'énergie élastique, l'énergie électrique, l'énergie chimique, l'énergie de rayonnement, l'énergie nucléaire, l'énergie de masse. Si nous additionnons les formules pour chacune de ces contributions, il n'y aurait pas de changement à l'exception de l'énergie qui rentre et qui sort.

Il est important de réaliser que dans la physique d'aujourd'hui, nous n'avons aucune connaissance de ce *qu'est* l'énergie. Nous n'avons pas de représentation comme quoi l'énergie viendrait en petits paquets d'une certaine quantité. Ce n'est pas ainsi. Cependant des formules permettent de calculer une certaine quantité numérique et lorsque nous les ajoutons toutes ensemble, cela donne « 28 », toujours le même nombre. C'est une chose abstraite en cela qu'elle ne donne pas le mécanisme ou les *raisons* des diverses formules.

Extrait de R.P FEYNMANN

On a ainsi une loi générale : l'énergie d'un système isolé (sans échanges avec l'extérieur) est constante.

1.2 Exemple de conservation de l'énergie : la chute libre

L'intérêt de la chute libre est que l'on connait les lois du mouvement. On part de $z = 0$, sans vitesse initiale, les «formules de la chute libre» sont donc :

$$a_z = -g \qquad v_z = -g\,t \qquad z = -\frac{1}{2}\,g\,t^2$$

On peut donc écrire

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g^2t^2}{2} \qquad et \qquad -\,g\,z = \frac{g^2t^2}{2}$$

Et on remarque ainsi que

$$\frac{v^2}{2} + g\,z = 0 = cste$$

On a donc pu construire une quantité qui reste constante au cours du mouvement. On peut multiplier par la masse pour retrouver la dimension d'une énergie :

$$\frac{mv^2}{2} + m\,g\,z = 0 = cste$$

1.3 Energie cinétique et énergie potentielle

Dans l'expression précédente, on identifie un terme d'*énergie cinétique* et un terme d'*énergie potentielle* :

$$\underbrace{\frac{m v^2}{2}}_{ec} + \underbrace{m\,g\,z}_{ep} = cste$$

L'énergie cinétique dépend de la vitesse. Son expression est toujours :

$$ec = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

L'énergie potentielle dépend de la position. Il en existe de nombreuses expressions, chacune associée à une force. Par exemple, $ep = m\,g\,z$ est l'énergie potentielle de pesanteur, associée au poids.

2 Théorème de l'énergie cinétique

2.1 Enoncé

Dans l'exemple de la chute libre, l'énergie cinétique varie sous l'action du poids (elle diminue si l'objet monte et augmente si il descend). D'une manière générale, les forces sont reliées aux variations d'énergie cinétique par l'intermédiaire de leur *travail* : *« La variation d'énergie cinétique est égale au travail des forces ».*

$$\Delta E_c = e_{c_B} - e_{c_A} = \mathcal{W}_{AB}\left(\vec{f}\right)$$

où $\mathcal{W}_{AB}\left(\vec{f}\right)$ est le travail réalisé par la résultante des forces $\vec{f}$ lors du déplacement entre les points A et B.

Ce théorème est une conséquence de la deuxième loi de Newton (voir ci-dessous), il n'est donc valable *a priori* que dans un référentiel galiléen. Il ne donne pas davantage d'informations (et généralement moins) que la seconde loi de Newton, puisqu'il consiste en une seule équation scalaire alors que la seconde loi de Newton, projetée, en donne jusqu'à trois.

2.2 Démonstration

On considère une résultante des forces $\vec{f}$, qui modifie l'énergie cinétique ec d'un objet en mouvement. On part de l'expression de ec, et on cherche à exprimer sa variation au cours du temps $\frac{dec}{dt}$:

$$\frac{dec}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right) = \frac{1}{2}\,m\,\frac{d\left(v^2\right)}{dt}$$

Or, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Donc,

$$\frac{d\left(v^2\right)}{dt} = 2\,v_x\frac{dv_x}{dt} + 2\,v_y\frac{dv_y}{dt} + 2\,v_z\frac{dv_z}{dt} = 2\left(v_x\,a_x + v_y\,a_y + v_z\,a_z\right) = 2\,\vec{v}\cdot\vec{a}$$

Ainsi,

$$\frac{dec}{dt} = \frac{1}{2}\,m\,2\,\vec{v}\cdot\vec{a} = \vec{v}\cdot\left(m\,\vec{a}\right)$$

Or, $m\,\vec{a} = \vec{f}$ (on utilise la seconde loi deNewton, ce qui fait que le théorème de l'énergie cinétique en «découle»). On obtient ainsi :

$$\frac{dec}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}$$

Ce résultat constitue la forme différentielle du théorème de l'énergie cinétique.

2.3 Puissance et travail d'une force

Les termes de l'égalité précédente $\frac{dec}{dt} = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}$ sont homogènes à une *puissance*, qui correspond dimensionnellement à une énergie divisée par un temps. Par définition, $\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}$ est la puissance de la force $\overrightarrow{f}$:

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}$$

Pour passer de la forme différentielle du théorème de l'énergie cinétique à sa forme intégrale $\Delta E_c = \mathcal{W}\left(\vec{f}\right)$, on doit considérer une variation d'énergie cinétique finie entre deux points A et B, et donc écrire que $\Delta ec = ec_B - ec_A$ est la somme des petites variations dec sur tout le chemin entre A et B :

$$ec_B - ec_A = \int_A^B dec$$

On doit maintenant exprimer dec : $\frac{dec}{dt} = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}$ donne $de_c = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}\, dt$. Or, $\overrightarrow{v}\, dt = \overrightarrow{d\ell}$, où $\overrightarrow{d\ell}$ est un déplacement élémentaire. Donc, on écrit :

$$dec = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Et donc

$$e_{c_B} - e_{c_A} = \int_A^B \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{dl}$$

On fait ainsi apparaitre l'expression du *travail d'une force* :

$$\mathcal{W}_{AB}\left(\vec{f}\right) = \int_A^B \vec{f} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Et on a bien retrouvé le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta ec = ec_B - ec_A = \mathcal{W}_{AB}\left(\vec{f}\right)$$

3 Travail

3.1 Expression du travail d'une force

La définition du *travail d'une force* $\overrightarrow{f}$ sur un trajet AB est :

$$\mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right) = \int_A^B \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

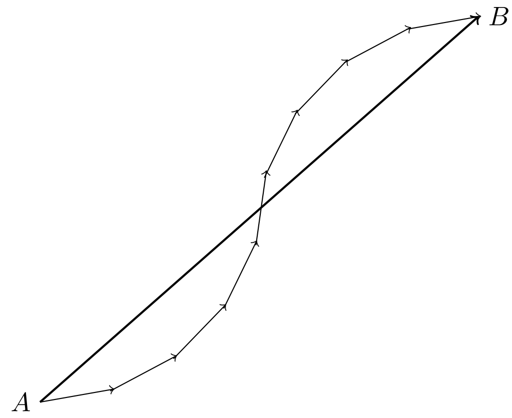
Il faut interpréter cette intégrale *curviligne* (i.e le long d'une courbe, en l'occurrence la courbe correspondant à la trajectoire suivie entre A et B) comme une somme : on somme, le long du trajet AB les *travaux élémentaires* $\delta w = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{d\ell}$, c'est à dire que l'on pourrait aussi écrire :

$$\mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right) = \int_A^B \delta w$$

Le cas particulier du travail d'une *force constante* est important, et l'expression du travail est alors très simple puisque l'on peut «sortir $\overrightarrow{f}$ de l'intégrale» :

$$\mathcal{W}_{AB}\left(\vec{f}\right) = \int_A^B \vec{f} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \vec{f} \cdot \int_A^B \overrightarrow{d\ell}$$

Mais $\int_A^B \overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{AB}$, en effet en sommant vectoriellement tous les déplacements élémentaires le long du chemin curviligne qui va de A à B, on obtient le vecteur $\overrightarrow{AB}$.



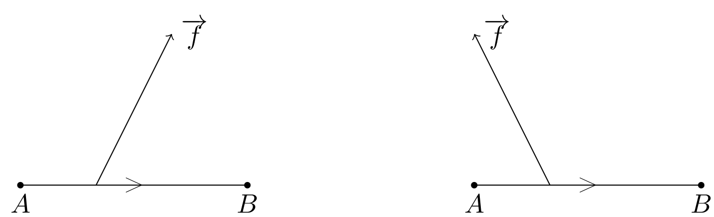
On a donc finalement, dans le cas d'une force constante :

$$\mathcal{W}_{AB}\left(\vec{f}\right) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB}$$

3.2 Propriétés

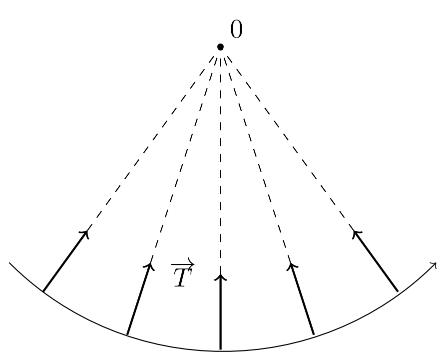
D'un point de vue dimensionnel, un travail est le produit d'une force par une distance, ce qui correspond à une énergie, et il s'exprime donc en Joules.

Un travail *positif* est dit *moteur*, alors qu'un travail *négatif* est qualifié de *résistant*. Un travail moteur, qui tend à augmenter l'énergie cinétique, correspond à une situation où «la force est dans le même sens que le déplacement», alors que pour un travail résistant, qui tend à diminuer l'énergie cinétique, «la force est en sens opposé au déplacement». On peut illustrer ceci sur le cas simple d'un déplacement rectiligne et d'une force constante :

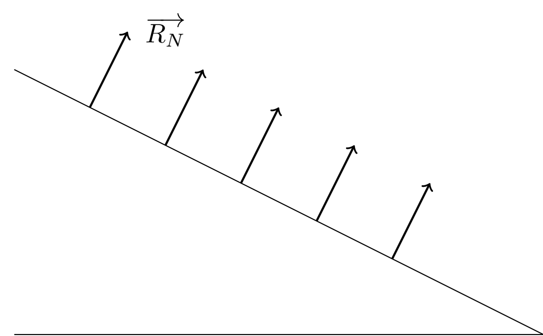


travail moteur travail résistant

Lorsqu'une force est *constamment perpendiculaire au mouvement*, son travail est nul. Il n'est pas nécessaire que la force soit constante ou que le déplacement soit rectiligne, il suffit que pour chaque déplacement élémentaire la force soit orthogonale à ce déplacement, ainsi tous les travaux élémentaires sont nuls et leur somme est nulle.



pendule simple : $\vec{T}$ orthogonale au mouvement



plan incliné : $\overrightarrow{R_N}$ orthogonale au mouvement

Dans le cas où plusieurs forces interviennent, on peut soit calculer le travail de chaque force puis sommer, soit chercher à exprimer la résultante des forces puis calculer son travail. En effet, le travail d'une somme (vectorielle) de forces est égal à la somme des travaux de ces forces :

$$\mathcal{W}_{AB}(\sum_i \overrightarrow{f_i}) = \int_A^B (\sum_i \overrightarrow{f_i}) \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_A^B (\sum_i \overrightarrow{f_i} \cdot \overrightarrow{d\ell}) = \sum_i \int_A^B \overrightarrow{f_i} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \sum_i \mathcal{W}_{AB}(\overrightarrow{f_i})$$

3.3 Exemples

Travail du poids :

C'est simplement un cas particulier de travail d'une force constante, on peut donc partir de $\mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right) = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{AB}$. Comme $\overrightarrow{p} = -mg\overrightarrow{e_z}$ (l'axe $((Oz)$ étant orienté vers le haut) et $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{e_x} + (y_B - y_A)\overrightarrow{e_y} + (z_B - z_A)\overrightarrow{e_z}$, on obtient :

$$\mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{P}\right) = m\,g\,(z_A - z_B)$$

Il est intéressant de noter que le travail du poids entre deux points A et B ne dépend que de leurs altitudes, ce qui est lié au fait que la poids est une force verticale.

Travail d'une force de rappel élastique :

On considère une force de rappel qui s'écrit $\overrightarrow{f}_k = -kx\overrightarrow{e_x}$, et deux points A et B sur (Ox) d'abcisses x_A et x_B. La force n'est pas constante mais sa direction l'est, ce qui fait que le produit scalaire est simple à calculer :

$$\mathcal{W}_{AB}\left(\vec{f_k}\right) = \int_A^B \vec{f_k} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_A^B (-kx\overrightarrow{e_x}) \cdot (dx\overrightarrow{e_x}) = -k\int_A^B x dx = \frac{k}{2}({x_A}^2 - {x_B}^2)$$

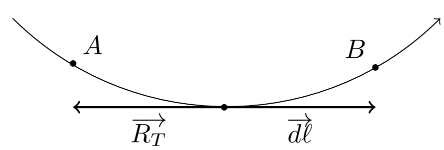
Force tangente à la trajectoire :

On prend ici le cas d'une force constamment tangente à la trajectoire, *i.e.* colinéaire à $\overrightarrow{v}$ (et donc au déplacement élémentaire $\overrightarrow{\ell}$), par exemple le frottement solide $\overrightarrow{R_T}$. Pour simplifier, on considère que la norme de $\overrightarrow{R_T}$, notée R_T, est constante.

$$\mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{R_T}\right) = \int_A^B \overrightarrow{R_T} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_A^B -R_T\,d\ell = -R_T\int_A^B d\ell$$

Or, en sommant les *petites longueurs* $d\ell$ le long de la trajectoire entre A et B, on obtient la longueur du chemin suivi entre A et B, que l'on note $\widehat{AB}$. On a finalement :

$$\mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{R_T}\right) = -R_T\,\widehat{AB}$$



4 Energie potentielle

4.1 Forces conservatives et non conservatives

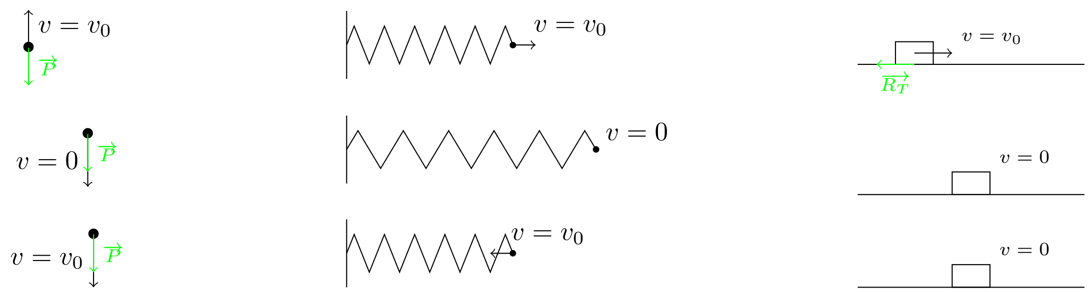
Une force est dite *conservative* si on peut définir une énergie potentielle ep telle que, sous la seule action de cette force, la somme $ec + ep$ reste constante.

Lorsque l'on associe une énergie potentielle à une force, on cherche à construire une grandeur fonction des coordonnées d'espace qui ait cette propriété de conservation de $ec+ep$. On en a vu un exemple avec l'énergie potentielle de pesanteur $ep = mgz$, associée au poids, qui vérifie effectivement $ec + ep = cste$ au cours de la chute libre.

Inversement, une force n'est pas conservative lorsque, sous l'action de cette force, $ec + ep$ n'est pas constante. Leur travail n'est pas nul mais elles n'ont pas d'énergie potentielle associée, ce qui se traduit par le fait qu'il est impossible de «récupérer» l'énergie cinétique perdue du fait de leur travail. Les frottements (fluide ou solide) sont le principal exemple de force non conservative.

Pour illustrer cette différence entre forces conservatives et forces non conservatives, on envisage trois situations où sous l'action d'une force une vitesse initiale s'annule, et on envisage ce qui se passe ultérieurement, toujours sous l'action de cette force.

Poids (conservative) : Rappel élastique (conservative) Frottement, (non conservative)



4.2 Liens entre force et énergie potentielle

L'énergie potentielle ep associée à une force $\overrightarrow{f}$ doit vérifier le fait que, sous l'action de cette force, on ait :

$$ep + ec = cste$$

Ceci implique que les petites variations de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle se compensent :

$$dep + dec = 0$$

Or, d'après le théorème de l'énergie cinétique, une petite variation d'énergie cinétique est égale au travail élémentaire de la force :

$$dec = \delta w = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

On a donc finalement :

$$dep = -\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Une fois que l'on a exprimé une petite variation d'énergie potentielle, il faut intégrer (rechercher une primitive) pour obtenir ep. Cette intégration fait intervenir une constante (additive) que l'on fixe arbitrairement (une valeur d'énergie potentielle n'a pas de signification physique, seules les *différences d'énergie potentielle* en ont une, ce qui rend la valeur de la constante non significative).

Prenons l'exemple de l'énergie potentielle de pesanteur, associée au poids $\overrightarrow{p} = -m\,g\,\overrightarrow{e_z}$.
$dep = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{d\ell}$. Or, $\overrightarrow{d\ell} = dx\,\overrightarrow{e_x} + dy\,\overrightarrow{e_y} + dz\,\overrightarrow{e_z}$. Donc,

$$dep = -\left(-m\,g\,\overrightarrow{e_z}\right) \cdot \left(dx\,\overrightarrow{e_x} + dy\,\overrightarrow{e_y} + dz\,\overrightarrow{e_z}\right) = m\,g\,dz$$

On intègre :

$$ep = m\,g\,z + cste$$

Choisir la valeur de la constante revient à choisir la valeur de ep — en général 0 — à une position donnée. Dans la cas présent, le plus simple est de considérer que l'énergie potentielle est nulle en $z = 0$, ce qui donne $cste = 0$.
Finalement, on arrive bien à l'expression donnée au début de ce chapitre :

$$ep = m\,g\,z \qquad \text{avec } (Oz) \text{ orienté vers le haut}$$

Considérons maintenant le problème inverse : comment trouver l'expression de la force associée à une énergie potentielle ? On commence par un cas à une dimension, où ep ne dépend que de x. On peut alors écrire :

$$\overrightarrow{f} = f_x\overrightarrow{e_x} \qquad et \qquad \overrightarrow{d\ell} = dx\,\overrightarrow{e_x}$$

On part de $dep = -\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{d\ell}$, ce qui donne $dep = -f_x\, dx$ et donc $f_x = -\frac{de_p}{dx}$. Finalement,

$$\overrightarrow{f} = -\frac{de_p}{dx}\,\overrightarrow{e_x}$$

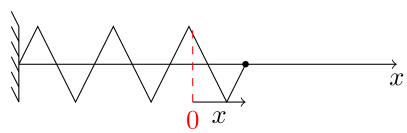
On peut généraliser à trois dimensions :

$$\overrightarrow{f} = -\left(\frac{dep}{dx}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{dep}{dy}\,\overrightarrow{e_y} + \frac{dep}{dz}\,\overrightarrow{e_z}\right) = -\overrightarrow{grad}\,(ep)$$

On retiendra que l'on passe d'une force à une énergie potentielle en intégrant et d'une énergie potentielle à une force en dérivant (on dit souvent que *une force dérive d'une énergie potentielle*).

4.3 Exemples

Énergie potentielle élastique



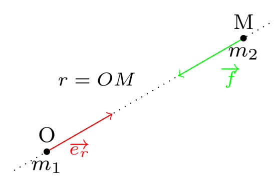
On prend l'origine à la position de repos du ressort. Ainsi, $x = \ell - \ell_0$ correspond à l'allongement du ressort. La force de rappel élastique est $\overrightarrow{f} = -k\,x\,\overrightarrow{e_x}$. Ainsi, $dep = -\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -(-k\,x\,\overrightarrow{e_x}) \cdot (dx\,\overrightarrow{e_x}) = k\,x\,dx$. On intègre :

$$ep = \frac{1}{2}\,k\,x^2 + cste$$

On choisit en général une énergie potentielle nulle à la position de repos. Donc, $cste = 0$. On a ainsi une expression de l'énergie potentielle élastique :

$$ep = \frac{1}{2}\,kx^2 \qquad \text{où } x \text{ est l'élongation :} \qquad x = (\ell - \ell_0)$$

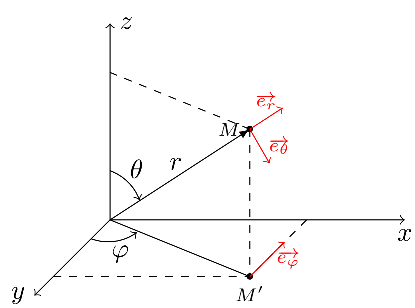
Énergie potentielle gravitationnelle



Force de gravitation :

$$\overrightarrow{f} = \frac{-G\,m_1\,m_2}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}$$

Déplacement élémentaire en coordonnées sphériques :



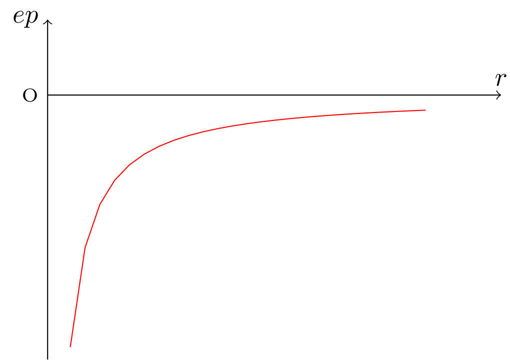
$$\overrightarrow{d\ell} = dr\,\overrightarrow{e_r} + r\,d\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi} = dr\,\overrightarrow{e_r} + \underbrace{(\overrightarrow{\cdots})}_{\perp\overrightarrow{e_r}}$$

On calcule dep :

$$dep = -\overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{d\ell} = -\left(-\frac{G\,m_1\,m_2}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}\right)\cdot(dr\,\overrightarrow{e_r} + (\overrightarrow{\cdots})) = \frac{G\,m_1\,m_2}{r^2}\,dr$$

On intègre, et on fait le choix d'une constante nulle, car on considère que quand $r \longrightarrow \infty$, $e_p \longrightarrow 0$. On a ainsi l'expression de l'énergie potentielle de gravitation :

$$ep = -\frac{G\,m_1\,m_2}{r}$$



Il est important de remarquer que cette énergie potentielle en $-\frac{1}{r}$ est une fonction *croissante* de la distance r.

5 Energie mécanique

5.1 Conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$e_m = e_c + e_p$$

Attention, si plusieurs forces conservatives interviennent, le terme ep doit contenir *toutes* les énergies potentielles qui leur sont associées.

L'énergie mécanique est constante lorsque *toutes* les forces qui interviennent sont soit conservatives, soit ne travaillent pas (parce qu'elles sont constamment orthogonales au déplacement). Elle n'est pas constante lorsque *au moins une* force non conservative intervient.

La conservation de l'énergie mécanique est plus simple à mettre en œvre que la loi fondamentale, mais donne moins d'informations, seulement une équation scalaire (de même que le théorème de l'énergie cinétique).

On peut vérifier que, lorsque la conservation de l'énergie mécanique est effective, elle est équivalente au théorème de l'énergie cinétique, puisque le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\Delta ec = \mathcal{W}$$

Mais la relation qui relie le travail d'une force conservative et l'énergie potentielle qui lui est associée s'écrit $dep = -\delta w$, ce qui donne pour une variation finie :

$$\Delta ep = -\mathcal{W}$$

On a donc $\Delta ec = -\Delta ep$, soit $\Delta(ec + ep) = 0$ et donc $\Delta(em) = 0$, ce qui donne $em = cste$.

On peut également écrire une relation vérifiée par l'énergie mécanique lorsqu'elle n'est *pas* conservée, et qui est appelée *théorème de l'énergie mécanique*. Pour cela, on écrit le théorème de l'énergie cinétique en séparant le travail en deux termes, celui qui est associé aux forces conservatives (noté $\mathcal{W}_c$) et celui associé aux forces non conservatives (noté $\mathcal{W}_{nc}$) :

$$\Delta ec = \mathcal{W}_c + \mathcal{W}_{nc}$$

Et comme $\Delta ep = -\mathcal{W}_c$, cela donne :

$$\Delta ec = -\Delta ep + \mathcal{W}_{nc}$$

Soit

$$\Delta ec + \Delta ep = \mathcal{W}_{nc}$$

Et donc finalement :

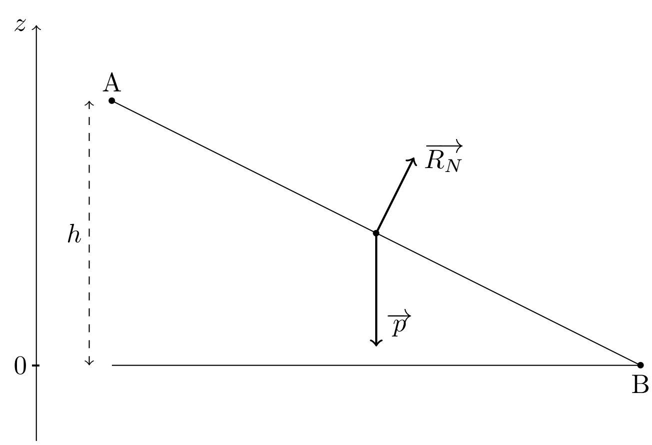
$$\Delta em = \mathcal{W}_{nc}$$

Ainsi, la variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives.

5.2 Conservation de l'énergie mécanique vs théorème de l'énergie cinétique

Lorsque toutes les forces sont conservatives, il est strictement équivalent d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique ou la conservation de l'énergie mécanique. Il est cependant préférable, si on connait l'expression de l'énergie potentielle, d'utiliser la conservation de em, puisque le calcul du travail a en fait déjà été fait au travers de celui de l'énergie potentielle.

On illustre l'équivalence entre les deux méthodes en considérant un exemple classique : la vitesse acquise par un objet qui glisse sans frottements le long d'un plan incliné, avec une vitesse initiale nulle en en descendant d'une hauteur h.



— en utilisant la conservation de l'énergie mécanique :
Il y a bien conservation, puisque le poids est une force conservative (avec une énergie potentielle associée $ep = mgz$) et que la réaction normale ne travaille pas. La conservation de em entre A et B donne :

$$em_A = em_B, \qquad \text{soit} \qquad ec_A + ep_A = ec_B + ep_B$$

Or, $ec_A = 0$ (puisque la vitesse initiale est nulle), $ep_A = mgz_A = mgh$ et $ep_B = mgz_B = 0$, on en déduit

$$0 + mgh = \frac{1}{2}m{v_B}^2 + 0 \qquad \text{et donc} \qquad v_B = \sqrt{2gh}$$

— en utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

$$ec_B - ec_A = \mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{p}\right) + \mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{R_N}\right)$$

On a toujours $ec_A = 0$, par ailleurs $\mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{R_N}\right) = 0$ (force orthogonale au mouvement) et

$$\mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{p}\right) = \overrightarrow{p}\,.\,\overrightarrow{AB} = mg(z_B - z_A = mgh$$

On en déduit

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 - 0 = mgh \qquad \text{et donc} \qquad v_B = \sqrt{2gh}$$

Exemple d'utilisation de théorème de l'énergie cinétique avec des forces non conservatives : Lorsqu'il y a des forces non conservatives, $em = ec + ep$ n'est pas valable, mais le théorème de l'énergie cinétique reste valable. On prend l'exemple du freinage d'un véhicule.

Le freinage commence en A, et le véhicule s'immobilise en B. La masse est m, le coefficient de frottement solide est μ. On calcule la distance d'arrêt $d = AB$. On considère que l'on est constamment à la limite du glissement. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$$ec_B - ec_A = \mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right)$$

$$ec_B = 0 \qquad ec_A = \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$$

$$\mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right) = \underbrace{\mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{P}\right)}_{=0} + \underbrace{\mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{R_N}\right)}_{=0} + \mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{R_T}\right)$$

On sait que

$$\mathcal{W}_{AB}\left(\overrightarrow{R_T}\right) = \overrightarrow{R_T} \cdot \overrightarrow{AB} = -R_T\, d$$

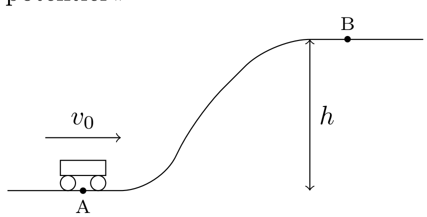
et que $R_T = \mu\, R_N = \mu\, m\, g$. Ainsi,

$$d = \frac{v_0^2}{2\, \mu\, g}$$

5.3 Exemples d'utilisation

La conservation de l'énergie mécanique de même que le théorème de l'énergie cinétique) fournit *une* équation scalaire. Elle est le plus souvent utilisée pour déterminer une vitesse (la norme, pas le vecteur) mais peut aussi permettre de déterminer une position (si elle est caractérisée par un seul paramètre).

— Franchissement d'une « barrière de potentiel »



On cherche la vitesse minimale v_0 donnée au chariot de masse m en A pour qu'il arrive en B « sur son élan » en négligeant les frottements. On a conservation de $em = e_c + ep$ avec $ep = m\, g\, z$. Ainsi,

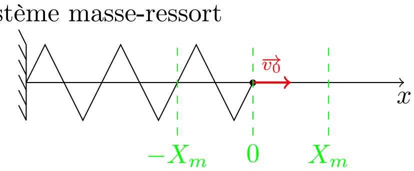
$$ec_A + epA = ecB + epB$$

Arriver en B signifie que, en B, la vitesse est au moins nulle. Donc

$$\frac{1}{2}\, m\, v_0^2 + 0 = 0 + m\, g\, h$$

$$v_0 = \sqrt{2\, g\, h}$$

— Amplitude des oscillations d'un système masse-ressort



On prend comme situation initiale $\ell = \ell_0$ et $v_x = v_0$. La masse se met à oscille entre $\ell_{min} = \ell_0 - X_m$ et $\ell_{max} = \ell_0 + X_m$. X_m est l'amplitude des oscillations. Le poids et la réaction normale ne travaillent pas, la force de rappel élastique est conservative. Ainsi, $em = ec + ep = cste$, avec $ep = \frac{1}{2}\,k\,x^2$. On applique la conservation de l'énergie mécanique entre A, la situation initiale ($v_x = v_0, x = 0$) et B, l'élongation maximale ($v_x = 0, x = X_m$) :

$$ec_A + ep_A = ec_B + ep_B$$
$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}\,k\,X_m^2$$
$$X_m = v_0\,\sqrt{\frac{m}{k}}$$

— Comète de Halley

La distance minimale est le périhélie, avec $r_P = 88 \cdot 10^9\ m$. La distance maximale est l'aphélie, avec $r_A = 5300 \cdot 10^9\ m$. Au périhélie, la vitesse par rapport au référentiel héliocentrique est de $v_P = 54,5\ km \cdot s^{-1}$. Peut on calculer v_A ?

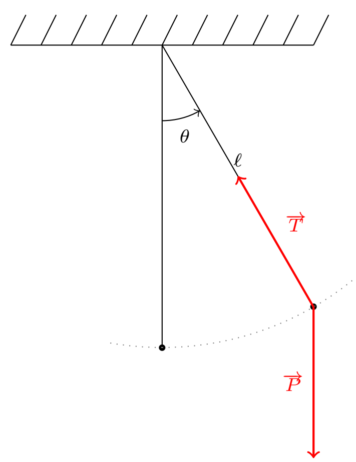
$$\frac{1}{2}\,M_H\,v_P^2 - \frac{G\,M_S\,M_H}{r_P} = \frac{1}{2}\,M_H\,v_A^2 - \frac{G\,M_S\,M_H}{r_A}$$

On trouve $v_A = 810\ m \cdot s^{-1}$

5.4 Pendule simple

La conservation de l'énergie mécanique peut aussi être utilisée pour obtenir l'équation du mouvement. Il faut pour cela que le mouvement soit à un degré de liberté, c'est à dire que la position soit décrite par un seul paramètre. La démarche est d'expliciter l'expression de l'énergie mécanique en fonction du paramètre et de sa dérivée par rapport au temps, puis d'écrire que, comme $em = cste$, $\frac{dem}{dt} = 0$, et d'en déduire l'équation différentielle.

On illustre cette démarche sur l'exemple du pendule simple :



Le paramètre qui permet de décrire la position est l'angle θ, le poids $\overrightarrow{p}$ est une force conservative et la tension du fil $\overrightarrow{T}$ ne travaille pas. Donc, $em = ec + ep = cste$, avec

$$ec = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 \qquad \text{et} \qquad ep = m\,g\,z = m\,g\,\ell\,(1 - \cos\theta)$$

On a donc

$$\frac{1}{2}\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 + m\,g\,\ell\,(1 - \cos\theta) = cste$$

Soit
$$\frac{\ell}{2}\,\dot{\theta}^2 + g\,(1-\cos\theta) = cste$$

On dérive par rapport au temps :
$$\frac{\ell}{2}\,2\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} + g\sin\theta\,\dot{\theta} = 0$$

Et on élimine la dérivée première (on retrouve toujours ce cas de figure où la dérivée première apparait dans les deux termes) :
$$\ell\,\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

On pose $w_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, et on a
$$\ddot{\theta} + w_0^2\sin\theta = 0$$

Pour de petits angles, $\sin\theta \approx \theta$, et donc
$$\ddot{\theta} + w_0^2\,\theta = 0$$

On retrouve l'équation caractéristique des oscillations harmoniques.

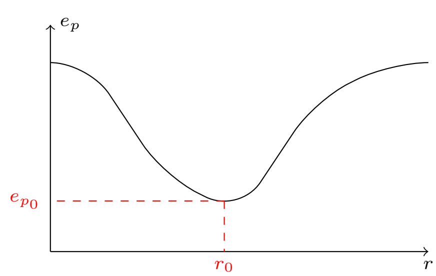
6 Mouvement conservatifs à un degré de liberté

Dans cette partie, on s'intéresse spécifiquement à des systèmes pour lesquels l'énergie mécanique est constante (d'où le nom de conservatifs) et possédant un seul degré de liberté.

Le nombre de degrés de liberté d'un système est le nombre de paramètres nécessaires pour décrire l'état du système. Quelques exemples :
- Point matériel dans un espace en 3 dimensions : 3 degrés de liberté
- Point matériel se déplaçant sur une surface : 2 degrés de liberté
- Point matériel se déplaçant le long d'une courbe : 1 degré de liberté
- Solide dans un espace à 3 dimensions : 6 degrés de liberté

6.1 Puits de potentiel, états liés et états de diffusion

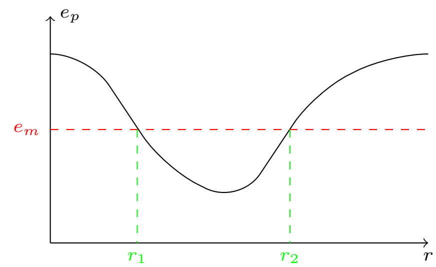
Dans le cas d'un système à un degré de liberté, il est facile de représenter l'énergie potentielle en fonction de la position et on peut tirer de nombreux renseignements d'un tel graphe. On parle de *puits de potentiel* lorsque la courbe $ep = f(r)$ présente un minimum local, on notera r_0 la valeur du paramètre qui décrit la position et ep_0 la valeur de l'énergie potentielle associées à ce minimum.



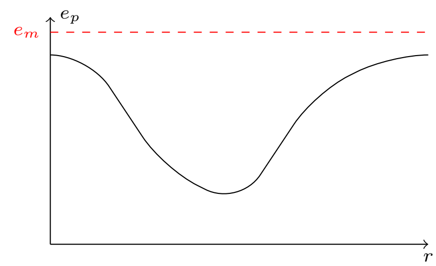
L'énergie mécanique étant fixée, on peut voir que selon sa valeur certaines valeurs de $r$seront possibles et d'autres non. Ceci peut être compris en remarquant que $em = ep + ec$, mais que $ec \geq 0$, ce qui fait que, nécessairement :
$$ep(r) \leq em$$
Ainsi, les valeurs de r «autorisées» sont celles pour lesquelles l'énergie potentielle est inférieure à l'énergie mécanique.

On peut alors distinguer deux situations : si l'énergie mécanique est inférieure à l'énergie potentielle sur les bords du puits de potentiel, le mouvement est borné (de manière imagée, l'énergie mécanique est insuffisante pour «sortir du puits») et on parle d'*état lié* ; inversement si l'énergie mécanique est supérieure à l'énergie potentielle sur les bords, toutes les valeurs de r sont possibles (on peut «sortir du puits») et il s'agit d'un *état de diffusion.*

État lié : r ne peut prendre que des valeurs comprises entre r_1 et r_2 (r_1 et r_2 étant définis par $ep(r_1) = ep(r_2) = em$) car il est impossible d'avoir $e_m < e_p$, cela reviendrait à avoir $e_c < 0$.



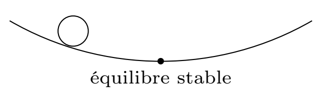
État de diffusion : Quel que soit r, $e_m > e_p$. Il n'y a donc pas de limite aux valeurs de r.



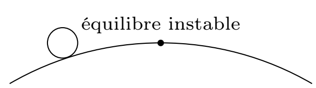
6.2 Positions d'équilibre et stabilité

Si on met le système dans une position d'équilibre, alors il reste dans cette position. Par exemple, pour le pendule simple, $\theta = 0$ est une position d'équilibre. Il existe deux types d'équilibre :

Équilibre stable : Si on s'écarte de cette position d'équilibre, on y revient spontanément.



Équilibre instable : Si on s'écarte de cette position d'équilibre, spontanément on s'en éloigne encore davantage.



On peut caractériser les positions d'équilibre à partir de l'énergie potentielle : une position d'équilibre est un extremum local de l'énergie potentielle, un minimum dans le cas d'une position d'équilibre stable et un maximum dans le cas d'une position d'équilibre instable. On peut traduire cela mathématiquement :

— L'équilibre stable en r_0 correspond à un minimum d'e_p :

$$\left(\frac{de_p}{dr}\right)(r_0) = 0$$

$$\left(\frac{d^2e_p}{dr^2}\right)(r_0) > 0$$

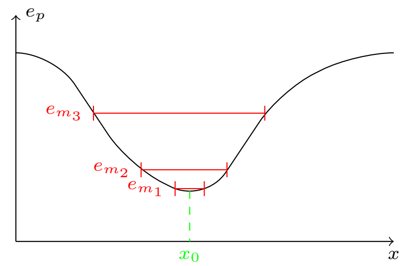
— L'équilibre instable en r_0 correspond à un maximum d'e_p :

$$\left(\frac{de_p}{dr}\right)(r_0) = 0$$

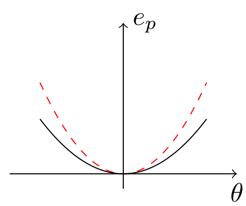
$$\left(\frac{d^2e_p}{dr^2}\right)(r_0) < 0$$

6.3 Petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable

Dans un état lié, le mouvement étant borné, il va être périodique, donc on a des oscillations. Ces oscillations tendent à se rapprocher d'oscillations harmoniques d'autant plus que leur amplitude est faible, et ce quelle que soit la forme du potentiel. Sur le figure qui suit, les oscillations d'énergie mécanique em_1 sont plus proches d'oscillations harmoniques que celles d'énergie mécanique em_2, elles mêmes «plus harmoniques» que celles d'énergie mécanique em_3.



Cela revient à dire qu'au voisinage d'une position d'équilibre stable, le puits de potentiel se rapproche d'une forme parabolique on peut l'illustrer avec l'énergie potentielle du pendule simple, d'autant plus proche d'une forme parabolique que θ est petit (en pointillés, la forme parabolique).



On peut expliciter ceci mathématiquement avec un développement limité de $ep = f(x)$ au voisinage de x_0 :

$$e_p(x) \simeq ep(x_0) + \frac{dep}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2ep}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2$$

Or, comme x_0 est un position d'équilibre stable, $\frac{dep}{dx}(x_0) = 0$ et $\frac{d^2ep}{dx^2}(x_0) > 0$. On peut poser $k = \frac{d^2e_p}{dx^2}(x_0)$, ainsi en plus d'être positive k a la propriété d'avoir la même dimension qu'une constante de raideur élastique (en $kg.\,s^{-2}$, ce qui correspond bien à des $N.m^{-1}$), ce qui justifie l'analogie. Ainsi, on obtient une expression de $e_p(x)$ qui correspond bien à une forme parabolique (la constante $ep(x_0)$ est sans importance) :

$$ep(x) \simeq ep(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

Conclusion : Les petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable sont approximativement harmoniques (d'autant plus qu'elles sont petites), et leur période est donnée par

$$f = \frac{2\pi}{w_0}2\pi$$

avec

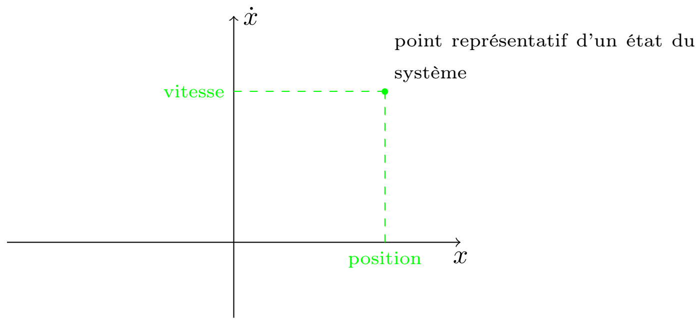
$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

avec

$$k = \frac{d^2e_p}{dx^2}(x_0)$$

7 Portraits de phase

On trace des portraits de phase pour les systèmes à un degré de liberté. La position du système n'est caractérisée que par un paramètre, noté par exemple x. Mais ce n'est pas suffisant pour caractériser complètement l'état d'un système. Pour caractériser complètement l'état d'un système à un degré de liberté, il faut préciser sa position et sa vitesse, notées par exemple x et $\dot{x}$. L'idée du portrait de phase est de donner une représentation graphique de l'état d'un système dans un *diagramme de phase* ($\dot{x}$ en fonction de x) :

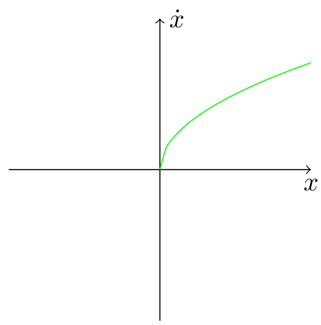


On appelle trajectoire de phase l'ensemble des points représentant l'état du système au cours d'une évolution.

Exemples :

— Chute libre :

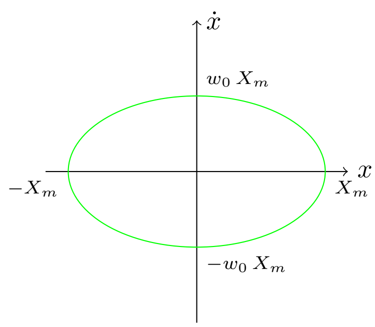
$$\begin{cases} \dot{x} = g\,t \\ x = \frac{1}{2}\,g\,t^2 \\ \dot{x} = \sqrt{2\,g\,x} \end{cases}$$



— Oscillations harmoniques :

$$x = X_m \cos\left(w_0\,t\right)$$

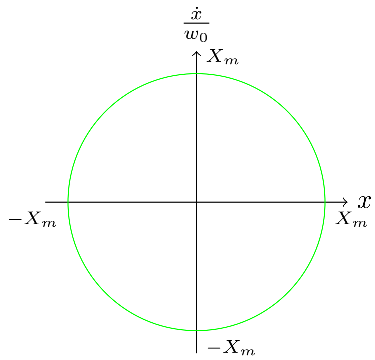
$$\dot{x} = -w_0\,X_m \sin\left(w_0\,t\right)$$



La trajectoire de phase est une ellipse. On peut aussi tracer $\frac{\dot{x}}{w_0}$ en fonction de x, on obtient ainsi une trajectoire de phase circulaire.

$$x = X_m \cos\left(w_0\,t\right)$$

$$\dot{x} = -\,X_m \sin\left(w_0\,t\right)$$



On peut ainsi reconnaitre des oscillations harmoniques : les trajectoires de phases $\frac{\dot{x}}{w_0} = f(x)$ *sont des cercles.*

— Oscillations amorties :

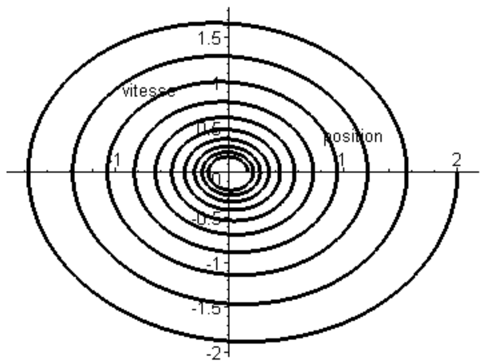


Diagramme de phase d'un oscillateur amorti

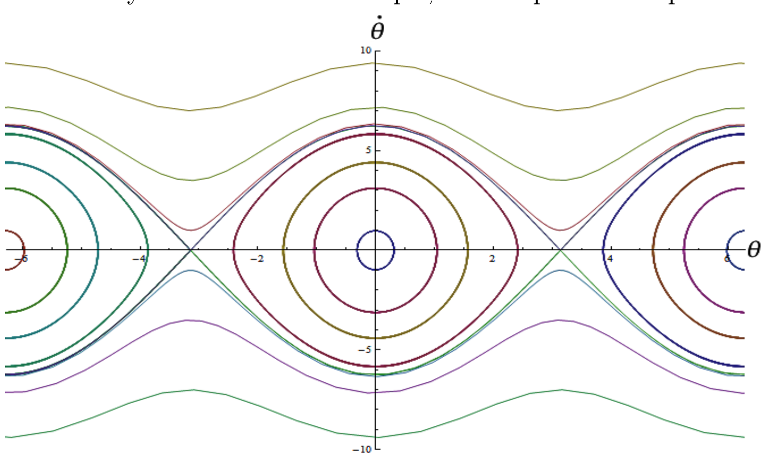
Propriétés des trajectoires de phase :

— Une trajectoire de phase est toujours parcourue dans le sens horaire. En effet, si l'on se place dans le quart supérieur droit du repère, on a $x > 0$ et $\dot{x} > 0$. Si, $\dot{x} > 0$, x augmente. Donc la trajectoire de phase est toujours parcourue en sens horaire.

— Une trajectoire de phase associée à des oscillations périodiques est une courbe fermée, car l'on revient périodiquement au même état, et donc au même point.

— Si un système est déterministe — c'est-à-dire qu'à partir d'une situation initiale, on peut prévoir sans ambiguité l'évolution ultérieure —, les différentes trajectoires de phase ne se coupent pas.

Un portrait de phase est un ensemble de plusieurs trajectoires de phase — correspondant à des conditions initiales différentes — d'un même système. A titre d'exemple, voici le portrait de phase du pendule simple :



Portrait de phase du pendule simple