

Mouvements d'une particule chargée dans des champs électrique et magnétique

1 Produit vectoriel

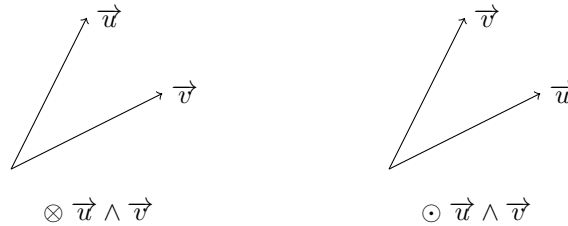
1.1 Définitions

- Le produit vectoriel est une opération sur deux vecteurs, dont le résultat est un vecteur.
- Règles de construction du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

direction : orthogonal au plan $(\vec{u}, \vec{v})$

norme : égale à $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$

sens : défini par la « règle du tire-bouchon » ou la « règle des trois doigts ».



1.2 Propriétés

- Le produit vectoriel n'est pas commutatif : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul, et en particulier, quel que soit $\vec{u}$, $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
- Le produit vectoriel de deux vecteurs orthogonaux est « maximal » : si $\vec{u} \perp \vec{v}$,

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

- Distributivité :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$$

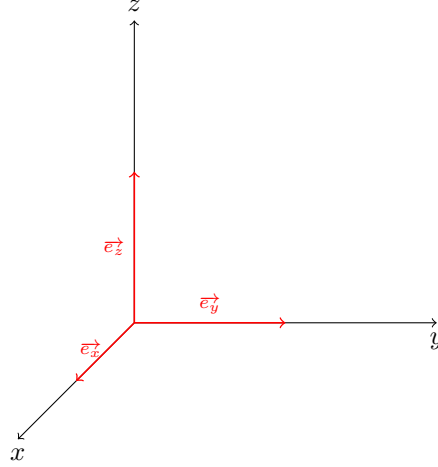
- Produit mixte :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a})$$

- Double produit vectoriel :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

1.3 Expression en coordonnées cartésiennes



Le produit vectoriel, dont la définition comporte un choix arbitraire quant au sens du vecteur résultant, induit une distinction entre les repères directs et indirects. Il est équivalent de dire qu'un repère est direct et que la base de vecteurs qui lui est associée est directe.

Une base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est directe ssi $\vec{e}_z = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$. L'égalité reste valable pour toute permutation circulaire :

$$\begin{cases} \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y \\ \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \end{cases}$$

Il est fortement recommandé de toujours utiliser une base de vecteurs directe !

Considérons maintenant deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de coordonnées respectives (a_x, a_y, a_z) et (b_x, b_y, b_z) , c'est à dire que l'on peut écrire :

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$$

En développant le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ (distributivité du produit vectoriel sur l'addition) on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= \\ (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \wedge (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) &= \\ a_x b_x \vec{e}_x \wedge \vec{e}_x + a_x b_y \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y + a_x b_z \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z + a_y b_x \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x + a_y b_y \vec{e}_y \wedge \vec{e}_y + a_y b_z \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z \\ + a_z b_x \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x + a_z b_y \vec{e}_z \wedge \vec{e}_y + a_z b_z \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z &= \\ \vec{0} + a_x b_y \vec{e}_z - a_x b_z \vec{e}_y - a_y b_x \vec{e}_z + \vec{0} + a_y b_z \vec{e}_x + a_z b_x \vec{e}_y - a_z b_y \vec{e}_x + \vec{0} &= \\ (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z & \end{aligned}$$

On peut écrire autrement ce résultat :

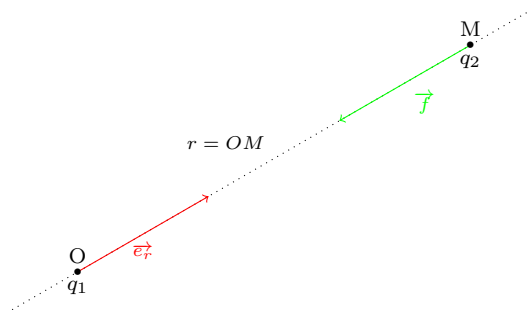
$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{vmatrix}$$

2 Interaction électromagnétique

Décrire les interactions entre les charges est un problème vaste et important, et fait l'objet de l'électromagnétisme, que l'on ne fait qu'effleurer ici. Il apparaît notamment que les interactions entre les charges sont plus simples à décrire en introduisant les concepts de champ électrique et de champ magnétique.

2.1 Force de Coulomb

On commence par la situation la plus simple, l'interaction entre deux charges *immobiles*. Alors la loi d'interaction entre deux charges est simple, c'est la loi de Coulomb :



$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$$

- Si $q_1 q_2 > 0$ (charges de même signe), la force est répulsive
- Si $q_1 q_2 < 0$ (charges de même signe), la force est attractive

ϵ_0 est une constante fondamentale de l'électromagnétisme (permittivité diélectrique du vide)
 $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$ et $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ SI}$

Il est intéressant de comparer les ordres de grandeur de la force de Coulomb et de la force de gravitation de Newton entre un proton et un électron pour se rendre compte que la gravitation ne joue aucun rôle à l'échelle atomique :

$$\frac{f_{\text{coulomb}}}{f_{\text{gravitation}}} = \frac{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}}{\frac{G m_1 m_2}{r^2}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 G m_1 m_2} \simeq 2 \cdot 10^{39}$$

2.2 Champ électrique

L'idée est de décrire l'interaction entre deux charges de manière indirecte, ainsi « q_1 exerce une force sur q_2 » est traduit par :

- q_1 crée un champ électrique à l'endroit où est q_2
- q_2 subit une du fait de ce champ électrique

En utilisant l'expression de la force de Coulomb écrite précédemment, et avec les mêmes notations on trouve :

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_1$$

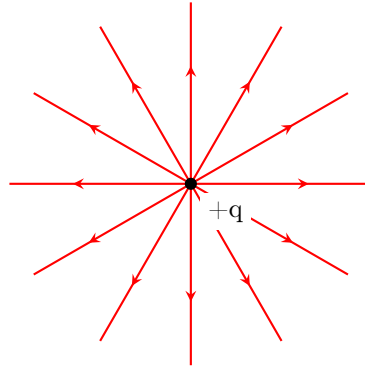
De manière générale, une charge q soumise à un champ électrique $\vec{E}$ subit une force $\vec{f} = q \vec{E}$.

Le *champ* électrique est mathématiquement un champ de vecteurs, c'est à dire qu'un vecteur est associé à chaque point de l'espace. Un exemple plus concret de champ de vecteurs est le champ des vitesses qui permet de décrire le mouvement d'un fluide, on peut aussi parler de champs scalaires (un nombre associé à chaque point de l'espace), par exemple un champ de pressions ou un champ de températures...

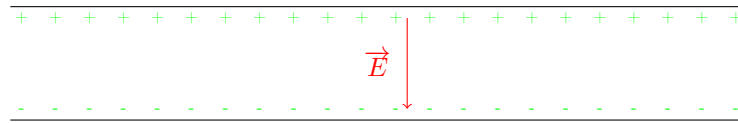
L'unité de champ électrique est le $V.m^{-1}$ (on peut donc voir un champ électrique comme une tension divisée par une distance). On atteint facilement des champs électriques de l'ordre de $1000 V.m^{-1}$, pour provoquer une étincelle dans l'air sec il faut un champ électrique de l'ordre de $3,5 \cdot 10^6 V.m^{-1}$.

Exemples de champs électriques :

- Le champ $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle est radial.



- Le champ $\vec{E}$ à l'intérieur d'un condensateur plan (deux plaques parallèles portant des charges égales et opposées) est uniforme (sauf près des bords).



2.3 Champ magnétique

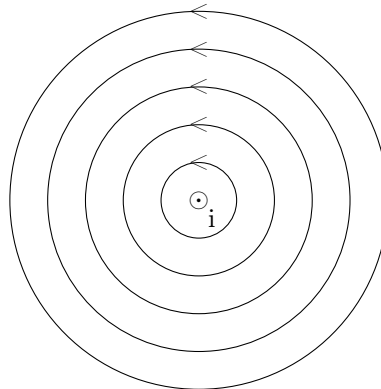
Lorsque les charges sont en mouvement, les interactions entre les charges deviennent plus compliquées et ne suivent plus la loi de Coulomb. Pour décrire les nouveaux termes dans l'expression des interactions, on introduit le champ magnétique, noté $\vec{B}$ (en fait, lorsque les charges sont en mouvement, on continue à utiliser le champ électrique mais son expression devient plus compliquée, il ne suit plus la loi de Coulomb).

Le champ magnétique s'exprime en Tesla (T). C'est une «grande» unité, un champ de $1T$ est déjà un champ très important. Quelques ordres de grandeur :

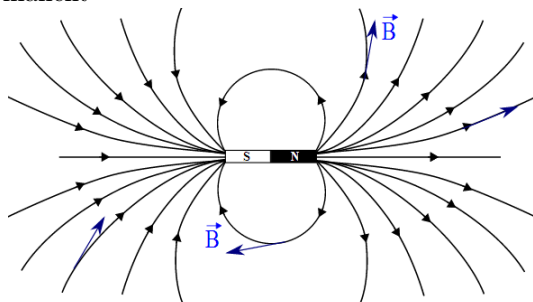
- champ magnétique terrestre : $5.10^{-5}T$
- champ magnétique créé par un aimant permanent (à courte distance) : $10 - 100mT$
- champ magnétique le plus intense pouvant être créé actuellement : $50T$

Exemples de champs magnétiques : D'une manière générale, un champ magnétique est créé par un courant électrique.

- champ créé par un fil rectiligne (parcouru par un courant...)



— champ créé par un aimant permanent



2.4 Force de Lorentz

On a vu qu'une charge q soumise à un champ électrique $\vec{E}$ subit une *force électrique* :

$$\vec{f} = q\vec{E}$$

Dans le cas d'un champ magnétique $\vec{B}$, la force dépend non seulement de la charge et du champ, mais aussi de la vitesse, et la *force magnétique* s'écrit :

$$\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Dans le cas général où les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ interviennent simultanément, la force s'écrit :

$$\vec{f} = \underbrace{q\vec{E}}_{\text{force électrique}} + \underbrace{q\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\text{force magnétique}}$$

Cette expression est appelée *force de Lorentz*.

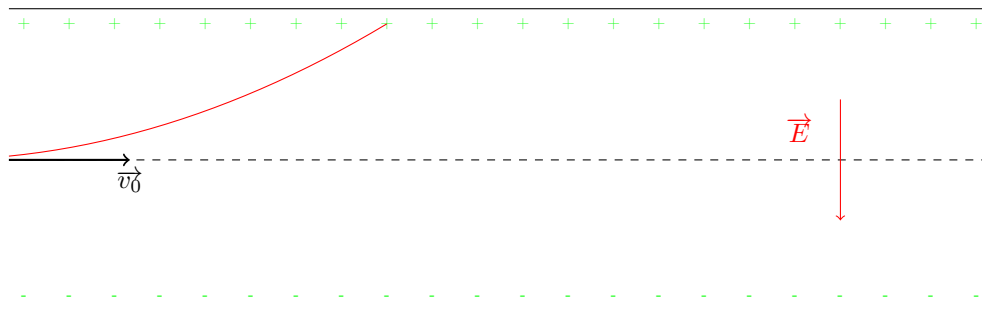
3 Mouvements dans un champ électrique

3.1 Accélération constante

On considère le mouvement dans un champ électrique (pas de champ magnétique) dans le cas particulier où il est *constant* et *uniforme* (constant signifie qu'il n'y a pas de variations temporelles, et uniforme qu'il n'y a pas de variations spatiales). Ainsi, la force électrique $\vec{f} = q\vec{E}$ sera constamment la même.

Comme $\vec{f} = m\vec{a}$, l'accélération (vectorielle) ne varie pas au cours du mouvement. On est donc dans un cas de *mouvement à accélération constante*, le mouvement est donc soit rectiligne (si la vitesse initiale est nulle ou colinéaire au champ électrique), soit parabolique (sinon).

Ce qui a été vu en cinématique s'applique donc ici... une situation classique est la déviation d'une particule chargée entre les plaques d'un condensateur plan (le schéma ci-dessous correspond à une charge positive).



3.2 Charge accélérée par une ddp

Pour accélérer une charge, il faut lui appliquer un champ électrique. En pratique, ce champ électrique est créé par une différence de potentiel (par exemple entre le filament chauffé et une pièce métallique percée d'un trou dans un canon à électrons).

Il y a une relation entre le champ et le potentiel, qui s'écrit $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$, et qui indique que le champ électrique est toujours dirigé des potentiels élevés vers les potentiels faibles.



Pour calculer la vitesse en B (en supposant une vitesse nulle en A) il n'y a pas besoin de supposer que le champ électrique est uniforme entre A et B , en fait seule la différence de potentiel compte. Cela est lié au fait que l'énergie potentielle associée à la force électrique s'exprime simplement en fonction du potentiel :

$$e_p = qV$$

On applique la conservation de l'énergie mécanique entre A et B :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B = 0 + qV_A$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = q(V_A - V_B) = e(V_B - V_A) = eu$$

Et donc

$$v = \sqrt{\frac{2q(V_A - V_B)}{m}}$$

Remarquons que dans les deux configurations ci-dessus, on a bien $q(V_A - V_B) > 0$. Pour généraliser, en notant $u = (V_A - V_B)$ la différence de potentiel entre A et B , on peut écrire :

$$v = \sqrt{\frac{2|qu|}{m}}$$

On peut faire une application pour un électron accéléré par une ddp de $1000V$: on trouve $v = 1,9.10^7 m.s^{-1}$

3.3 Aspects relativistes

On peut se demander si la vitesse trouvée précédemment, déjà proche de la vitesse de la lumière dans le vide, n'est pas erronée. C'est encore pire si on considère une ddp de 10 millions de volts (ce qui n'a rien d'utopique), puisque l'on trouve alors... $v = 1,9.10^9 m.s^{-1}$!

En fait, il est nécessaire d'utiliser la relativité (on se trouve là face à une des limites de la mécanique classique). On peut tenir compte de la relativité en remplaçant simplement les expressions classiques de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique par de nouvelles expressions :

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \text{et} \quad ec = (\gamma - 1)mc^2 \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

En utilisant comme précédemment mais en utilisant cette nouvelle expression d'énergie cinétique, on arrive à (d'une manière générale, les calculs de dynamique relativiste sont assez «lourds» mais le résultat obtenu à la fin est simple) :

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{qu}{mc^2}\right)^2}}$$

Avec cette expression, on remarque que $v \rightarrow c$ lorsque $u \rightarrow \infty$, en accord avec le postulat que la vitesse d'une particule ne peut dépasser la vitesse de la lumière. Il peut être intéressant de faire un développement limité afin de vérifier que si $qu \ll mc^2$ on retrouve le résultat classique.

4 Mouvements dans un champ magnétique

On considère un champ $\vec{B}$ à la fois constant, c'est-à-dire qui ne varie pas dans le temps, et uniforme, c'est-à-dire qui ne varie pas dans l'espace.

4.1 Puissance de la force magnétique

La force subie par une charge q avec une vitesse $\vec{v}$ dans un champ $\vec{B}$ est :

$$\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

La force magnétique « ne travaille pas », c'est-à-dire ne modifie pas l'énergie cinétique, et donc la norme de la vitesse. En effet, d'après le théorème de l'énergie cinétique,

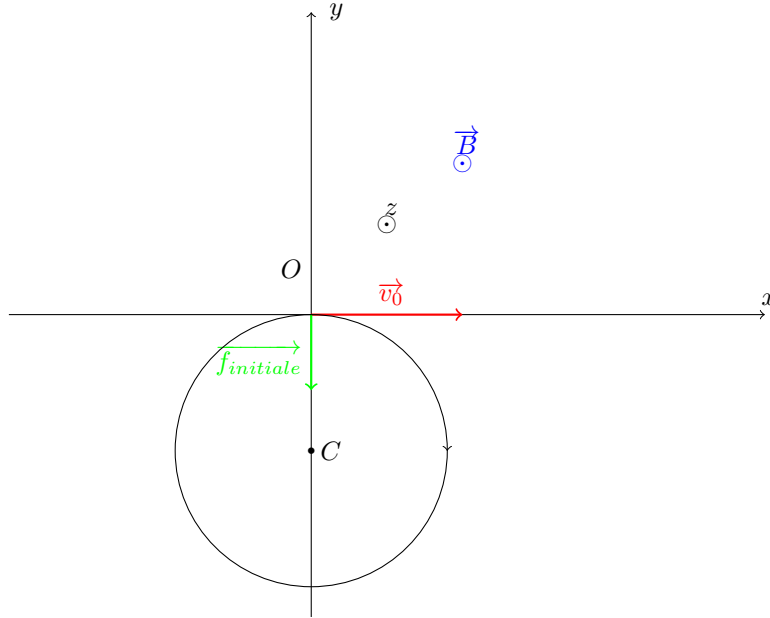
$$\frac{de_c}{dt} = q \left(\vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v} = 0$$

On a $\vec{f} \perp \vec{B}$ et $\vec{f} \perp \vec{v}$. Un champ $\vec{B}$ ne peut pas servir à accélérer les particules, mais permet de les dévier.

4.2 Mouvement circulaire

On commence par le cas le plus simple : la vitesse initiale est orthogonale au champ magnétique. Dans ce cas le mouvement est circulaire, dans un plan orthogonal au champ magnétique.

On prend ici $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, $\vec{B} = B \vec{e}_z$ (avec $B > 0$) et $q > 0$. La force initiale est alors $\vec{f}_{initiale} = q v_0 B \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = -q v_0 B \vec{e}_y$, soit « vers le bas » sur le schéma, ce qui permet d'envisager l'allure de la trajectoire.



Pour déterminer les équations du mouvement, on part de la loi fondamentale :

$$m \vec{a} = \vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

La projection donne ensuite :

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = q B v_y \\ m \frac{dv_y}{dt} = -q B v_x \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $v_z = c^{ste}$, et donc que $v_z = 0$. Le mouvement est plan dans (Oxy) .

On pose $\omega_c = \frac{qB}{m}$ que l'on appelle la pulsation cyclotron. On obtient les équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x \end{cases}$$

On peut dériver la première pour réinjecter dans la seconde, mais ce n'est pas très efficace, et cela ne marche que dans les cas simples comme celui-ci. On préfère utiliser la méthode qui consiste à introduire une variable complexe :

$$u = v_x + i v_y$$

On a alors :

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv_x}{dt} + i \frac{dv_y}{dt}$$

En utilisant les équations, on trouve :

$$\frac{du}{dt} = (\omega_c v_y) + i(-\omega_c v_x) = -i \omega_c (v_x + i v_y) = -i \omega_c u$$

Soit

$$\frac{du}{dt} + i \omega_c u = 0$$

La solution est de la forme $u = \lambda e^{-i \omega_c t}$, avec λ complexe. On déduit λ des conditions initiales : $u(t=0) = v_x(t=0) + i v_y(t=0) = v_0$. Donc $\lambda = v_0$. Ainsi, $u = v_0 e^{-i \omega_c t}$. On en déduit :

$$\begin{cases} v_x = \Re(u) = v_0 \cos(\omega_c t) \\ v_y = \Im(u) = -v_0 \sin(\omega_c t) \end{cases}$$

On intègre, compte tenu des conditions initiales :

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y = \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t) - \frac{v_0}{\omega_c} \end{cases}$$

On pose $R = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{m v_0}{q B}$, et on a :

$$\begin{cases} x = R \sin(\omega_c t) \\ y = R (\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases}$$

La trajectoire est donc un cercle de rayon R et de centre $C(0, -R)$. En effet, on vérifie que $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$ soit $R^2 \sin^2(\omega_c t) + R^2 \cos^2(\omega_c t) = R^2$.

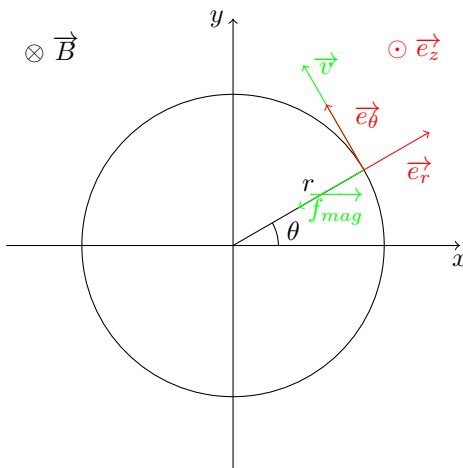
Avec une charge négative, la trajectoire est un cercle de rayon R et de centre $(0, +R)$. On obtient le même résultat si on inverse le sens de $\vec{B}$ ou de $\vec{v}_0$.

On retiendra que, d'une manière générale, le rayon de la trajectoire est donné par :

$$R = \frac{mv}{|qB|}$$

4.3 Calcul rapide

On peut retrouver rapidement l'expression du rayon de la trajectoire en *supposant* qu'elle est circulaire.



On a $\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et donc $\vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r$, et comme $\vec{B} = -B \vec{e}_z$ la force magnétique s'écrit :

$$\vec{f}_{mag} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = -qvB \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z = -qvB \vec{e}_r$$

La loi de Newton $\vec{f}_{mag} = m \vec{a}$ donne alors, en projetant sur $\vec{e}_r$, $qvB = \frac{mv^2}{r}$, soit finalement $r = \frac{mv}{qB}$.

4.4 Mouvement hélicoïdal

On considère une vitesse initiale qui n'est pas orthogonale au champ $\vec{B}$. On note $v_{\parallel}$ la composante de la vitesse initiale sur la direction du champ magnétique et $v_{\perp}$ la composante de la vitesse initiale sur le plan orthogonal au champ magnétique.

Ainsi, on retrouve un mouvement circulaire, projeté sur (Oxy) , de rayon :

$$R = \frac{m v_{\perp}}{q B}$$

De plus, d'après le calcul précédent, $v_z = c^{ste}$, donc $v_z = v_{\parallel}$, et donc $z = v_{\parallel} t$ si $z = 0$ à $t = 0$. Le mouvement est donc hélicoïdal. Le pas est la distance z parcourue en un tour : il faut $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$ pour faire un tour, donc $a = T v_{\parallel}$.

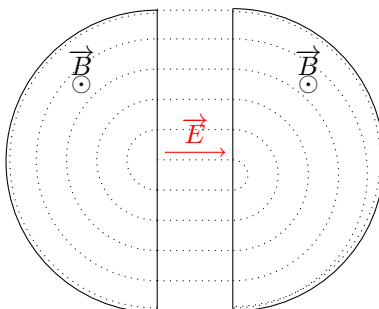
5 Accélérateurs de particules

Le but d'un accélérateur de particules est d'augmenter le plus possible l'énergie d'un faisceau de particules. La première idée est bien sûr d'augmenter la vitesse des particules, mais très vite la vitesse est quasiment c et passer de $0,99c$ à $0,99999c$ n'est pas très impressionnant en termes d'augmentation de vitesse, mais très significatif en termes d'augmentation d'énergie cinétique.

On accélère les particules principalement pour les «casser» en faisant entrer en collision deux faisceaux en sens inverse, on a ainsi découvert de nombreuses choses sur les particules élémentaires. Accessoirement, des particules chargées en mouvement accéléré émettent un rayonnement électromagnétique, et de petits accélérateurs de particules sont maintenant très utilisés pour des applications médicales.

L'idée générale est d'accélérer les particules avec un champ électrique, mais pour rendre le dispositif plus efficace, on fait ensuite tourner les particules afin de les re-accélérer avec le même champ électrique, et le moyen le plus efficace pour dévier les particules est d'utiliser un champ magnétique.

Un des premier accélérateur de particules créés a été le cyclotron. Il consiste en deux Dees, dans lesquels règne un champ magnétique $\vec{B}$ constant et uniforme, et entre lesquels on applique une différence de potentiel alternative.



On envisage le mouvement d'un proton. Entre chaque passage, on change le sens de la ddp, donc de $\vec{E}$. Le proton est donc accéléré à chaque passage. La ddp doit être alternative, on peut par exemple considérer un ddp sinusoïdale. Le temps pour faire un demi-tour dans un Dee est toujours le même :

$$\Delta t = \frac{1}{2} T = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi R}{v}$$

Ordre de grandeur : en physique classique, pour que des protons atteignent la vitesse c avec un champ magnétique de 1 Tesla, il faudrait un rayon des Dees égal à :

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,67 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 3m$$

Alors pourquoi construire de si grands accélérateurs de particules (environ 4,24 km de rayon pour le LHC du CERN à Genève)? Là encore, il faut tenir compte de la relativité : comme $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$, l'expression correcte du rayon de la trajectoire est :

$$R = \gamma \frac{mv}{qB}, \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Le facteur γ augmentant très nettement lorsque v s'approche de c , on comprend que le rayon de l'anneau de stockage doit être beaucoup plus grand que les 3 mètres calculés précédemment...

