

FORCES CENTRALES - LOIS DE KEPLER

1. Théorème du moment cinétique

1.1 Définitions

- Point matériel M , de masse m , qui se déplace à une vitesse $\vec{v}$.

On définit le moment cinétique par rapport au point O ("en O ") par :

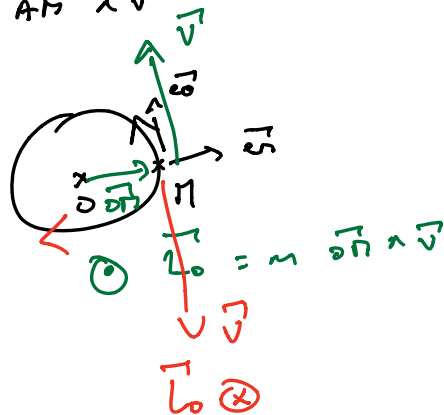
$$\vec{L}_O = m \vec{O}M \wedge \vec{v}$$

Rem: - on note $\vec{L}$ ou $\vec{L}_O$ (souvent) les moments cinétiques

- Si on utilise un point A , on note

$$\vec{L}_A = m \vec{A}M \wedge \vec{v}$$

illustration :



- Moment d'une force: moment d'une force $\vec{f}$, appliquée au point M , par rapport à un point O :

$$M \quad \boxed{\vec{M}_O(\vec{f}) = \vec{OM} \wedge \vec{f}}$$

1.2 Théorème

au cours du temps

On considère l'évolution V du moment cinétique d'un point matériel M , de masse m , de vitesse $\vec{v}$, par rapport à un point O fixe (c'est le repère considéré), M étant soumis à une force $\vec{f}$:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{f})}$$

justification: $\vec{L}_O = m \vec{OM} \wedge \vec{v}$

$$\begin{aligned} \text{donc } \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= m \frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge \vec{v}) \\ &= m \left(\underbrace{\frac{d\vec{OM}}{dt}}_{\vec{v}} \wedge \vec{v} + \vec{OM} \wedge \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}} \right) \end{aligned}$$

$$= m \vec{OM} \wedge \vec{a}$$

$$= \vec{OM} \wedge (m\vec{a})$$

$$= \vec{OM} \wedge \vec{f}$$

2° loi de Newton

q.té de m^{th} ($\vec{p} = m\vec{v}$)	énergie cinétique	moment cinétique
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$ (2° loi de Newton)	$\frac{dec}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$	$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{f}$

Rem : Dans le cas où plusieurs forces interviennent, $\vec{f}$ représente la résultante (somme) des différentes forces.

$$\vec{L}_0 = \vec{OH} \wedge (\underbrace{\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \dots}_{\vec{f}})$$

$$= \vec{OH} \wedge \vec{f}_1 + \vec{OH} \wedge \vec{f}_2 + \vec{OH} \wedge \vec{f}_3 + \dots$$

1.3 Application au pendule simple

mvh circulaire

$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_1 + r \ddot{\theta} \vec{e}_2$
 $= 0$
 $= r \dot{\theta} \vec{e}_2$
 $= l \dot{\theta} \vec{e}_2$

$\vec{L}_0 = m \vec{OH} \wedge \vec{v}$
 $= m (l \vec{e}_1) \wedge (l \dot{\theta} \vec{e}_2)$
 $= m l^2 \dot{\theta} \underbrace{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2}_{=\vec{e}_3}$
 $= m l^2 \dot{\theta} \vec{e}_3$
 Donc $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = m l^2 \ddot{\theta} \vec{e}_3$ ($\vec{e}_3$ est fixe)

moment des forces :

- $\vec{M}_0(\vec{T}) = \vec{OH} \wedge \vec{T} = \vec{0}$
- $\vec{M}_0(\vec{P}) = \vec{OH} \wedge \vec{P} = -lmg \sin(\theta) \vec{e}_3$

On applique le th du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{P} + \vec{T})$
 $= \vec{M}_0(\vec{P}) + \vec{M}_0(\vec{T})$

donc $m l^2 \ddot{\theta} \vec{e}_3 = -mgl \sin(\theta) \vec{e}_3 + \vec{0}$

On projette sur $\vec{e}_3$: ~~$l^2 \ddot{\theta} = -gl \sin(\theta)$~~

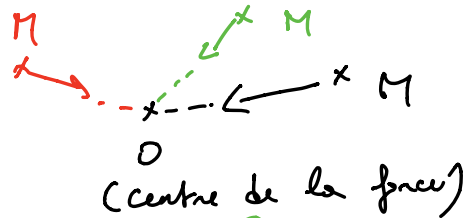
ce qui donne $l \ddot{\theta} + g \sin(\theta) = 0$

2. Conservation du moment cinétique

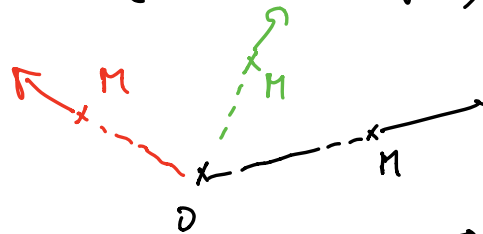
2.1 Force centrale

Une force centrale est toujours dirigée vers le même point.

ex avec une
force attractive

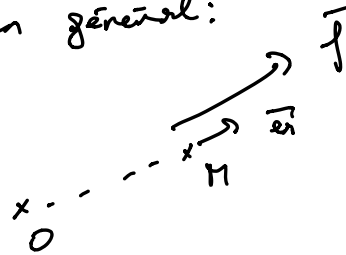


ex avec une force
répulsive

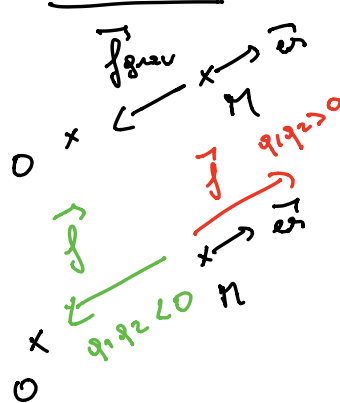


En notant $\vec{e}_r$ le vecteur radial $\vec{e}_r = \vec{OM}$, une force de centre O s'écrit en général:

$$\underline{\vec{F} = f \vec{e}_r}$$



exemple important : "forces centrales en $1/r^2$ " :



$$\underline{\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r}, \text{ où } K \text{ est une constante.}$$

cela s'applique aux forces de gravitation,

avec $\underline{K = -G m_1 m_2}$

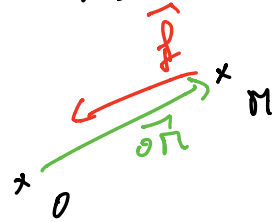
et aux forces de Coulomb avec

$$\underline{K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2}$$

Ce qu'il y a de particulier pour les forces centrales
 vs à vs du moment cinétique est que le moment cinétique
 d'un point matériel soumis à une force centrale, par
rapport au centre de la force, est constant.

En effet, $\vec{\Pi}_O(\vec{f}) = \vec{O} \wedge \vec{f} = \vec{0}$.

centrale
de centre O



Alors, le th du moment cinétique donne :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\Pi}_O(\vec{f}) = \vec{0} \quad , \quad \text{et donc}$$

$$\vec{L}_O = \text{cste.}$$

Mardi: 10h 15 - 12h 15
 + 15h - 17h

Mercredi: 14h - 16h

Vendredi: 8h - 10h

prévisions DS :

29 mai inf (algorithmique)

05 juin physique (méca)

19 juin inf (SQL + calcul)

26 juin physique (magnétisme)

2.2 Mouvement plan

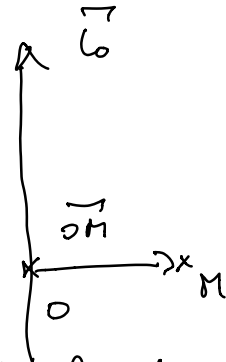
La première conséquence de la conservation du moment cinétique sous l'action d'une force centrale est que le mouvement est plan.

En effet, $\vec{L}_O = c \vec{u}$ et $\vec{L}_O = m \vec{OP} \wedge \vec{v}$

On a donc $\vec{OP} \perp \vec{L}_O$.

Ainsi, P est nécessairement dans le plan $\perp$ à $\vec{L}_O$ qui contient O , centre de la force.

Le mouvement est plan.



On se place pour toute la suite dans le plan du mouvement, et on repère la position de P en coordonnées polaires.

expression du moment cinétique en coord. polaires:

$\vec{L}_O = m \vec{OP} \wedge \vec{v}$ avec:

$\vec{OP} = r \vec{e}_r$ et

$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

$$\text{d'où } \vec{L}_O = m (r \vec{e}_r) \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta)$$

$$= m (r \dot{r} \underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r}_{=0} + r^2 \dot{\theta} \underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta}_{\vec{e}_z})$$

On a donc

$$\vec{L}_O = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

expression générale.

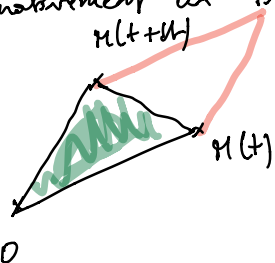
Ainsi, comme $\vec{L}_O = c \vec{u}$, on a $r^2 \dot{\theta} = c$ (constante des aires).

2.3 Loi des Aires (2^e loi de Kepler)

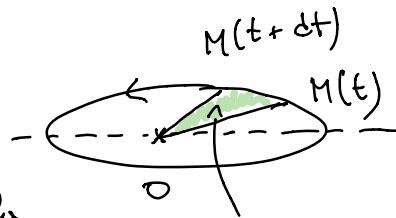
$\hookrightarrow$ liée au caractère central de la force (par besoin du $1/r^2$)

" le vecteur position $\vec{OM}$ (rayon vecteur) balaye des aires égales pendant des durées égales "

$\vec{OM}(t) \vec{OM}(t+dt)$ est approximativement un triangle.



dA est la moitié de l'aire du parallélogramme.



aire balayée par $\vec{OM}$ pendant dt (on la note dA)

$\vec{OM}(t) \vec{OM}(t+dt) = \vec{v} dt$ ($\vec{OM}(t) \vec{OM}(t+dt)$ est un déplacement élémentaire, et on a alors que $d\vec{l} = \vec{v} dt$)

$$\text{on a alors } dA = \frac{1}{2} \left\| \vec{OM} \wedge \vec{v} dt \right\|$$

$$= \frac{1}{2m} \left\| m \vec{OM} \wedge \vec{v} \right\| dt$$

$$= \frac{1}{2m} \left\| \vec{L} \right\| dt$$

finalemant, $\frac{dA}{dt} = \frac{\|\vec{L}\|}{2m}$

$$\frac{dA}{dt} = c^{\text{ste}}, \text{ car } \vec{L} = c^{\text{ste}}$$

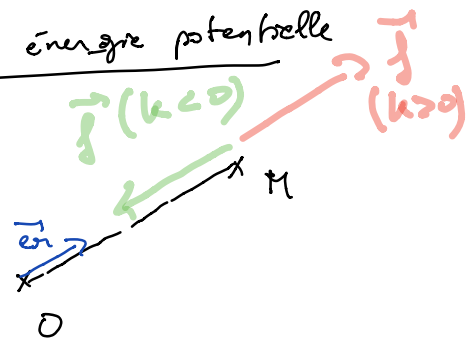
Ce qui justifie la loi des aires.

3. Conservation de l'énergie mécanique

3.1 Forces centrales en $1/r^2$ et énergie potentielle

$$\vec{f} = \frac{k}{r^2} \vec{er}$$

cp associée ?



On part de $dep = -\vec{f} \cdot d\vec{l}$ ($dep = -dec = -\vec{f} \cdot d\vec{l}$)

On peut écrire $d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{e}_\varphi$ travail

Donc $dep = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + \underbrace{(\dots)}_{\perp \vec{e}_r})$ élémentaire

$$= -\frac{k}{r^2} dr \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{=1}$$

$$= -\frac{k}{r^2} dr$$

On intègre: $ep = \frac{k}{r} + c^{\frac{1}{2}}$

On choisit $ep \rightarrow 0$ ($\rightarrow \infty$ " énergie potentielle nulle à l'infini")

On a finalement

$$ep = \frac{k}{r} \text{ associée à } \vec{f} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r$$

3.2 Énergie potentielle effective

Sous l'action d'une force centrale en $1/r^2$, conservative, $em = ec + ep = c^{\frac{1}{2}}$ (conservation de l'énergie mécanique).

On détaille l'expression de ec :

$$ec = \frac{1}{2} m v^2 \text{ et } \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} &= (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \cdot (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\ &= \dot{r}^2 \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{=1} + \dot{r} r \dot{\theta} \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta}_{=0} + r \dot{\theta} \dot{r} \underbrace{\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r}_{=0} \\ &\quad + (r \dot{\theta})^2 \underbrace{\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta}_{=1} \\ &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$



~~$$v^2 = \dot{r}^2 + 2r\dot{r}\dot{\theta} + (r\dot{\theta})^2$$~~

On a donc $ec = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$

On, on a vu que $\vec{L}_0 = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_2$, donc $L_0^2 = m^2 r^4 \dot{\theta}^2$, et donc $m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{m r^2}$
 et donc $ec = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2 m r^2}$

On revient à em : $em = ec + ep$
 $= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2 m r^2} + \frac{k}{r}$

On pose $ep_{eff} = \frac{L_0^2}{2 m r^2} + \frac{k}{r}$

(qui ne dépend que de r — pas de θ)

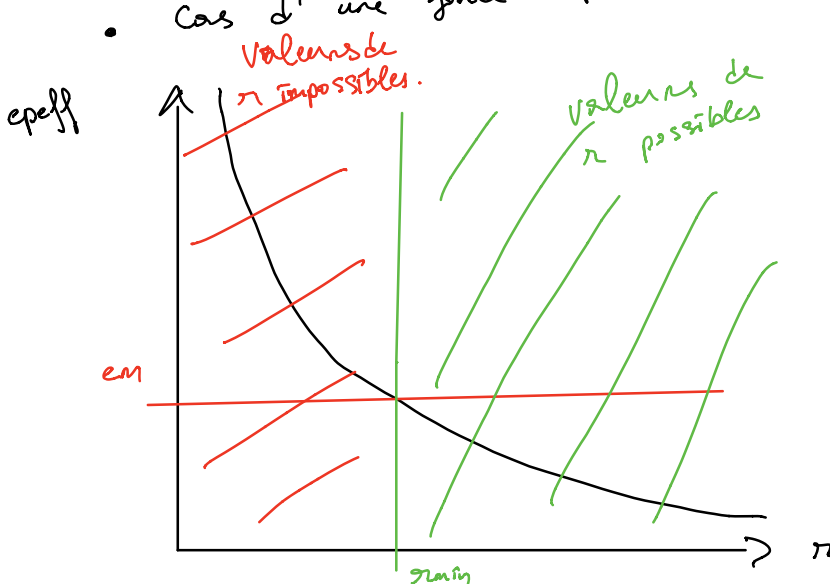
et on a $em = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + ep_{eff}(r)$

On se retrouve, du point de vue du mouvement radial, dans la situation d'un m à 1DL où l'on peut écrire $em = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + ep(r)$.

On va donc pouvoir discuter des valeurs possibles pour r à partir de représentations graphiques de $ep_{eff}(r)$ en fonction de r .

3.3 Discussion énergétique du mouvement radial.

- Cas d'une force répulsive ($k > 0$)



$$ep_{eff} = \frac{L_0^2}{2 m r^2} + \frac{k}{r}$$

em est constante
 (fixée par les c.i.)
 et nécessairement
 positive ($ec > 0$
 et $ep > 0$)

Valeurs possibles pour r ?

$$e_m = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}_{\geq 0} + e_{\text{eff}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0,$$

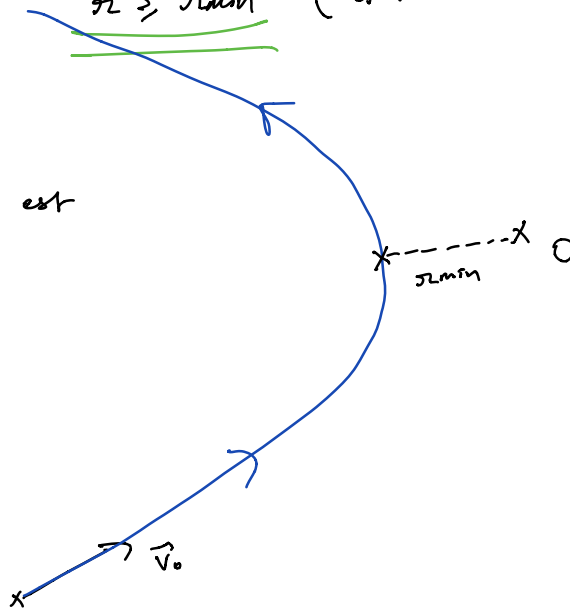
donc $e_m \geq e_{\text{eff}}$.

Les valeurs possibles pour r sont donc celles pour lesquelles e_m est supérieure à e_{eff} .

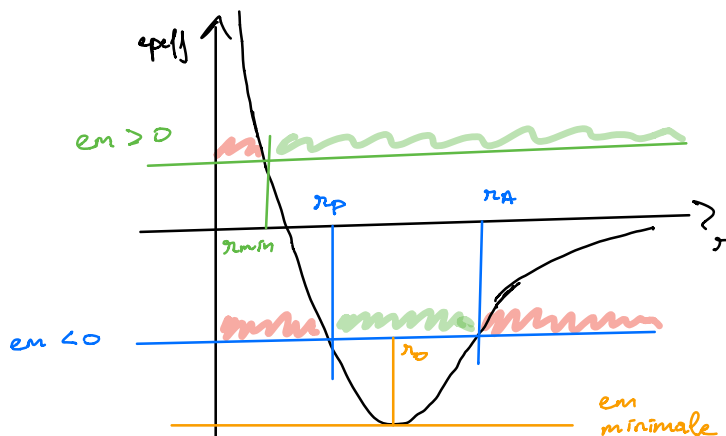
On a donc, dans le cas répulsif :

$r \geq r_{\text{min}}$ (état de diffusion)

la trajectoire est hyperbolique.



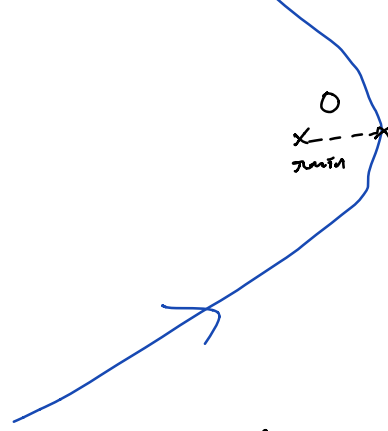
• Cas d'une force attractive ($k < 0$)



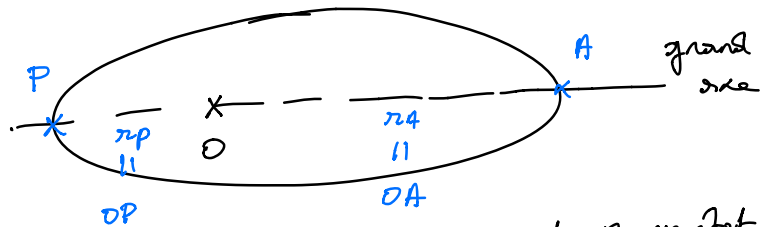
$$e_{\text{eff}} = \frac{L_0^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}$$

e_m est constante, et peut être positive ou négative.

- si $e_n > 0$: $r > r_{min}$ (c'est un état de diffusion)
la trajectoire est hyperbolique



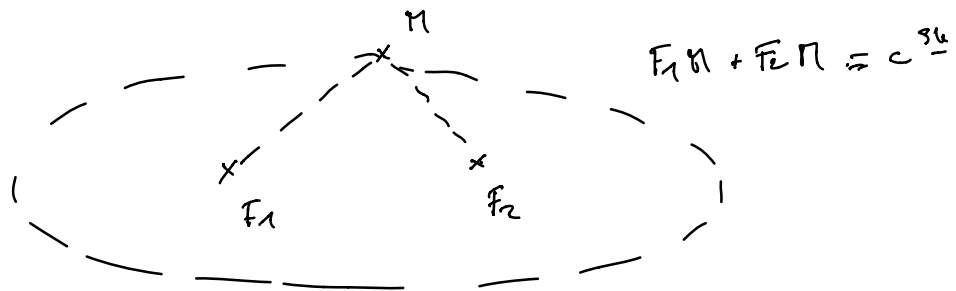
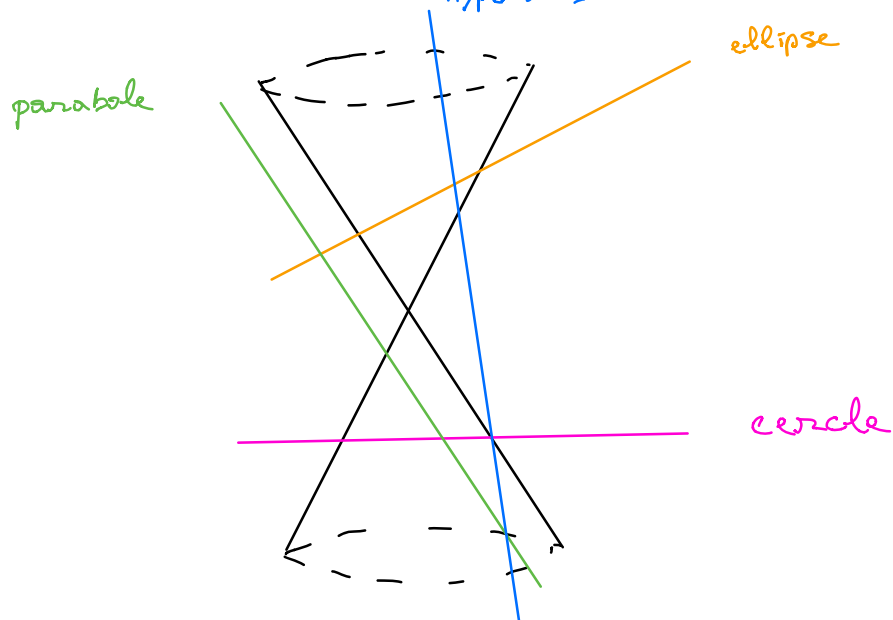
- si $e_n < 0$: $r_p \leq r \leq r_A$ (état lié)
trajectoire elliptique



- Rem :
- Dans le cas limite où $e_n = 0$, c'est un état de diffusion (pas de valeur min) et la trajectoire est parabolique.
 - Dans le cas où e_n a la valeur minimale possible ("au fond du puits de potentiel"), $r = r_0 = c^{\frac{3}{2}}$: la trajectoire est circulaire.

CONIQUES

courbes planes = intersection d'un cône et d'un plan,



4. Trajectoires circulaires

4.1 Relation entre la vitesse et le rayon

Si la trajectoire est circulaire, alors le mouvement est circulaire uniforme.

$$(v = c^{\frac{3}{2}}) \quad \Delta \quad v = c^{\frac{3}{2}}, \text{ par } \vec{v} = c^{\frac{3}{2}} \vec{e}_\theta$$

En effet, on a vu que $\vec{L}_0 = c^{\frac{3}{2}} \vec{e}_\theta$, et

$$\vec{L}_0 = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_\theta. \text{ Donc } r^2 \dot{\theta} = c^{\frac{3}{2}}, \text{ donc}$$

$$r = c^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \dot{\theta} = c^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Or, } \vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta, \text{ d'où } r \dot{\theta} = c^{\frac{3}{2}}, \text{ et donc } v = c^{\frac{3}{2}}.$$

$$\vec{f} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r \quad (K < 0, \text{ la force est attractive}).$$

$$\vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$

2^e loi de Newton:

$$-m r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\text{On profite: } -m r \dot{\theta}^2 = \frac{K}{r^2},$$

$$\text{Soit } m r^2 \dot{\theta}^2 = -\frac{K}{r}$$

$$\text{Or, comme } \vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta, \quad v^2 = r^2 \dot{\theta}^2$$

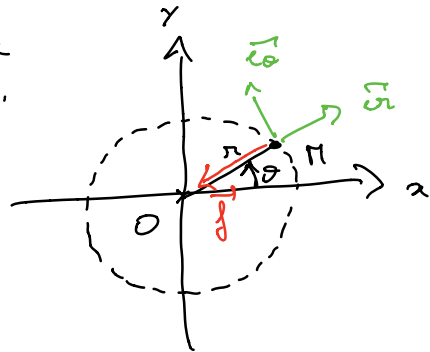
$$\text{On a donc finalement } \boxed{m v^2 = -\frac{K}{r}}$$

$$K < 0, \text{ donc } -\frac{K}{r} \text{ est positif}$$

$$\text{Cas particulier: gravitation, } K = -G m M$$

$$\text{alors } m v^2 = \frac{G m M}{r} \quad \text{masse au point } O$$

On voit plus r est grand, et plus v est petite.



$$\left(\begin{array}{l} \Delta \quad v = r \dot{\theta} \text{ est} \\ \text{faux, car } v \geq 0 \\ \text{(norme de } \vec{v}) \\ \text{et } \dot{\theta} \text{ peut \u00eatre} \\ \leq 0, \text{ donc} \\ v = |r \dot{\theta}| \end{array} \right)$$

4.2 Energie mécanique

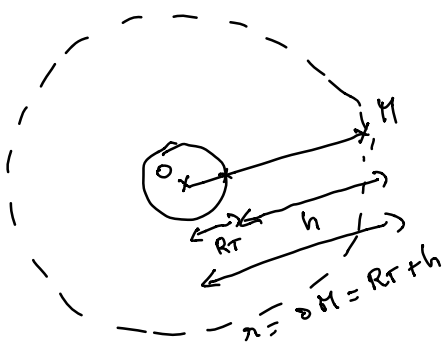
$$e_p = \frac{k}{r} \quad \text{et} \quad e_c = \frac{1}{2} m v^2 = -\frac{k}{2r}$$

$$\text{D'où} \quad e_m = e_p + e_c = \frac{k}{r} - \frac{k}{2r} = \frac{k}{2r}$$

$$e_m = \frac{k}{2r}$$

On voit que, comme $k < 0$, $e_m < 0$ (c'est un état lié)

Application numérique :



satellite de masse $m = 1000 \text{ kg}$ en orbite autour de la terre ($M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$) à une altitude de $h = 36.000 \text{ km}$

$$e_m = \frac{k}{2r} = -\frac{G m M_T}{2r} \quad \left| \begin{array}{l} G = 6,67 \cdot 10^{-11} \\ R_T = 6400 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$e_m = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 1000 \times 6 \cdot 10^{24}}{2 \times 4,24 \times 10^7} = -4,7 \cdot 10^3 \text{ J}$$

4.3 Troisième loi de Kepler

période de révolution $\leftarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$: le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est le même pour tous les objets qui tournent autour de l'astre de masse M

$\frac{1}{2}$ grand axe
(= rayon dans le cas d'une trajectoire circulaire)

masses de "l'astre attracteur"

justification dans le cas circulaire :

$$\text{On reprend} \quad m v^2 = -\frac{k}{r} = \frac{G m M}{r}, \quad \text{donc} \quad v^2 = \frac{G M}{r}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \quad \text{donc} \quad v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow \text{dist. parcourue en 1 tour}$$

→ temps pour faire un tour (période)



on a donc $v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$

or, $v^2 = \frac{GM}{r}$, donc $\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$,

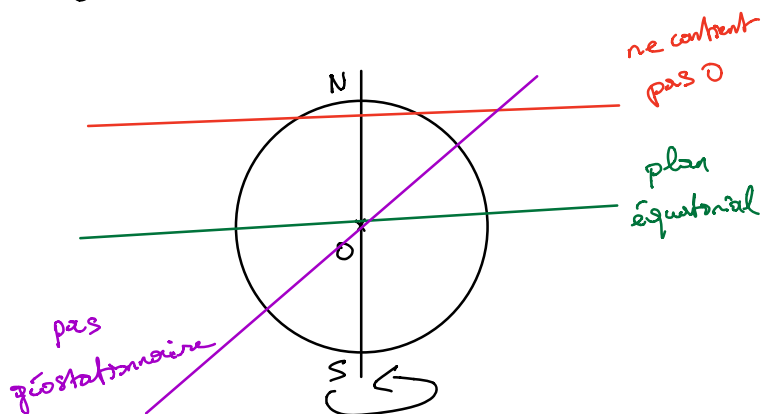
et donc $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

4.4 Satellites géostationnaires

Un satellite géostationnaire "suit" la terre dans sa rotation propre: il est toujours à la verticale d'un même point de la terre.

Caractéristiques:

- le plan de la trajectoire est orthogonal à l'axe de rotation (axe des pôles) contenant le centre de la terre (O).
c'est donc le plan équatorial



- la trajectoire est circulaire

géostationnaire: $\dot{\theta} = \omega$

(la terre a un ω de rotation propre avec une vitesse angulaire constante) ($\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$)

or, $r^2 \dot{\theta} = c$ (conservation du moment cinétique)

On a donc $r = c$: la trajectoire est circulaire

- l'altitude est de (environ)
36.000 km

On utilise la 3^e loi de Kepler:

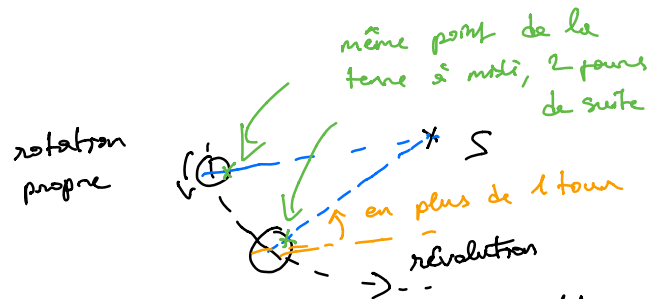
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

$$\text{donc } r = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

$$\text{A.N.: } r \approx 4,2 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Rem: le jour sidéral, période de rotation propre de la terre
(ici noté T) vaut: $T = 86164 \text{ s}$

(23h 56 min 4s)
Ça n'est pas 24h? (24h = jour solaire vrai)



la terre fait un peu plus de 1 tour
sur elle même durant 1 jour (solaire
vrai)

(en un an, elle fait (en moyenne)

$$365,25 + 1 = 366,25 \text{ tours sur}$$

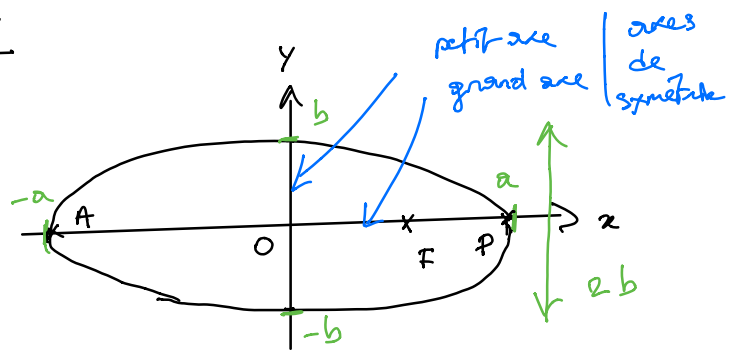
$$\text{elle même: } 1 \text{ an} = 365,25 T_{\text{solaire vrai}}$$

$$= 366,25 T_{\text{sidéral}})$$

5. Trajectoires elliptiques

5.1 Ellipses

a est le $\frac{1}{2}$ grand axe
(et b le $\frac{1}{2}$ petit axe)



en coordonnées cartésiennes,
dans le cas particulier
représenté ici (le grand
axe est confondu avec
l'axe (Ox)), l'équation
de l'ellipse est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$2a$
F: foyer P: périhélie A: apogée
↓
le + proche du foyer le + loin du foyer
ici, le centre de la force est F, pas O.

Ellipse en coordonnées polaires :

l'équation s'écrit :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

p est le paramètre (distance)

↳ caractérise la taille de l'ellipse

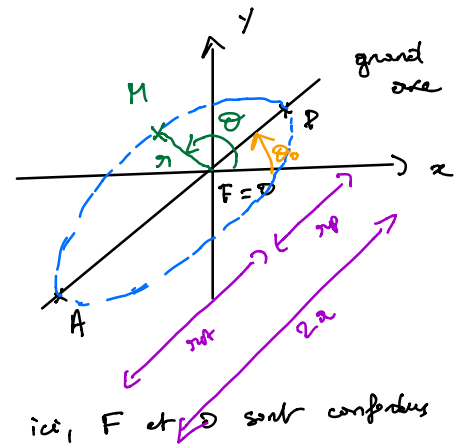
e est l'excentricité (sans dimension)

↳ caractérise la forme de l'ellipse

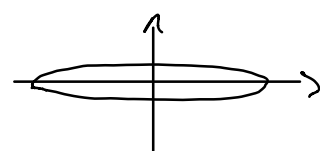
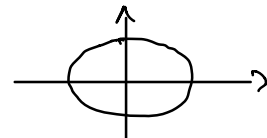
pour une ellipse : $0 \leq e < 1$

e proche de 0 : ellipse peu aplatie
($e=0$: cercle)

e proche de 1 : ellipse très aplatie



ici, F et $\odot$ sont confondus
↓
foyer de l'ellipse
centre de la force



en P, $\theta = \theta_0$ et donc $r_p = \frac{p}{1+e}$

en A, $\theta = \theta_0 + \pi$, et donc $r_a = \frac{p}{1-e}$

$$\begin{aligned} \text{On voit ainsi que } 2a &= r_a + r_p = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} \\ &= \frac{p(1+e) + p(1-e)}{1-e^2} \\ &= \frac{2p}{1-e^2} \end{aligned}$$

On a donc $a = \frac{p}{1-e^2}$

et aussi (non justifié) $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$

Rem: si $e = 0$, $a = b = p$ (= rayon)

5.2 lois de Kepler

↪ à l'origine, m^{re} des planètes / soleil

1^{re} loi: les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont le centre du soleil occupe l'un des foyers.

2^{re} loi: loi des aires

$$\text{3^{re} loi: } \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Rem: on peut "retroouver" la 3^{re} loi de Kepler à partir de ce qui a été montré pour les trajectoires circulaires $\left(\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \right)$ en remplaçant r par a .

Cela fonctionne aussi pour l'échange mécanique:

$$em = \frac{k}{2a} \quad \text{"donne"} \quad em = \frac{k}{2a}$$

trajectoire circulaires
en particulier

trajectoires
elliptiques en général

5.3 Vitesse en un point de la trajectoire

vitesse au point M ?

on utilise la conservat° de

l'Énergie mécanique:

$$e_m = \frac{k}{2a}$$

(justifié dans le cas particulier circulaire et admis dans le cas général elliptique)

$$e_m = e_c + e_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{k}{r}$$

$$\text{D'où } \frac{1}{2} m v^2 = \frac{k}{2a} - \frac{k}{r} = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r} \right)$$

$$\text{et donc } v = \sqrt{\frac{k}{m} \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r} \right)}$$

cas particulier de la gravitation: $\frac{k}{m} = -GM$

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

On remarque que v est minimale en A (r est max) et maximale en P (r est min.)

On a en particulier: $L_0 = m r_p v_p = m r_A v_A$
donc $r_p v_p = r_A v_A$



la vitesse est plus + petite en A.