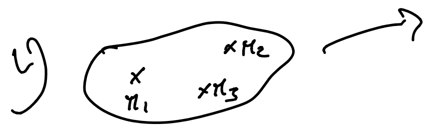
MECANIQUE DU SOLIDE

En mécanique, solide = objet indéformable.

1. Description du mouvement d'un solide

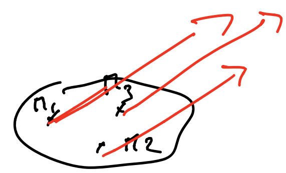
solide = objet indéformable, on peut le considérer comme un ensemble de points matériels, qui restent toujours à la même distance les uns des autres.



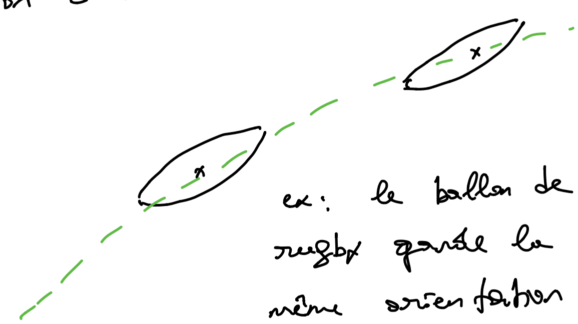
$M_1M_2 = c^{ste}$
$M_1M_3 = c^{ste}$
$M_2M_3 = c^{ste}$
- - - -

Le mouvement d'un solide peut être décomposé en :

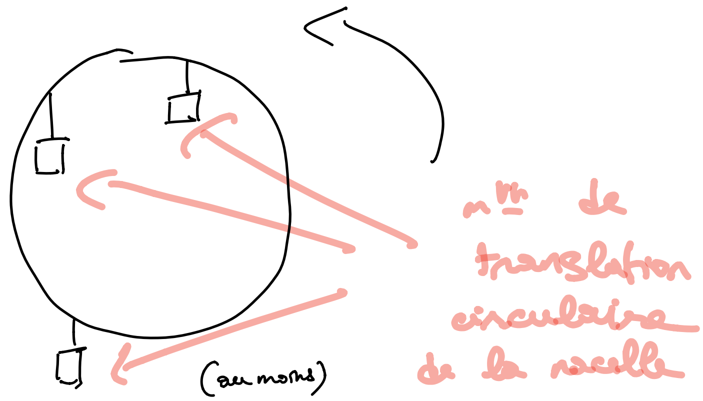
- translation : tous les points du solide ont le même mouvement (le solide ne change pas d'orientation)



⚠ La translation d'un solide n'est pas nécessairement rectiligne.



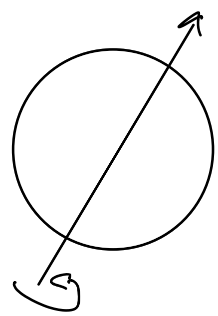
ex : le ballon de rugby garde la même orientation ex : grande roue



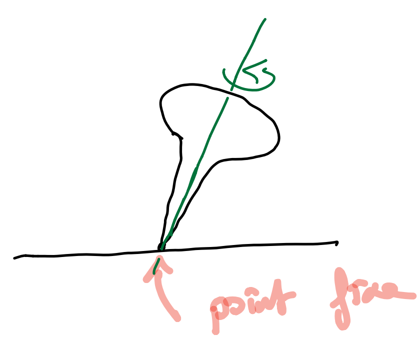
- rotation : un certain point (au moins) du solide reste fixe.
(le solide change d'orientation)

ex : rotat° propre de la terre

ici, tous les points situés sur l'axe des pôles restent immobiles
(rotation autour d'un axe fixe)



ex : toupie

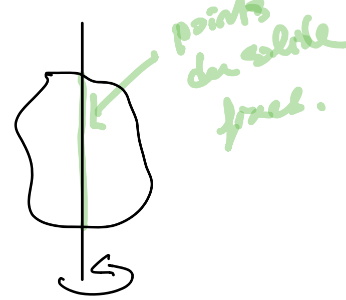


1.2 Rotation autour d'un axe fixe

A un instant donné la rotation (quelle qu'elle soit) se fait autour d'un certain axe de rotation.

Si cet axe reste fixe (dans un certain référentiel), alors il s'agit d'une rotation autour d'un axe fixe.

Dans ce cas, tout un ensemble de points du solide sont fixes (tous ceux qui sont sur l'axe de rotation).

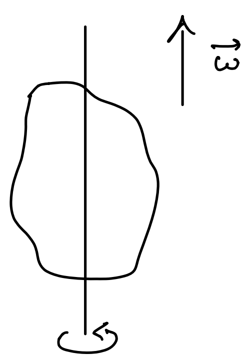


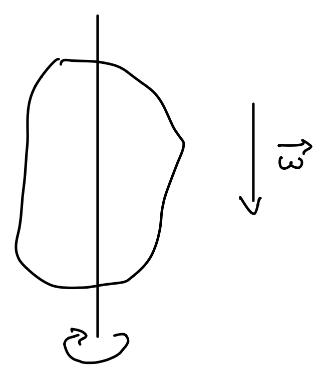
Pour décrire un mouvement de rotation, on utilise un vecteur rotation.

En effet, on doit préciser :

- la direction de l'axe de rotation
- le sens dans lequel on tourne
- la vitesse (angulaire) à laquelle on tourne

On peut résumer toutes ces informations dans un vecteur :

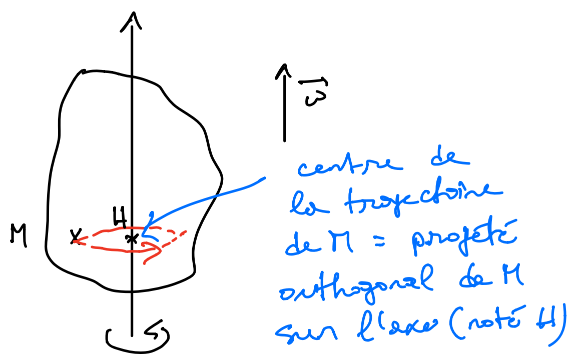


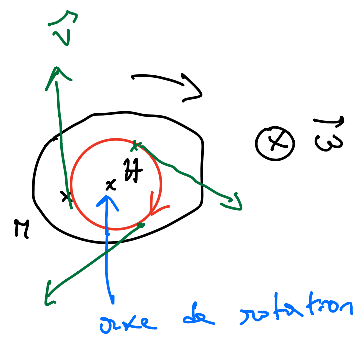


La norme du vecteur rotation est la vitesse angulaire (en rad.s^{-1}) : $\boxed{\omega = \|\vec{\omega}\|}$

vitesse angulaire

1.3 Champ des vitesses



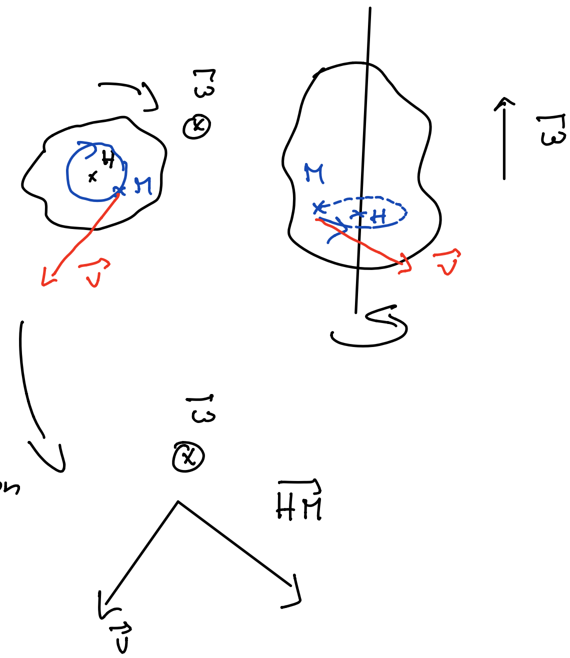


La trajectoire d'un point donné du solide lorsque celui-ci est en rotation uniforme autour d'un axe fixe est circulaire, centrée sur l'axe de rotation (projeté ⊥ du point sur l'axe de rotation).

On note $r = HM$ le rayon de la trajectoire circulaire du point M.

Pour caractériser les vitesses des ≠ points du solide, on doit définir un champ de vitesses (un vecteur vitesse associé à chaque point du solide) :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{HM}}$$



Comme $\vec{\omega}$ et $\vec{HM}$ sont orthogonaux, $\|\vec{\omega} \wedge \vec{HM}\| = \|\vec{\omega}\| \times \|\vec{HM}\| = \omega \times r$

On a donc $\boxed{\underbrace{v}_{\text{vitesse}} = \underbrace{\omega}_{\text{vitesse angulaire}} \underbrace{r}_{\text{rayon}}}$

Si on tourne à vitesse c^{ste} : $\omega = \frac{2\pi}{T}$, et $v = \frac{2\pi}{T} r$,

soit $v = \frac{2\pi r}{T}$

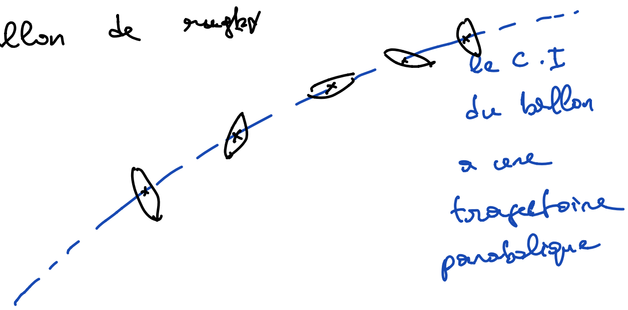
2. Caractéristiques d'un solide

2.1 Centre d'inertie

$\neq$ si $\vec{g}$ n'est pas uniforme $\left(\begin{array}{l} \text{centre de masse} \\ \text{centre d'inertie} \\ \text{centre de gravité} \end{array} \right)$ $\hat{m}$ chose

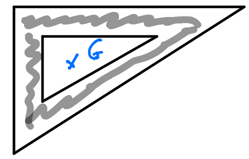
Approche intuitive : le C.I d'un objet est le point de l'objet qui a une trajectoire simple au cours du m^{vt}.

ex : ballon de rugby



⚠ le C.I n'appartient pas nécessairement matériellement à l'objet.

ex : équerre



Définition mathématique :

Le C.I est le barycentre des ≠ PM qui composent le solide affectés de leurs masses :

On note G le C.I du solide composé des points matériels M_i, de masses m_i :

$$\boxed{\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}}$$

On peut aussi écrire $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i}$ $\left(\sum_i m_i = m\right)$ masse du solide.

(avec O un point quelconque)

En effet : $\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \sum_i m_i \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}\right)$

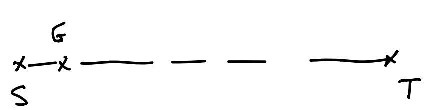
$= \sum_i m_i \overrightarrow{GO} + \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$

or, $\sum_i m_i \overrightarrow{GO} = \left(\sum_i m_i\right) \overrightarrow{GO}$

Comme $\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$, on a $\left(\sum_i m_i\right)\overrightarrow{GO} + \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} = \vec{0}$

et donc $\left(\sum_i m_i\right) \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$

ex : C.I du système terre – soleil :



$m_S \overrightarrow{GS} + m_T \overrightarrow{GT} = \vec{0}$

soit $m_S \overrightarrow{GS} + m_T\left(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{ST}\right) = \vec{0}$

et donc $\overrightarrow{GS}\,(m_S + m_T) + m_T \overrightarrow{ST} = \vec{0}$

et donc $\overrightarrow{SG} = \dfrac{m_T \overrightarrow{ST}}{m_S + m_T}$ donc très proche de S ...

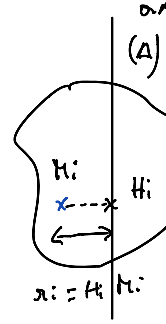
$\simeq \frac{m_T}{m_S} \vec{ST}$

2.2 Moment d'inertie par rapport à un axe

Le moment d'inertie par rapport à un certain axe de rotation caractérise l'inertie du solide dans son mouvement de rotation par rapport à cet axe (c'est l'analogue de la masse pour un mouvement de translation)

$$\boxed{J_{(\Delta)} = \sum_i m_i r_i^2}$$

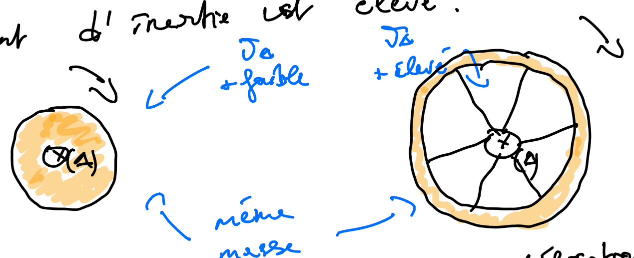
(on somme sur tous les PM qui composent le solide)



r_i est la distance entre M_i et l'axe (Δ)

la dimension ML^2 ($Kg \cdot m^2$)

Rem : Pour une même masse du solide, plus la masse est éloignée de l'axe de rotation et plus le moment d'inertie est élevé.



Rem : On peut aussi adopter une modélisation continue (et non discrète) du solide, on a alors :

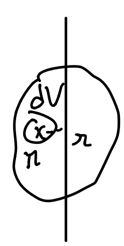
$$M = \iiint \rho(M)\, dV$$

sur tout le volume du solide

masse du solide

$\rho(M)\, dV$ est la masse contenue dans le volume dV

$$J_{(\Delta)} = \iiint \rho(M)\, r^2\, dV$$

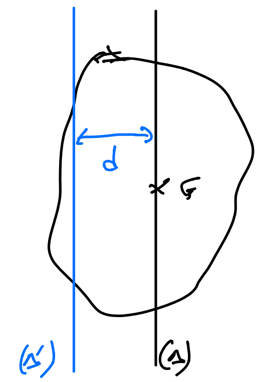


<u>Rem</u> : Théorème de HUYGENS
Pour une direction de l'axe de rotation donnée, le + petit moment d'inertie est obtenu pour l'axe passant par le centre d'inertie.

donne le lien entre les moments d'inertie par rapport à 2 axes parallèles (l'un passant par G).

$$J_{(\Delta')} = J_{(\Delta)} + m d^2$$

masse du solide — distance entre les 2 axes

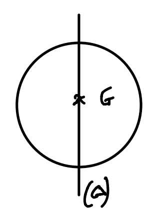


2.3 Exemples de moments d'inertie

On trouve des moments d'inertie par rapport à des axes passant par le centre d'inertie.

- boule / sphère (pleine, homogène) :

$$J_{(\Delta)} = \frac{2}{5} m R^2$$



sphère homogène de rayon R et de masse m

- cylindre (plein, homogène) :

$$J_{(\Delta)} = \frac{1}{2} m R^2$$

masse m
rayon R
hauteur h

<u>Rem</u> : la hauteur h n'intervient pas dans $J_{(\Delta)}$, d'une manière générale l'extension du solide parallèlement à l'axe de rotation n'intervient pas dans le moment d'inertie.

On a, en particulier, la même expression pour un disque (disque = cylindre avec $h \to 0$).

- cylindre (creux, homogène) :

$$J_{(\Delta)} = m R^2$$

Rem : cela s'applique aussi à un cerceau

masse m
rayon R
hauteur h

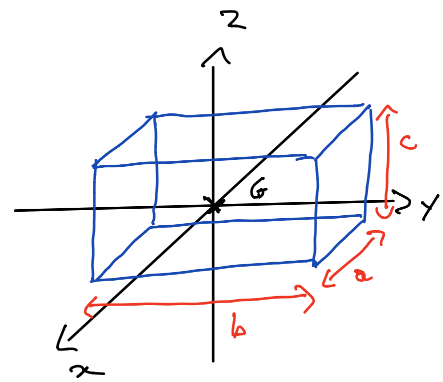
- parallélépipède (plein, homogène) :

par rapport à l'axe (Gx)

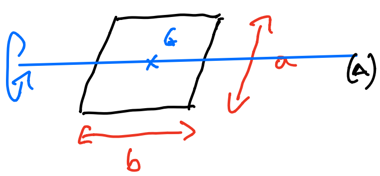
$$J_x = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$$

$$J_y = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)$$

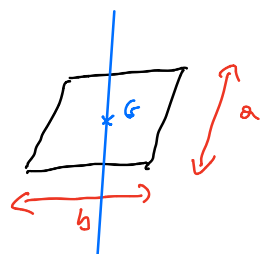
$$J_z = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$



Application à une plaque (homogène) :

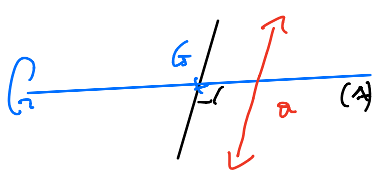


$$J_{(\Delta)} = \frac{1}{12} m a^2$$



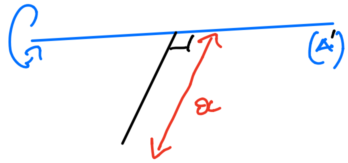
$$J_{(\Delta)} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

Application à une tige (homogène) :



$$J_{(\Delta)} = \frac{1}{12} m a^2$$

Rem :



$$J_{(\Delta')} = \frac{1}{12} m a^2 + m \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= m a^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{3} m a^2$$

3. Théorème de la quantité de mouvement (→ translation)

3.1 Expression de la quantité de m^vt d'un solide

On considère le solide comme un ensemble de PM (M_i, m_i).

qté de m^vt totale du solide → $$\vec{p} = \sum_i \vec{p_i} = \sum_i m_i \vec{v_i} = \sum_i m_i \frac{d\,\vec{OM_i}}{dt}$$

On peut inverser sommation et dérivation :

$$\vec{p} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{OM_i}\right)$$

Or, $\sum_i m_i \vec{OM_i} = m\,\vec{OG}$ ← C.I du solide = barycentre des (M_i, m_i)

masse totale du solide

D'où $\vec{p} = \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{OG}\right) = m\,\frac{d\,\vec{OG}}{dt}$

et $\frac{d\,\vec{OG}}{dt} = \vec{v_G}$, d'où :

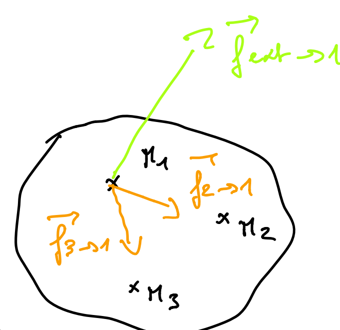
$$\boxed{\vec{p} = m\,\vec{v_G}}$$

vitesse du C.I du solide

qté de m^vt totale du solide

masse (totale) du solide

3.2 Forces intérieures et extérieures



D'une manière g^le, on décompose les forces exercées sur un certain PM en forces intérieures (exercées par les autres PM du solide) et forces extérieures (exercées par ce qui est extérieur au solide)

$$\vec{f}_{\to i} = \vec{f}_{int \to i} + \vec{f}_{ext \to i}$$

Ainsi, la résultante des forces sur l'ensemble du solide s'écrit :

$$\vec{f}_{tot} = \sum_i \vec{f}_{\to i} = \sum_i \vec{f}_{int \to i} + \sum_i \vec{f}_{ext \to i}$$

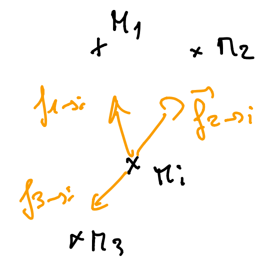
On note $\vec{f}_{ext} = \sum_i \vec{f}_{ext \to i}$ la résultante (somme vectorielle) de toutes les forces extérieures, sur tous les PM du solide.

On montre par ailleurs que $\sum_i \vec{f}_{int \to i} = \vec{0}$

En effet, du fait de la 3e loi de Newton, les forces intérieures se compensent.

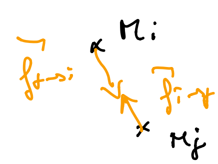
Plus précisément, on peut écrire :

$$\vec{f}_{int \to i} = \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \to i}$$



et donc
$$\sum_i \vec{f}_{int \to i} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \to i}$$

$$= \sum_{(i,j)} \underbrace{\vec{f}_{i \to j} + \vec{f}_{j \to i}}_{= \vec{0}}$$



on somme sur tous les couples (i, j)

$$= \vec{0}$$

La résultante de l'ensemble des forces sur le solide se réduit à la résultante des forces extérieures (les forces intérieures se compensent).

$$\boxed{\vec{f}_{tot} = \sum_i \vec{f}_{\to i} = \vec{f}_{ext}}$$

3.3 Théorème de la qté de mᵐ pour un solide

On applique la 2° loi de Newton à chaque PM du solide :

$$\frac{d\vec{p_i}}{dt} = \vec{f}_{\to i} \qquad \left(m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

On somme sur l'ensemble du solide :

$$\sum_i \frac{d\vec{p_i}}{dt} = \sum_i \vec{f}_{\to i}$$

Or,

$$\sum_i \frac{d\vec{p_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\sum_i \vec{p_i}}_{=\vec{p}_{tot} = m\vec{v}_G}\Big) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_G) = m\frac{d\vec{v}_G}{dt} = m\vec{a}_G$$

et $\sum_i \vec{f}_{\to i} = \vec{f}_{ext}$

On a donc :

$$\boxed{m\vec{a}_G = \vec{f}_{ext}}$$

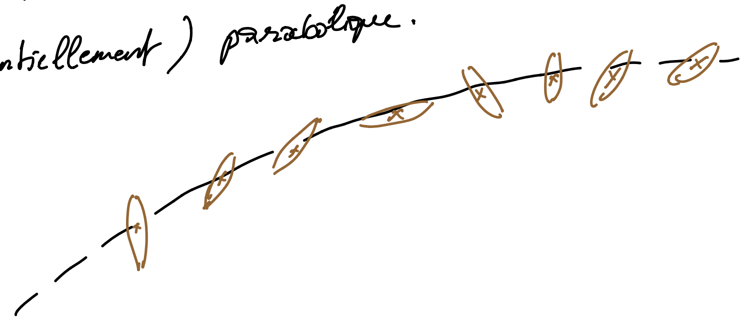
masse (totale) du solide

accélération du centre d'inertie

résultante des forces extérieures

Le mᵐ du C.I ne dépend que des forces extérieures et est, en général, simple (par exemple, sous la seule influence du poids, il est parabolique).

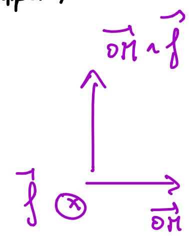
Ainsi, le mᵗ du C.I d'un ballon de rugby est (essentiellement) parabolique.



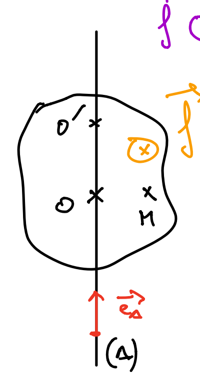
4. Moment d'une force

4.1 Moment d'une force par rapport à un axe

- moment d'une force $\vec{f}$ appliquée en M, par rapport à un point O : $\vec{M}_O = \vec{OM} \wedge \vec{f}$



- moment d'une force par rapport à un axe : projection sur l'axe du moment par rapport à un point situé sur l'axe



$$\boxed{M_\Delta = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_\Delta = \left(\vec{OM}\wedge\vec{f}\right)\cdot \vec{e}_\Delta}$$

ou n'importe quel point situé sur l'axe

Rem : Vérifions que l'on peut choisir n'importe quel point situé sur l'axe :

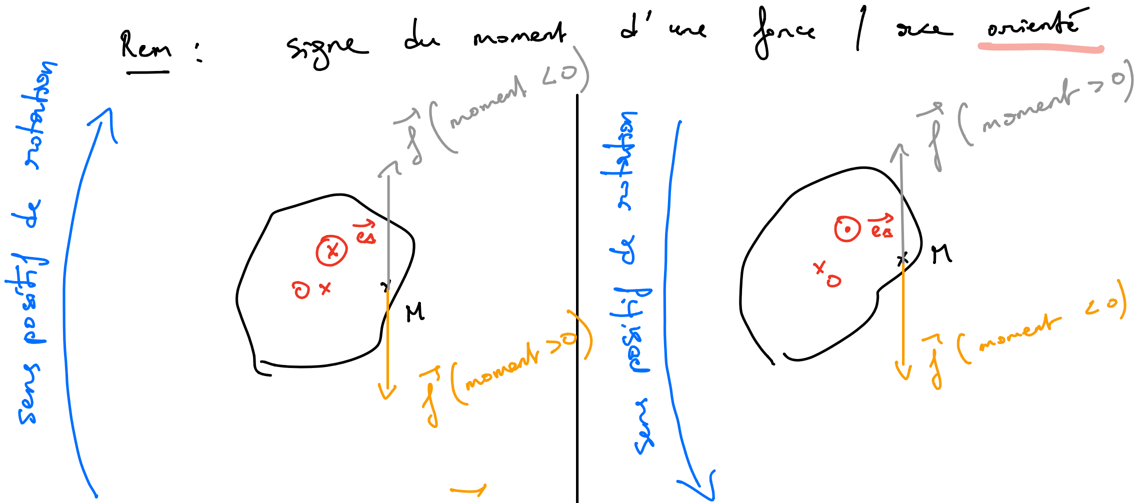
$$\left(\vec{O'M}\wedge\vec f\right)\cdot\vec e_\Delta = \left(\left(\vec{O'O}+\vec{OM}\right)\wedge \vec f\right)\cdot \vec e_\Delta$$
$$= \underbrace{\left(\vec{O'O}\wedge\vec f\right)\cdot\vec e_\Delta}_{=0} + \left(\vec{OM}\wedge\vec f\right)\cdot\vec e_\Delta$$

en effet, $\left(\vec{O'O}\wedge\vec f\right)\cdot\vec e_\Delta = 0$ car $\vec{O'O}\wedge\vec f \perp \vec{O'O}$, donc $\vec{O'O}\wedge \vec f\perp \vec e_\Delta$ ($\vec{O'O}$ et $\vec e_\Delta$ colinéaires) et donc

$$\left(\underbrace{\vec{O'O}\wedge\vec f}_{\perp \vec e_\Delta}\right)\cdot\vec e_\Delta = 0$$

(on peut aussi utiliser le produit mixte :
$\left(\vec{O'O}\wedge\vec f\right)\cdot\vec e_\Delta = \left(\underbrace{\vec e_\Delta\wedge\vec{O'O}}_{=\vec 0}\right)\cdot\vec f$)

Rem : signe du moment d'une force / axe orienté



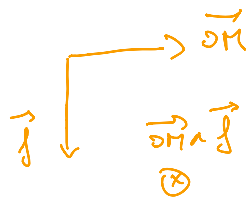
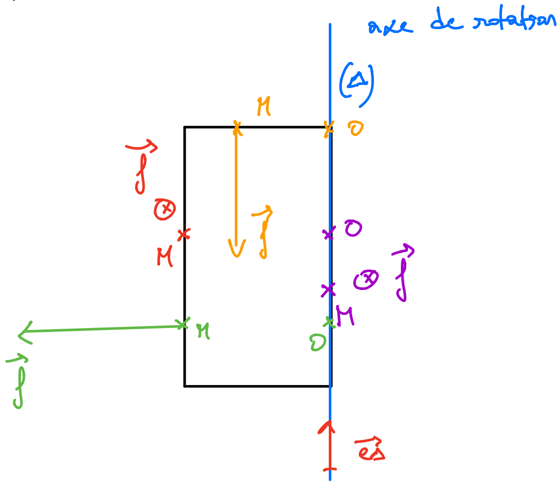


Illustration : rotation d'une porte autour de son axe



$\vec{f}$ ne fait pas tourner :

$$M_\Delta = (\underbrace{\vec{OM}\wedge\vec{f}}_{\perp\, \vec{e}_\Delta})\cdot\vec{e}_\Delta = 0$$

$\vec{f}$ ne fait pas tourner :

$$M_\Delta = (\underbrace{\vec{OM}\wedge\vec{f}}_{\perp\, \vec{e}_\Delta})\cdot\vec{e}_\Delta = 0$$

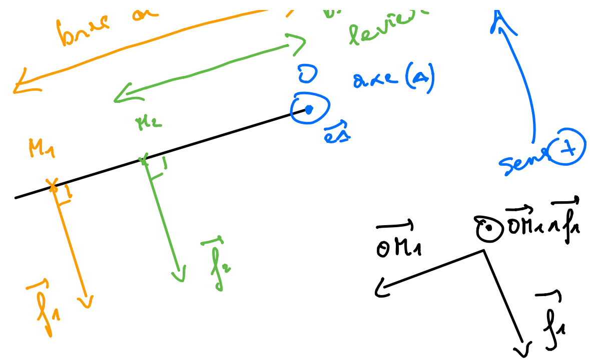
$\vec{f}$ ne fait pas tourner !

$$M_\Delta = (\underbrace{\vec{OM}\wedge\vec{f}}_{=\vec{0}})\cdot\vec{e}_\Delta = 0$$

$\vec{f}$ fait tourner ...
(moment négatif)

l. levier ⇒ bras de

4.2 bras de levier



$\vec{f_1} = \vec{f_2}$, mais les points d'application sont différents.

Quelle force a le moment le plus important ? $\vec{f_1}$ ...

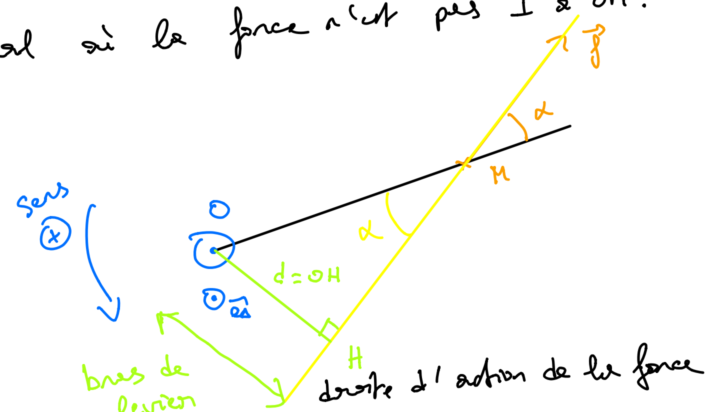
En effet, $M_{1\Delta} > M_{2\Delta}$:

$$M_{1\Delta} = (\vec{OM_1} \wedge \vec{f_1}) \cdot \vec{e_\Delta}$$
$$= (OM_1 \times f_1 \, \vec{e_\Delta}) \cdot \vec{e_\Delta} = OM_1 \times f_1$$

$$M_{2\Delta} = OM_2 \times f_2$$

On met ainsi en évidence le bras de levier de la force (appliquée en un certain point), qui est ici égal à OM_1 (ou OM_2).

Voyons le cas plus général où la force n'est pas $\perp$ à $\vec{OM}$.



$$M_\Delta = (\vec{OM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{e_\Delta}$$
$$= (OM \, f \, \sin(\alpha) \, \vec{e_\Delta}) \cdot \vec{e_\Delta}$$
$$= OM \, f \, \sin(\alpha)$$

$$\boxed{M_\Delta = OM \, f \, \sin(\alpha)}$$

On pose $d = OM \sin(\alpha)$: bras de levier

et on a $M_\Delta = \pm f \, d$ (moment = force × bras de levier)

(pour avoir le bon signe, on peut soit algébriser le bras de levier, soit ajouter un signe − si nécessaire)

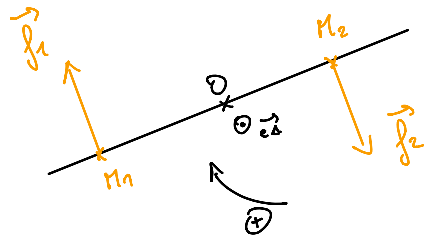
4.3 Couple de forces

On appelle couple de forces un ensemble de 2 forces (ou plus) telles que :

- la résultante des forces est nulle
- le moment résultant est non nul

ex :

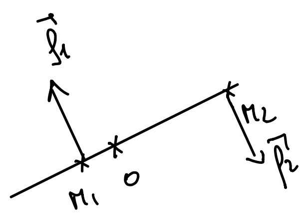
$\vec{f_1} = -\vec{f_2}$



intérêt pratique : effet de rotation sans contrainte de translat° sur l'axe de rotation

calcul du moment :

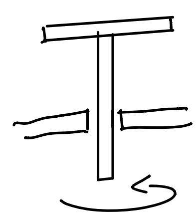
$$\begin{aligned} M_\Delta &= M_{1\Delta} + M_{2\Delta} \\ &= (\vec{OM_1} \wedge \vec{f_1}) \cdot \vec{e_\Delta} + (\vec{OM_2} \wedge \vec{f_2}) \cdot \vec{e_\Delta} \\ &= (\vec{OM_1} \wedge \vec{f_1} + \vec{OM_2} \wedge \vec{f_2}) \cdot \vec{e_\Delta} \\ &= (\vec{OM_1} \wedge (-\vec{f_2}) + \vec{OM_2} \wedge \vec{f_2}) \cdot \vec{e_\Delta} \\ &= ((-\vec{OM_1} + \vec{OM_2}) \wedge \vec{f_2}) \cdot \vec{e_\Delta} \\ &= (\vec{M_1M_2} \wedge \vec{f_2}) \cdot \vec{e_\Delta} \end{aligned}$$



Rem : On utilise souvent le mot couple à la place de moment (" un couple de 3 N.m " ...)

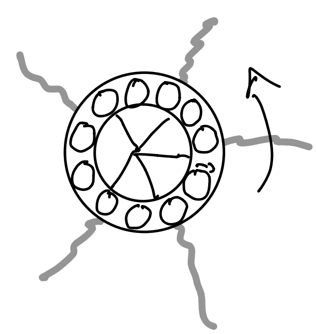
4.4 Liaison pivot

- liaison (entre 2 parties d'un système mécanique) qui autorise uniquement la rotation autour d'un certain axe.



- liaison pivot parfaite : liaison pivot sans frottements

réalisation pratique : roulement à billes



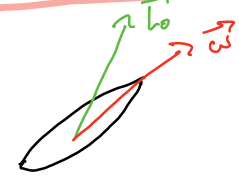
5. Théorème du moment cinétique

5.1 Moment cinétique (pour un solide) par rapport à un axe

idée générale : on écrit le moment cinétique pour chaque point matériel qui compose le solide et on somme.

difficulté : le moment cinétique (vectoriel) d'un solide est compliqué, en particulier il n'est pas colinéaire au vecteur rotation

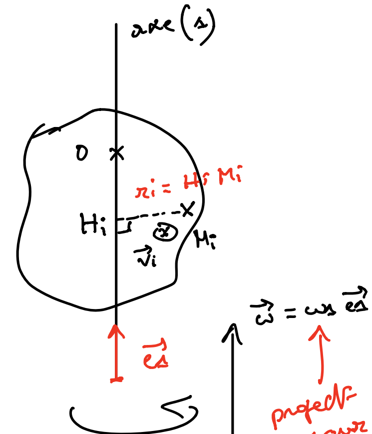
ex : ballon de rugby



"solution" : on contourne la difficulté en se limitant à la projection du moment cinétique sur un axe (= moment cinétique par rapport à un axe)

$$\vec{L_{Oi}} = m_i \vec{OM_i} \wedge \vec{v_i}$$

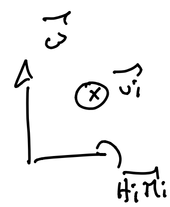
moment cinétique (vectoriel) de M_i par rapport à O



projection de $\vec{\omega}$ sur $\vec{e_\Delta}$, c'est algébrique (donc différent de la norme : $\omega_\Delta = +/- \omega$)

norme de ω

Or, $\vec{v_i} = \vec{\omega} \wedge \vec{H_iM_i}$



On reprend $\vec{L_{Oi}} = m_i \vec{OM_i} \wedge \vec{v_i}$

et on décompose $\vec{OM_i} = \vec{OH_i} + \vec{H_iM_i}$

On a alors $\vec{L_{Oi}} = m_i \underbrace{\vec{OH_i} \wedge \vec{v_i}}_{\perp \vec{e_\Delta}} + m_i \underbrace{\vec{H_iM_i} \wedge \vec{v_i}}_{/\!/ \vec{e_\Delta}}$

On projette sur $\vec{e_\Delta}$, pour obtenir $L_{\Delta i}$:

$L_{\Delta i} = \vec{L_{Oi}} \cdot \vec{e_\Delta} = m_i \left(\vec{H_iM_i} \wedge \vec{v_i}\right) \cdot \vec{e_\Delta}$ (le terme ⊥ $\vec{e_\Delta}$ est éliminé lors de la projection)

On développe $\overrightarrow{H_iM_i} \wedge \vec{v_i}$, avec $\vec{v_i} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{H_iM_i}$:

$$\overrightarrow{H_iM_i} \wedge \vec{v_i} = \overrightarrow{H_iM_i} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{H_iM_i})$$
$$= \underbrace{(\overrightarrow{H_iM_i} \cdot \overrightarrow{H_iM_i})}_{= \overrightarrow{H_iM_i}^2 = r_i^2} \vec{\omega} - \underbrace{(\overrightarrow{H_iM_i} \cdot \vec{\omega})}_{= 0 \ (\overrightarrow{H_iM_i} \perp \vec{\omega})} \overrightarrow{H_iM_i}$$
$$= r_i^2 \vec{\omega}$$

On a donc $L_{\Delta i} = m_i r_i^2 \vec{\omega} \cdot \vec{e_\Delta}$

or, $\vec{\omega} \cdot \vec{e_\Delta} = (\omega_\Delta \vec{e_\Delta}) \cdot \vec{e_\Delta} = \omega_\Delta$

finalement, $L_{\Delta i} = m_i r_i^2 \omega_\Delta$

On somme les contributions pour l'ensemble du solide :

$$L_\Delta = \sum_i L_{\Delta i} = \sum_i m_i r_i^2 \omega_\Delta$$
$$= \underbrace{\left(\sum_i m_i r_i^2\right)}_{J_\Delta} \omega_\Delta$$

On a donc : $\boxed{L_\Delta = J_\Delta \omega_\Delta}$

relation entre le moment cinétique (projeté sur un axe) et le vecteur rotat°, projeté sur le même axe

Rem : la relat° entre $\vec{L_O}$ et $\vec{\omega}$ est bcp + compliquée, $\vec{L_O}$ et $\vec{\omega}$ ne sont pas colinéaires en g^al.

$$\begin{pmatrix} L_{Ox} \\ L_{Oy} \\ L_{Oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & I_{yx} & I_{zx} \\ I_{xy} & J_y & I_{zy} \\ I_{xz} & I_{yz} & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

5.2 Théorème du moment cinétique pour un solide

On écrit le th du moment cinétique pour un PM du solide :

$$\frac{d\vec{L_{Oi}}}{dt} = \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{f_{\to i}} = \overrightarrow{OM_i} \wedge (\vec{f_{int \to i}} + \vec{f_{ext \to i}})$$

On somme sur tous les PM du solide :

$$\sum_i \frac{d\vec{L}_{O_i}}{dt} = \sum_i \vec{OM_i}\wedge \vec{f}_{int\to i} + \sum_i \vec{OM_i}\wedge\vec{f}_{ext\to i}$$

On détaille chaque terme :

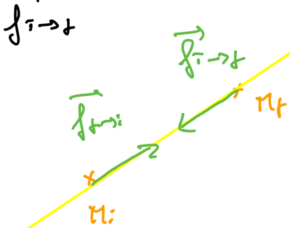
- $$\sum_i \frac{d\vec{L}_{O_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{L}_{O_i}\right) = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

- $$\sum_i \vec{OM_i}\wedge\vec{f}_{int\to i} = \vec{0}$$

en effet, $\vec{f}_{int\to i} = \sum_{j\neq i} \vec{f}_{j\to i}$

donc
$$\begin{aligned}\sum_i \vec{OM_i}\wedge\vec{f}_{int\to i} &= \sum_i\sum_{j\neq i} \vec{OM_i}\wedge\vec{f}_{j\to i}\\
&= \sum_{(i,j)} \vec{OM_i}\wedge\vec{f}_{j\to i} + \vec{OM_j}\wedge\vec{f}_{i\to j}\\
&= \sum_{(i,j)} \left(-\vec{OM_i}+\vec{OM_j}\right)\wedge\vec{f}_{i\to j}\\
&= \sum_{(i,j)} \underbrace{\vec{M_iM_j}\wedge\vec{f}_{i\to j}}_{=\vec{0}}\\
&= \vec{0}\end{aligned}$$

$\vec{f}_{i\to j} = -\vec{f}_{j\to i}$



- $\sum_i \vec{OM_i}\wedge\vec{f}_{ext\to i}$ est le moment résultant des forces extérieures sur le solide, on le note $\vec{M}_{O,ext}$

On a finalement : $$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{O,ext}}$$

th du moment cinétique pour un solide

Pour pouvoir effectivement utiliser ce résultat, il faut une relation entre $\vec{L}_O$ et $\vec{\omega}$, ce que pour l'instant on ne sait faire que en se limitant à la projection sur un axe de rotation fixe.

On projette sur un axe (Δ) qui passe par O et dirigé par le vecteur unitaire $\vec{e}_\Delta$:

$$\left(\frac{d\vec{L_O}}{dt}\right)\cdot\vec{e_\Delta} = \vec{M}_{O,ext}\cdot\vec{e_\Delta}$$

Or, $\left(\frac{d\vec{L_O}}{dt}\right)\cdot\vec{e_\Delta} = \frac{d}{dt}\left(\vec{L_O}\cdot\vec{e_\Delta}\right) = \frac{dL_\Delta}{dt}$

$\vec{e_\Delta}$ fixe

et $\vec{M}_{O,ext}\cdot\vec{e_\Delta} = M_{\Delta,ext}$: moment des forces extérieures par rapport à l'axe (Δ).

On a donc : $\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = M_{\Delta,ext}}$

th du moment cinétique projeté sur l'axe (fixe) (Δ).

On utilisera ensuite le fait que $L_\Delta = J_\Delta\,\omega_\Delta$:

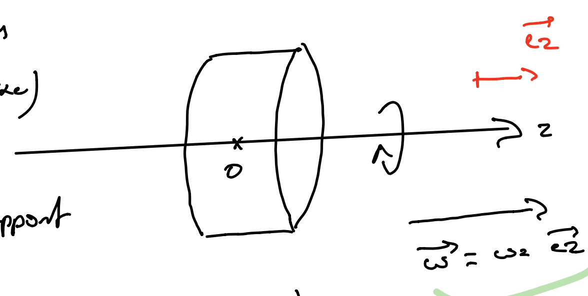
$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(J_\Delta\,\omega_\Delta\right) = J_\Delta\frac{d\omega_\Delta}{dt}$$

On a donc : $\boxed{J_\Delta\frac{d\omega_\Delta}{dt} = M_{\Delta,ext}}$

forme la + directement utilisable en pratique

5.3 Mise en rotation d'un solide

Un solide peut tourner sans frottements autour d'un axe (fixe) (Oz) (liaison pivot parfaite).



Son moment d'inertie par rapport à cet axe est noté J_z.

Il est initialement immobile (pas de rotation).

A partir de $t=0$, il est soumis à :

- un couple moteur constant (qui tend à faire tourner dans le sens positif)
- un couple « de frottement fluide », proportionnel à la vitesse angulaire.

Rem : très souvent, il n'y a pas besoin de calculer de moment de forces, on donne directement une expression pour le moment.

Rem : On utilise "couple" pour désigner les moments de forces

• expression du couple moteur : $\vec{C_m} = C \vec{e_z}$, avec C constante > 0.

projeté sur (Oz), on a $C_{mz} = C$

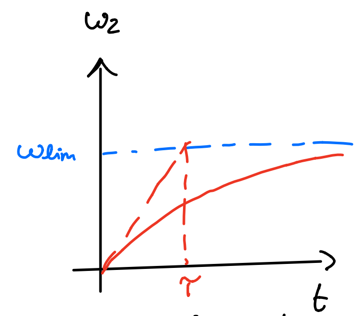
• expression du couple de frottement fluide :

$\vec{C_\alpha} = -\alpha \vec{\omega} = -\alpha \omega_z \vec{e_z}$

projeté sur (Oz) : $C_{\alpha z} = -\alpha \omega_z$

On écrit le th du moment cinétique projeté sur (Oz) :

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = C - \alpha \omega_z$$



$\omega_z = \omega_{lim}(1 - e^{-t/\tau})$

soit $\frac{d\omega_z}{dt} + \frac{\alpha}{J_z}\omega_z = \frac{C}{J_z}$

On pose $\tau = \frac{J_z}{\alpha}$ et $\omega_{lim} = \frac{C}{\alpha}$

et on a $\frac{d\omega_z}{dt} + \frac{1}{\tau}\omega_z = \frac{1}{\tau}\omega_{lim}$

solutions : $\omega_z = \lambda e^{-t/\tau} + \omega_{lim}$

et la c.i $\omega_z(t=0) = 0$ donne $0 = \lambda + \omega_{lim}$

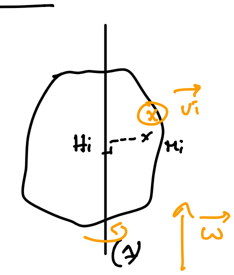
et donc $\omega_z = \omega_{lim}(1 - e^{-t/\tau})$ évolut du 1° ordre

6. Théorème de l'énergie cinétique

6.1 Energie cinétique d'un solide en rotation

On somme les contributions des ≠ PM qui composent le solide.

$e_{ci} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$ avec $\vec{v_i} = \vec{\omega} \wedge \vec{H_iM_i}$



Or, $\vec{\omega} \perp \overrightarrow{H_iM_i}$, donc $\|\vec{v_i}\| = \|\vec{\omega}\| \times \|\overrightarrow{H_iM_i}\|$

$= \omega\, r_i$

d'où $ec_i = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2$

On somme : $ec = \sum_i ec_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2$

$= \frac{1}{2} \Big(\underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{J_\Delta} \Big) \omega^2$

On a donc : $\boxed{ec = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$ expression de l'énergie cinétique de rotation d'un solide.

Rem : $\omega^2 = \omega_\Delta^2$

Rem : $ec = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ est l'ec de rotation (autour de l'axe (Δ)), l'énergie cinétique associée à la translation d'un solide $\frac{1}{2} m v_G^2$.

6.2 Théorème de l'énergie cinétique

Pour un PM qui compose le solide :

$$\frac{dec_i}{dt} = P_{int_i} + P_{ext_i} = \vec{f}_{int \to i} \cdot \vec{v_i} + \vec{f}_{ext \to i} \cdot \vec{v_i}$$

On somme sur l'ensemble du solide :

$$\frac{dec}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i ec_i\right) = \sum_i \frac{dec_i}{dt} = \underbrace{\sum_i \vec{f}_{int \to i} \cdot \vec{v_i}}_{P_{int} \text{ : puissance des forces intérieures}} + \underbrace{\sum_i \vec{f}_{ext \to i} \cdot \vec{v_i}}_{P_{ext} \text{ : puissance des forces extérieures}}$$

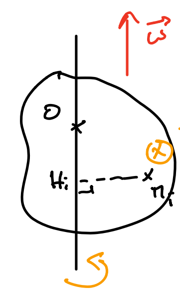
Pour un solide, la puissance des forces intérieures est nulle.

On a donc $\boxed{\frac{dec}{dt} = P_{ext}}$

On détaille l'expression de P_{ext} :

$$P_{ext} = \sum_i \vec{f}_{ext \to i} \cdot \vec{v_i}$$

or, $\vec{v_i} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{H_i M_i} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM_i}$



(en effet, $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM_i} = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{OH_i} + \overrightarrow{H_i M_i})$
$= \underbrace{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OH_i}}_{= \vec{0}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{H_i M_i}$)

Donc
$$P_{ext} = \sum_i \vec{f}_{ext \to i} \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM_i})$$
$$= \sum_i \vec{\omega} \cdot (\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{f}_{ext \to i})$$
$$= \vec{\omega} \cdot \underbrace{\left(\sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{f}_{ext \to i}\right)}_{\vec{M}_{O,ext}}$$

On a donc $\boxed{P_{ext} = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_{O,ext}}$

express° de P_{ext} en fct° du moment des forces

On aura donc $\boxed{\dfrac{dec}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_{O,ext}}$

th ec pour un solide

6.3 Equivalence th énergie cinétique / th du moment cinétique pour un solide.

On reprend $\dfrac{dec}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_{O,ext}$

$$\frac{dec}{dt} = \frac{d}{dt}\left(1/2 \, J_\Delta \, \omega_\Delta^2\right) = \cancel{\frac{1}{2}} J_\Delta \cdot \cancel{2} \, \omega_\Delta \frac{d\omega_\Delta}{dt} = J_\Delta \, \omega_\Delta \frac{d\omega_\Delta}{dt}$$

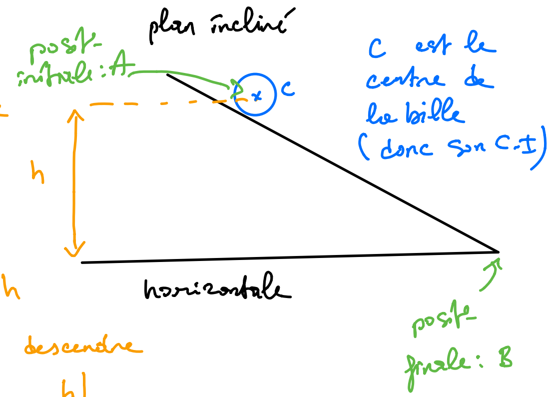
$$\vec{\omega} \cdot \vec{M}_{O,ext} = (\omega_\Delta \vec{e_\Delta}) \cdot \vec{M}_{O,ext} = \omega_\Delta \, M_{\Delta,ext}$$

On a donc $J_\Delta \cancel{\omega_\Delta} \dfrac{d\omega_\Delta}{dt} = \cancel{\omega_\Delta} M_{\Delta,ext}$

Et donc $J_\Delta \dfrac{d\omega_\Delta}{dt} = M_{\Delta,ext}$ ce que l'on avait obtenu avec le th du moment cinétique projeté sur l'axe de rotation.

6.4 Bille sur un plan incliné

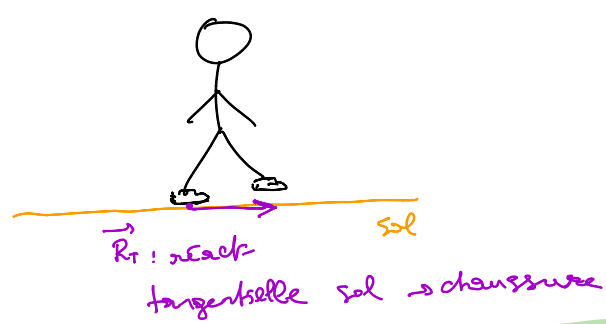
On considère la situation d'une bille (solide de forme sphérique, homogène, de rayon R et de masse m, donc de moment d'inertie $J = \frac{2}{5} m R^2$) qui roule sans glisser sur un plan incliné.



La vitesse (associée à la translation, la vitesse de C) est-elle + ou moins grande que dans le cas du glissement (sans aucun frottement) ? Que vaut-elle ?

Ne pas penser que les frottements (solides) conduisent nécessairement à une dissipation d'énergie ! les frottements peuvent avoir un rôle moteur, par exemple quand on marche ...

Lorsque la chaussure appuie sur le sol, elle est immobile par rapport au sol : la réaction $\vec{R_T}$ ne travaille pas.

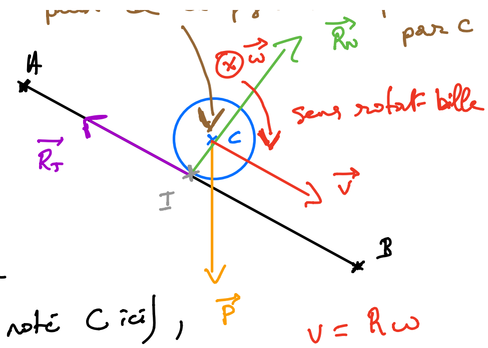


La vitesse en bas sera moins élevée que dans le cas du glissement, car l'augmentation d'énergie cinétique due au travail du poids sera partagée entre ec translation et ec rotation, alors que dans le cas du glissement il n'y a que ec translation.

l'axe de rotation est ⊥ au plan de la figure et passe

Th de l'énergie cinétique :

$$\Delta ec = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R_N}} + W_{\vec{R_T}}$$



$v = R\omega$

Or, $W_{\vec{R_N}}$ et $W_{\vec{R_T}}$ sont nuls,

et $W_{\vec{P}} = mg\,(z_A - z_B)$ où z désigne l'altitude du centre d'inertie (noté C ici),

soit $W_{\vec{P}} = mg\,h$.

On a donc $ec_B - ec_A = W_{\vec{P}} = mgh$.

Or, $ec_A = 0$ (bille immobile au départ).

$ec_B = ec_{translation_B} + ec_{rotation_B}$

avec $ec_{translation_B} = \frac{1}{2} m\, v_B^2$ (il s'agit de la vitesse de C)

et $ec_{rotation_B} = \frac{1}{2} J\, \omega_B^2$ (ω : vitesse angulaire autour de l'axe de rotation)

Or, on a $v_B = R\,\omega_B$, donc $ec_B = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} J \left(\frac{v_B}{R}\right)^2$

d'où $ec_B = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}\, m \cancel{R^2}\, \frac{v_B^2}{\cancel{R^2}} = \frac{1}{2} m v_B^2 \left(1 + \frac{2}{5}\right)$

soit $ec_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \times 7/5$

On conclut : $\frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 \times 7/5 = \cancel{m} g h$

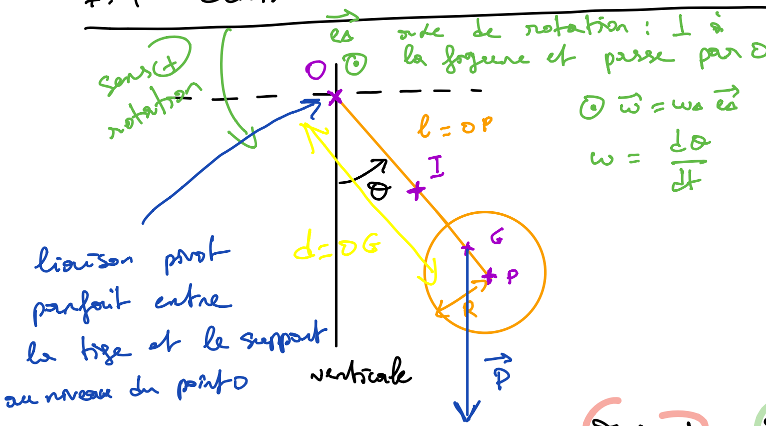
et donc $v_B = \sqrt{2gh \times \frac{5}{7}}$

(avec le glissement : $v_B = \sqrt{2gh}$)

7. Pendule pesant

$\rightsquigarrow$ comme le pendule simple, mais avec un solide qui oscille au lieu d'un point matériel

7.1 Centre d'inertie et moment d'inertie



On modélise le pendule par :

- une tige de longueur ℓ et de masse m
- un disque de rayon R et de masse m', de centre P

- moment d'inertie :

$$J_\Delta = J_\Delta(\text{tige}) + J_\Delta(\text{disque})$$
$$= \frac{1}{3} m \ell^2 + \frac{1}{2} m' R^2 + m' \ell^2$$

terme pour rotat° / axe passe par P

terme dû à la distance $\ell = OP$ entre les axes

Donc $J_\Delta = \left(\frac{m}{3} + m'\right)\ell^2 + \frac{1}{2} m' R^2$

- centre d'inertie :

le solide est composé de la tige, de m et de centre d'inertie I, et du disque, de masse m' et de centre d'inertie P

On a donc, en notant G le C.I de l'ensemble :

$$\vec{OG} = \frac{m\,\vec{OI} + m'\,\vec{OP}}{m + m'}$$

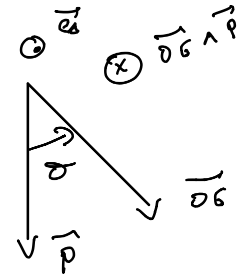
d'où $OG = \frac{m\,\ell/2 + m'\ell}{m+m'} = \ell\left(\frac{m/2 + m'}{m+m'}\right)$

on notera d cette distance.

7.2 Equation du mouvement

on utilise le th du moment cinétique (projeté sur (Δ)) :

$J_\Delta \dfrac{d\omega_\Delta}{dt} = M_\Delta$ où $M_\Delta = M_{\vec{P}} + \underbrace{M_{\text{liaison\_pivot\_parfait}}}_{=0}$



Or, $\vec{M}_{\vec{P}} = \vec{OG} \wedge \vec{P} = -(m+m')\,g\,d\,\sin(\theta)\,\vec{e_\Delta}$

et donc $M_{\Delta\vec{P}} = \vec{M}_{\vec{P}} \cdot \vec{e_\Delta} = -(m+m')\,g\,d\,\sin(\theta)$

On a donc : $J_\Delta \dfrac{d\omega_\Delta}{dt} = -(m+m')\,g\,d\,\sin(\theta)$

Or, $\omega_\Delta = \dfrac{d\theta}{dt}$, d'où :

$$J_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2} + (m+m')\,g\,d\,\sin(\theta) = 0$$

soit $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{(m+m')\,g\,d}{J_\Delta}}$

et donc $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\cancel{(m+m')}\,g\,\ell\,(m/2+m')}{\cancel{(m+m')}\left((m/3+m')\ell^2 + 1/2\, m' R^2\right)}}$

Mis à part l'expression de ω_0, le contenu physique est exactement le même qu'avec le pendule simple.