MP 2	TD 2	Electricité	Filtres

Exercice 1

On considère un filtre RC passe bas du premier ordre avec C=10 nF et R=3 kΩ.

1) Tracer, pour un fonctionnement à vide, le diagramme de bode en gain et en phase, et déterminer la bande passante.
2) On branche en sortie une charge R_0=6 kΩ. Comment sont modifiés le gain maximum et la bande passante ? Le produit des deux ?

Exercice 2

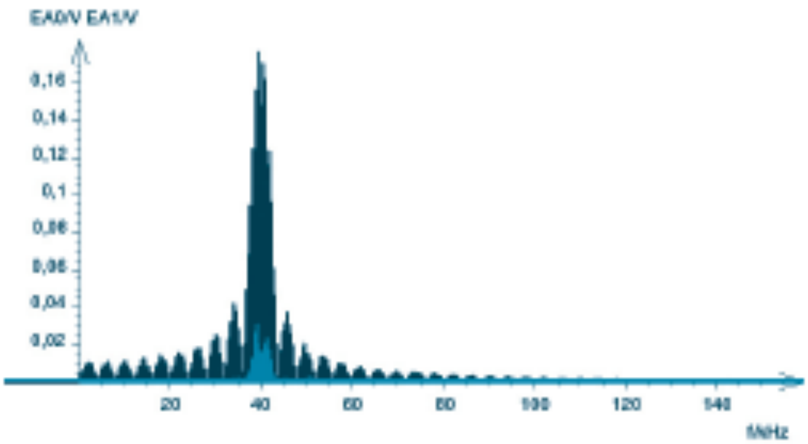
On considère un filtre RLC passe bande.

1) Faire un schéma et analyser les cas HF et BF.
2) Etablir l'expression de la fonction de transfert en faisant apparaitre ω_0 et Q.
3) Déterminer les fréquences de coupure.
4) Retrouver la relation $\Delta\omega = \omega_0/Q$

Exercice 3

La figure ci-dessous donne les spectres du signal émis par un haut-parleur (foncé) et du signal reçu par un micro placé plus loin (clair).

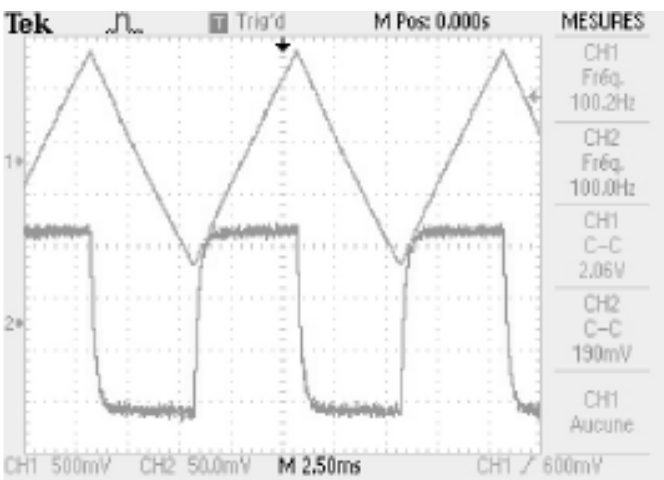
1) Quel type de filtrage est réalisé entre les deux signaux ?
2) Estimer le facteur de qualité associé (en considérant qu'il s'agit d'un filtre d'ordre 2).



Exercice 4

On souhaite réaliser l'opération permettant de passer du signal de la voie 1 (triangles) à celui de la voie 2 représentés ci-dessous.

1) De quel type d'opération mathématique s'agit-il ? En partant d'un filtre d'ordre 1, proposer un circuit RC permettant de la réaliser. Quelle condition doit vérifier la fréquence de coupure ?
2) Proposer des valeurs adéquates pour R et C.



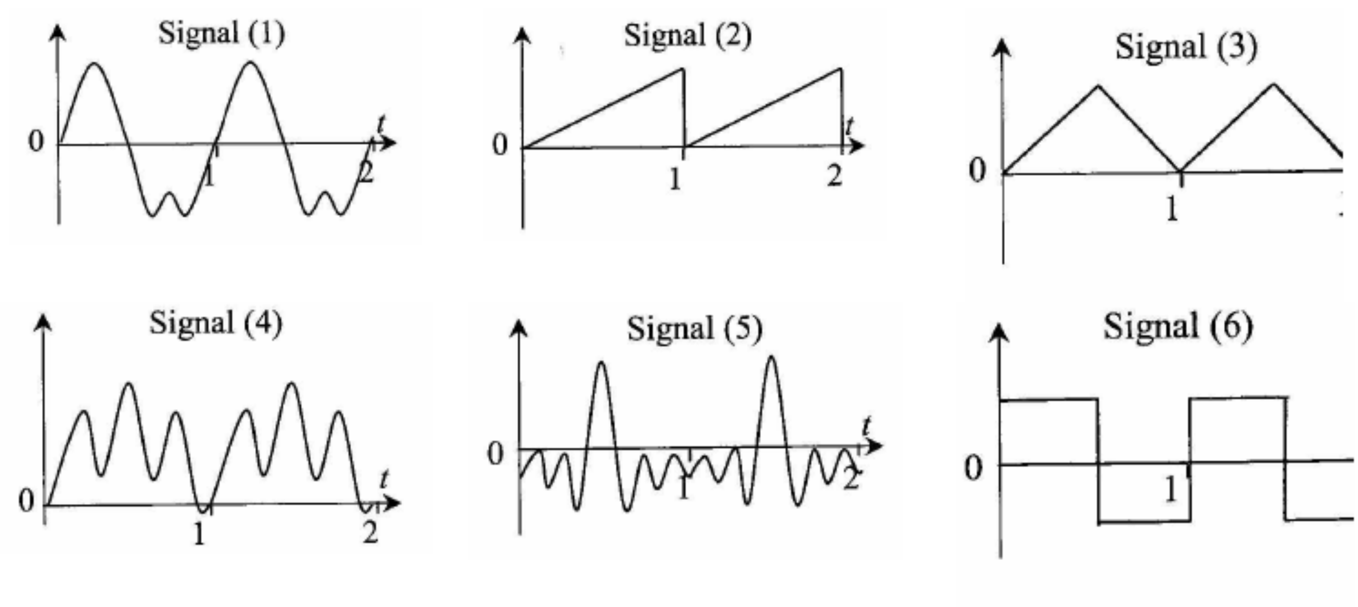
Exercice 5

On considère un filtre RLC passe bas du second ordre.

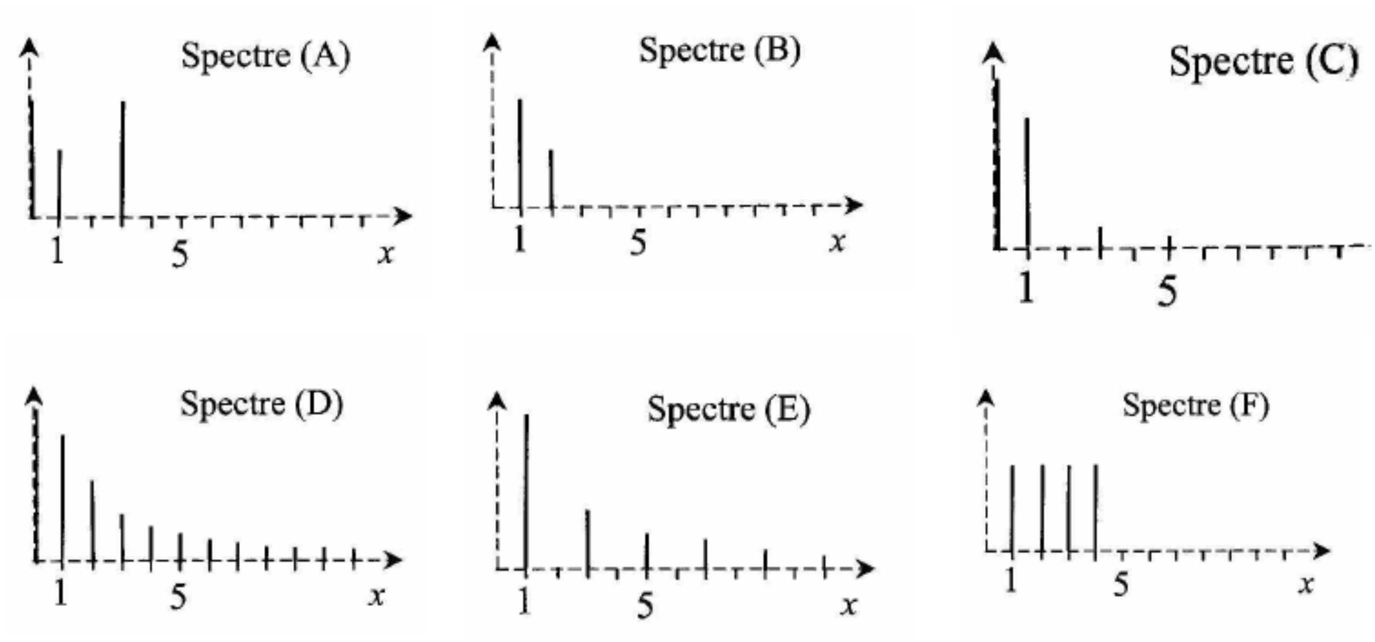
1) Faire un schéma et analyser les cas HF et BF.
2) Etablir l'expression de la fonction de transfert en faisant apparaitre ω_0 et Q.
3) Montrer qu'aucune fréquence n'est amplifiée à la condition que $Q<1/\sqrt{2}$.
4) Etablir l'expression de la fréquence de coupure.
5) Montrer que la pente de l'asymptote HF est de -40 dB/décade.

Exercice 6

Attribuer aux différents signaux ci-dessous leurs spectres.



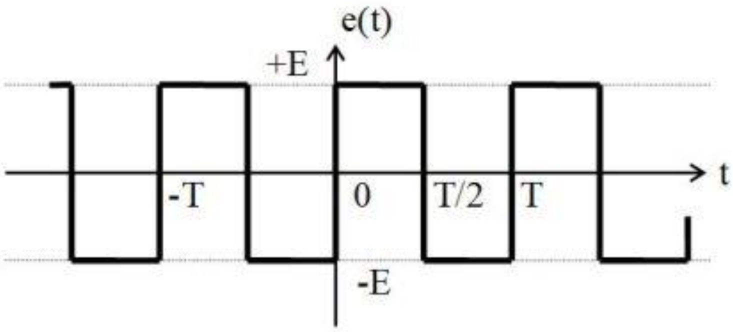
Les signaux



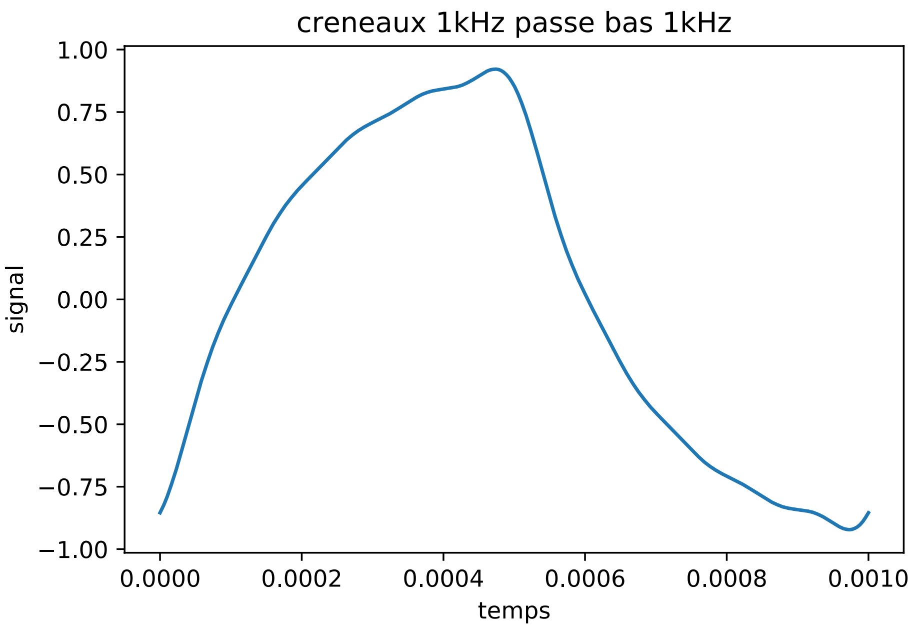
Les transformées de Fourier

Exercice 7

Le signal représenté ci-dessous, avec E = 1V et f = 1 kHz est envoyé en entrée d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure 1 kHz. Les amplitudes des harmoniques pairs sont nulles et celles des harmoniques impairs sont données par $c_n = 4E/(n\pi)$, les phases sont toutes égales à $-\pi/2$.



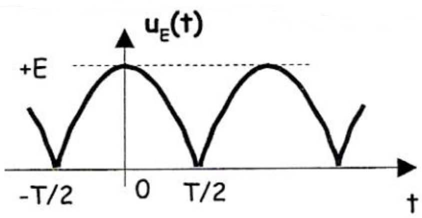
Calculer la réponse en prenant en compte les 10 premiers harmoniques non nuls. Utiliser une calculatrice graphique, ou python avec matplotlib, ou wolfram alpha… le résultat devrait ressembler à la simulation donnée ci-dessous.

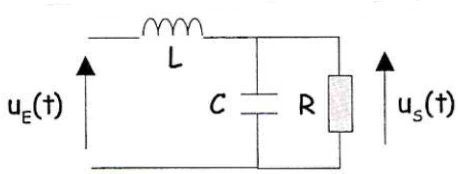


Exercice 8

On considère la tension redressée double alternance e(t) d'amplitude E représentée ci-dessous.

1) Montrer que sa valeur moyenne vaut $2E/\pi$
2) L'amplitude du $n^{ième}$ harmonique est donnée par $C_n = 4E / (\pi(4n^2-1))$. Calculer numériquement les amplitudes du fondamental et des 3 premiers harmoniques (E = 30V et T = 10 ms).
   Donner l'expression numérique de e(t) (en s'arrêtant au $3^{ème}$ harmonique, et on ne cherchera pas à déterminer les phases).
3) Donner numériquement la fonction de transfert du filtre représenté ci-dessous (R = 100Ω ; C = 1 µF et L = 1H). Préciser sa nature et son ordre.
4) Donner l'expression numérique de la tension de sortie $u_s(t)$ si e(t) est en entrée du filtre (Là encore, en omettant les phases).
5) Calculer la valeur efficace de $u_s(t)$.

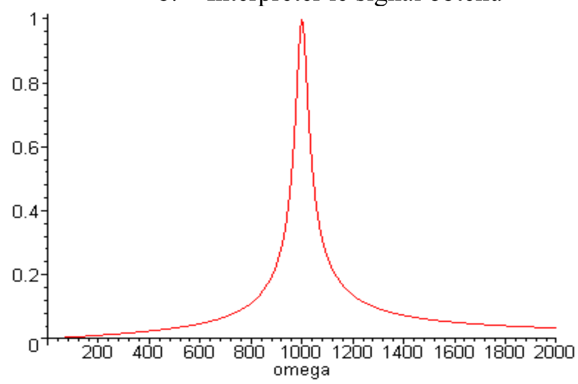


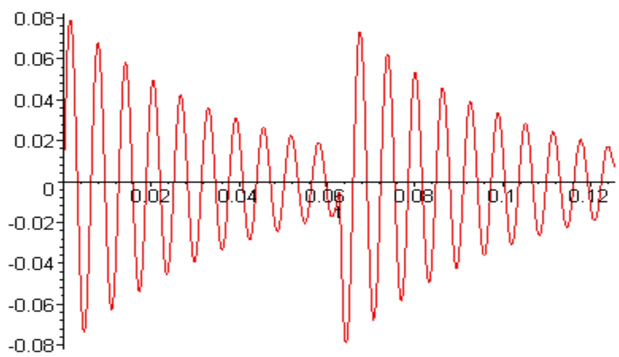


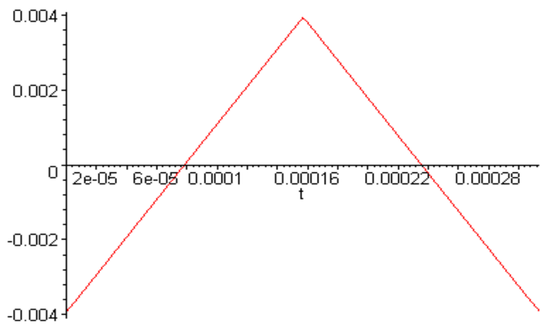
Exercice 9

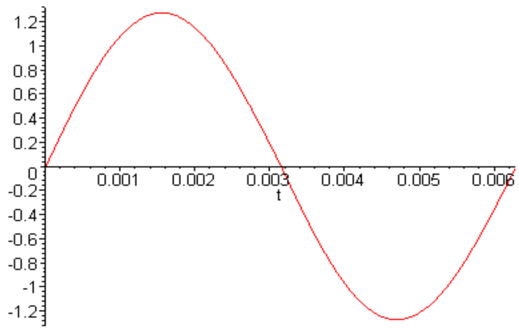
On s'intéresse à l'effet d'un filtre passe bande sur un signal en créneaux. La pulsation centrale du filtre est de 1000 s^{-1} et le facteur de qualité égal à 20. Un représentation de G en fonction de la fréquence est donnée ci-dessous.
On donne également le signal de sortie obtenu pour des créneaux de pulsations 50, 1000 et 20000 s^{-1}

1. Donner l'expression de la fonction de transfert d'un filtre du second ordre en faisant apparaître Q et ω_0
2. Comparer les amplitudes des signaux obtenus dans les trois cas et interpréter
3. On s'intéresse au cas où la pulsation des créneaux est de 50 s^{-1}
   a. Déterminer la pulsation du signal obtenu (la durée totale sur le graphe correspond à une période des créneaux) et interpréter
   b. En considérant le filtre comme un circuit RLC série, interpréter en termes de régime transitoire
4. On s'intéresse au cas où la pulsation des créneaux est de 1000 s^{-1}
   a. Déterminer graphiquement le gain pour des pulsations de 900, 1000 et 1100 s^{-1}
   b. Interpréter le signal obtenu
5. On s'intéresse au cas où la pulsation des créneaux est de 20000 s^{-1}
   a. A partir de l'expression de la fonction de transfert, vérifier qu'un filtre passe-bande a, en haute fréquence (i.e pour $\omega >> \omega_0$) un comportement intégrateur (V_s est une primitive de V_e)
   b. Interpréter le signal obtenu







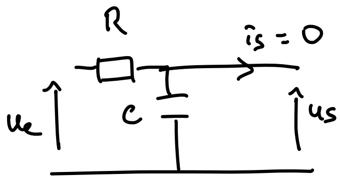


Exercice 1

On considère un filtre RC passe bas du premier ordre avec C=10 nF et R=3 kΩ.

1) Tracer, pour un fonctionnement à vide, le diagramme de bode en gain et en phase, et déterminer la bande passante.
2) On branche en sortie une charge R_0=6 kΩ. Comment sont modifiés le gain maximum et la bande passante ? Le produit des deux ?

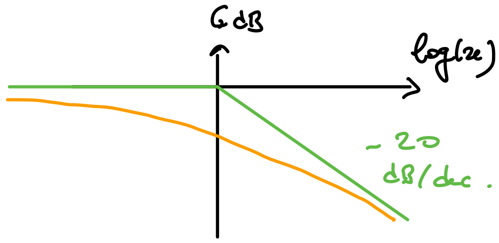
1.

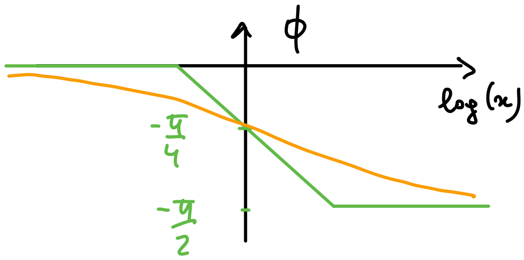


$$\underline{H} = \frac{1}{1+jRC\omega} = \frac{1}{1+jx}$$

BF : $\underline{H} \simeq 1$

HF : $\underline{H} \simeq \frac{1}{jx}$

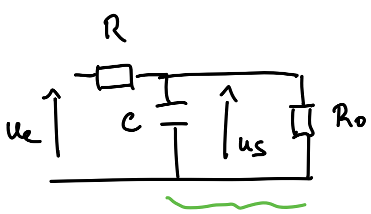




bande passante entre 0 et ω_c, donc

$\Delta\omega = \omega_c$, $\omega_c = \frac{1}{RC} = 3,3 \cdot 10^4\ s^{-1}$

2.



$\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_C} \,//\, \underline{Z_{R_0}}$

$$= \frac{1/jC\omega \times R_0}{1/jC\omega + R_0}$$

$$= \frac{R_0}{1+jR_0C\omega}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{R+\underline{Z_{eq}}} = \frac{\frac{R_0}{1+jR_0C\omega}}{R+\frac{R_0}{1+jR_0C\omega}} = \frac{R_0}{R_0+R+jRR_0C\omega}$$

gain max (= gain en BF)

$$= \frac{\frac{R_0}{R_0+R}}{1+j\frac{RR_0}{R_0+R}C\omega} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

pulsat° coupure

avec $H_0 = \frac{R_0}{R_0+R} = \frac{6}{9} \simeq 0,67$

$\omega_c = \frac{R_0+R}{RR_0C} \simeq 5 \cdot 10^4\ s^{-1}$

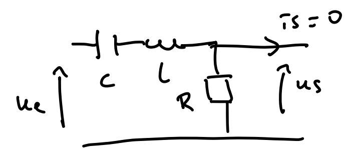
le produit $H_0\,\omega_c$ reste constant.

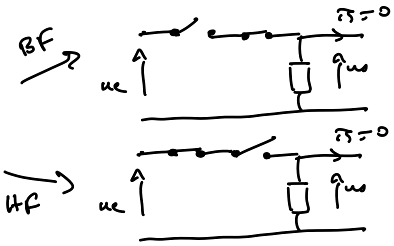
Exercice 2

On considère un filtre RLC passe bande.

1) Faire un schéma et analyser les cas HF et BF.
2) Etablir l'expression de la fonction de transfert en faisant apparaitre ω_0 et Q.
3) Déterminer les fréquences de coupure.
4) Retrouver la relation $\Delta\omega = \omega_0/Q$

1.





us = 0

us = 0

2. Calcul classique, en utilisant le pont diviseur de tension (cf cours)

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad , \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

3. On cherche x tq $|\underline{H}|(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc x vérifie :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{donc} \qquad Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$$

2 possibilités, condensées en $x - \frac{1}{x} = +/- \frac{1}{Q}$, soit $x^2 +/- \frac{1}{Q}x - 1 = 0$

$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4$ est le même pour les 2 équations, on a 4 solutions :

$x = +/- \frac{1}{2Q} +/- \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$, et on garde les 2 solutions positives :

$$\boxed{x_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$$

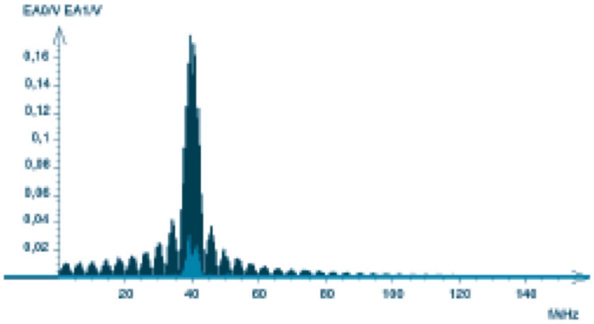
4. $$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{2Q} + \cancel{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}} + \frac{1}{2Q} - \cancel{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}} = \frac{1}{Q}$$

Or, $\Delta x = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$, donc $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$, soit $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

Exercice 3

La figure ci-dessous donne les spectres du signal émis par un haut-parleur (foncé) et du signal reçu par un micro placé plus loin (clair).

1) Quel type de filtrage est réalisé entre les deux signaux ?
2) Estimer le facteur de qualité associé (en considérant qu'il s'agit d'un filtre d'ordre 2).

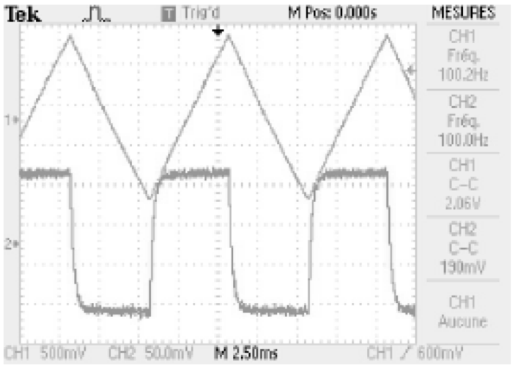


1. passe - bande
2. $f_0 = 40$ kHz et $\Delta f = 5$ kHz, donc $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega} = \dfrac{f_0}{\Delta f} = 8$

Exercice 4

On souhaite réaliser l'opération permettant de passer du signal de la voie 1 (triangles) à celui de la voie 2 représentés ci-dessous.

1) De quel type d'opération mathématique s'agit-il ? En partant d'un filtre d'ordre 1, proposer un circuit RC permettant de la réaliser. Quelle condition doit vérifier la fréquence de coupure ?
2) Proposer des valeurs adéquates pour R et C.



1. dérivation. avec l'ordre 1, il faut un passe-haut en basses fréquences.

$\omega < \frac{1}{RC}$

$$\underline{H} = \frac{jx}{1+jx} \simeq jx \Rightarrow \underline{u_s} = jx\,\underline{u_e} = \frac{1}{\omega_c}\frac{du_e}{dt} = RC\frac{du_e}{dt}$$

$$\rightarrow u_s = RC\frac{du_e}{dt}$$

2. graphiquement, $\frac{du_e}{dt} = \pm \frac{2\,V}{5\,ms} = 400\ V.s^{-1}$

et $u_s = \pm 80\ mV$ ↳ 85 ...

donc il faut $RC = 2.10^{-4}\ s$

p. ex $R = 2\ k\Omega$, $C = 0,1\ \mu F$

⚠ $\omega_c = \frac{1}{RC} = 5000\ s^{-1}$

$\Rightarrow f_c = 800\ Hz$

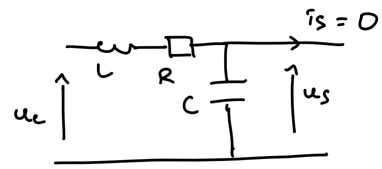
Or, $f = 100\ Hz$ on est donc bien dans la partie BF.

Exercice 5

On considère un filtre RLC passe bas du second ordre.

1) Faire un schéma et analyser les cas HF et BF.
2) Etablir l'expression de la fonction de transfert en faisant apparaitre ω_0 et Q.
3) Montrer qu'aucune fréquence n'est amplifiée à la condition que $Q<1/\sqrt{2}$.
4) Etablir l'expression de la fréquence de coupure.
5) Montrer que la pente de l'asymptote HF est de -40 dB/décade.

1.



cf cours pour analyse HF / BF

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

2. $$\underline{H} = \frac{1/jC\omega}{R + jL\omega + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$\Rightarrow LC = \frac{1}{\omega_0^2}$$

$$RC = \frac{1}{Q\omega_0}$$

d'où $$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

3. Il faut $|\underline{H}| \leq 1 \quad \forall x$

or, $$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$ donc il faut $(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2 \geqslant 1$

soit $1 + X^2 - 2X + \frac{1}{Q^2} X \geqslant 1$ avec $X = x^2$

et donc $X\left(X - 2 + \frac{1}{Q^2}\right) \geqslant 0$,

ce qui implique $(X > 0)$ que $X \geqslant 2 - \frac{1}{Q^2}$,

ce qui est vrai $\forall X\ (>0)$ si $2 - \frac{1}{Q^2} \leq 0$,

soit $\frac{1}{Q^2} \geqslant 2$ et donc $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ cela évite la résonance aux bornes du condensateur

4. La fréquence de coupure vérifie $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ce qui donne $X^2 + X\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) - 1 = 0$

$\rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $X = 1 \Rightarrow x = 1$ et donc $\omega_c = \omega_0$

$\rightarrow$ on veut une valeur réelle positive

$\rightarrow Q \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\Delta = \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)^2 + 4 > 0$ (proche de 4 si Q reste proche de 1)

$$X = \frac{2 - 1/Q^2 + \sqrt{\Delta}}{2}$$ ~ proche de 1

|| $Q \gg 1$: $X_c \simeq 1{,}55$
$Q \ll 1$: $X_c \simeq 0$

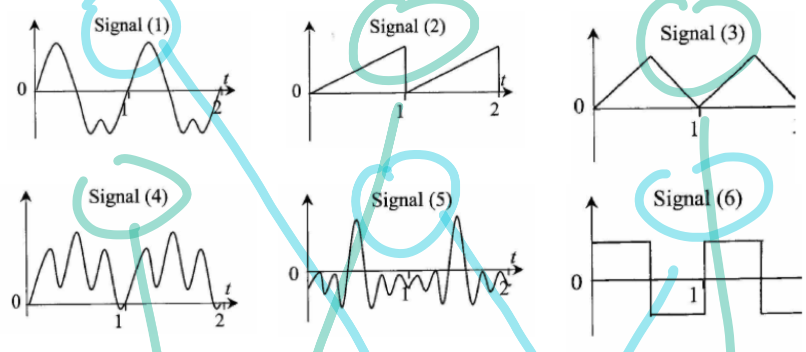
et $x = \sqrt{X}$, enfin $\omega_c = \omega_0 \sqrt{X}$ reste proche de ω_0 si Q reste proche de 1.

5. HF : $\underline{H} \simeq \frac{1}{-x^2} \Rightarrow G_{dB} = 20 \log(1/x^2)$
$= -40 \log(x)$

Exercice 6

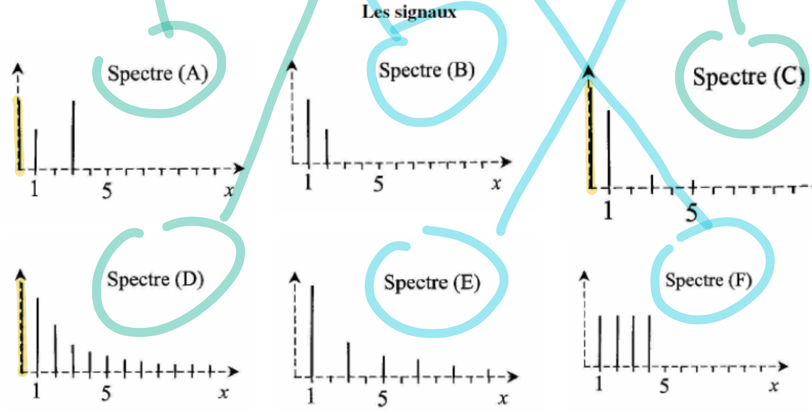
Attribuer aux différents signaux ci-dessous leurs spectres.

2, 3, 4 : < > non nulle



Les signaux

A, C, D : < > non nulle

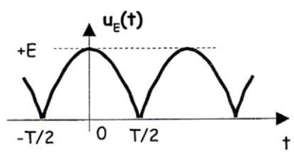


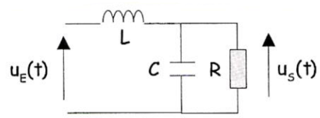
Les transformées de Fourier

Exercice 8

On considère la tension redressée double alternance e(t) d'amplitude E représentée ci-dessous.

1) Montrer que sa valeur moyenne vaut $2E/\pi$
2) L'amplitude du $n^{ième}$ harmonique est donnée par $C_n = 4E / (\pi(4n^2-1))$. Calculer numériquement les amplitudes du fondamental et des 3 premiers harmoniques (E = 30V et T = 10 ms).
   Donner l'expression numérique de e(t) (en s'arrêtant au $3^{ème}$ harmonique, et on ne cherchera pas à déterminer les phases).
3) Donner numériquement la fonction de transfert du filtre représenté ci-dessous ($R = 100\Omega$; $C = 1\ \mu F$ et L = 1H). Préciser sa nature et son ordre.
4) Donner l'expression numérique de la tension de sortie $u_s(t)$ si e(t) est en entrée du filtre (Là encore, en omettant les phases).
5) Calculer la valeur efficace de $u_s(t)$.





1. $e = E\,|\cos(\omega t)|$

⚠ $|\cos(\omega t)|$ a une pulsation 2ω, et donc une période $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$

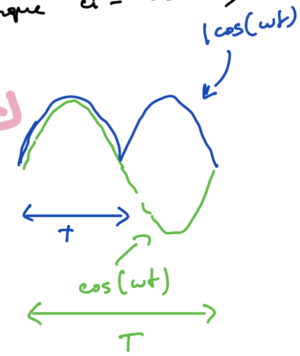
(sa période est 2 fois + petite que celle de $\cos(\omega t)$)

$$\langle e \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E\cos(\omega t)\,dt = \frac{E}{T}\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{E}{\omega T}\left(\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\omega T}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2E}{\omega T}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$ car sin est impaire

sur cet intervalle, $|\cos(\omega t)| = \cos(\omega t)$

Or, $\omega T = \pi$ (cf remarque ci-dessus)



Donc $\langle e \rangle = \frac{2E}{\pi}\sin(\pi/2)$

soit $\langle e \rangle = \frac{2E}{\pi}$ A-N : $\langle e \rangle = 19{,}1\,V.$

2. $c_n = \dfrac{4E}{\pi(4n^2-1)}$

$c_1 = 12{,}7\ V$

$c_2 = 2{,}5\ V$

$c_3 = 1{,}1\ V$

$c_4 = 0{,}6\ V$

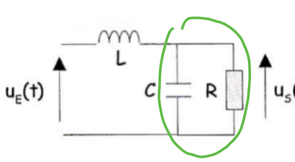
L'expression de e est donc :

$e = 19{,}1 + 12{,}7\cos(\omega t + \phi_1)$
$+ 2{,}5\cos(2\omega t + \phi_2)$
$+ 1{,}1\cos(3\omega t + \phi_3)$
$+ 0{,}6\cos(4\omega t + \phi_4)$

(en volts)

3. On utilise le pont diviseur de tension :

$$u_s = \frac{Z_{eq}}{Z_L + Z_{eq}}\,u_e \quad \text{d'où} \quad H = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{jL\omega + \frac{R}{1+jRC\omega}}$$



$$= \frac{R}{R + jL\omega(1+jRC\omega)}$$

$$Z_{eq} = \frac{Z_R\,Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{R \cdot 1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{R}{1+jRC\omega}$$

$$= \frac{R}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$$

finalement, $\underline{H} = \dfrac{1}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L\omega}{R}}$ numériquement : $\underline{H} = \dfrac{1}{1 - 10^{-3}\omega^2 + j\cdot 10^{-2}\omega}$

c'est un filtre passe-bas du second ordre

4. $G = |\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega/R)^2}}$

$c'_1 = c_1 \cdot G(\omega) = 2\,V$

$c'_2 = c_2 \cdot G(2\omega) = 0{,}2\,V$

$c'_3 = c_3 \cdot G(3\omega) = 0{,}06\,V$

$c'_4 = c_4 \cdot G(4\omega) = 0{,}023\,V$

$\langle us \rangle = \langle ue \rangle$ puisque $G(0) = 1$

$us = 19{,}1 + 2\cos(\omega t + \phi'_1) + 0{,}2\cos(2\omega t + \phi'_2) + 0{,}06\cos(3\omega t + \phi'_3) + 0{,}023\cos(4\omega t + \phi'_4)$

en Volts

5. $Useff = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T us^2\,dt} = \langle us^2 \rangle$

Les valeurs moyennes des termes croisés sont nulles, donc il reste :
→ on peut le vérifier en détail ...

$$Useff^2 = \langle us \rangle^2 + c'^2_1 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t + \phi'_1) \rangle}_{1/2} + c'^2_2 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t + \phi'_2) \rangle}_{1/2} + c'^2_3 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t + \phi'_3) \rangle}_{1/2} + c'^2_4 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t + \phi'_4) \rangle}_{1/2}$$

Or, la valeur moyenne d'un $\cos^2$ sur une période (ou 2, ou 3 ...) vaut 1/2.

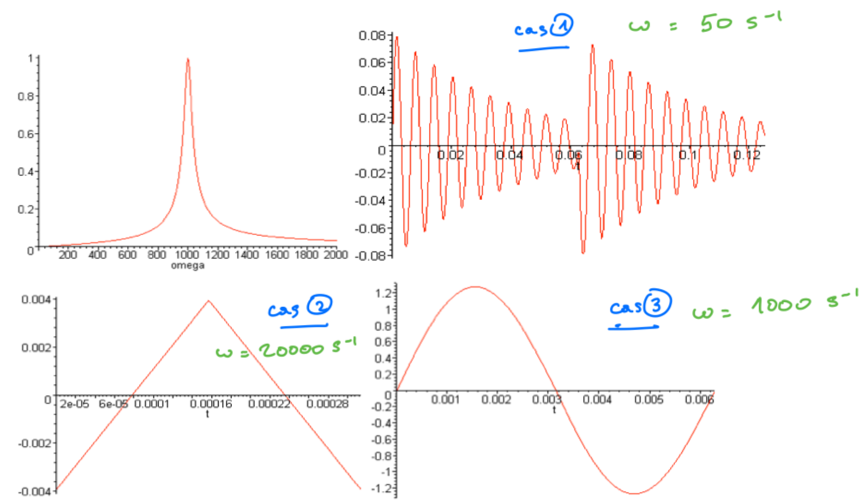
D'où $Useff = \sqrt{\langle us \rangle^2 + \frac{1}{2}\left(c'^2_1 + c'^2_2 + c'^2_3 + c'^2_4\right)}$

On trouve numériquement $Useff = 19{,}2\,V$ (l'essentiel de la contribution à Useff est due à $\langle us \rangle$).

Exercice 9

On s'intéresse à l'effet d'un filtre passe bande sur un signal en créneaux. La pulsation centrale du filtre est de $1000 s^{-1}$ et le facteur de qualité égal à 20. Un représentation de G en fonction de la fréquence est donnée ci-dessous. On donne également le signal de sortie obtenu pour des créneaux de pulsations 50, 1000 et 20000 s^{-1}.

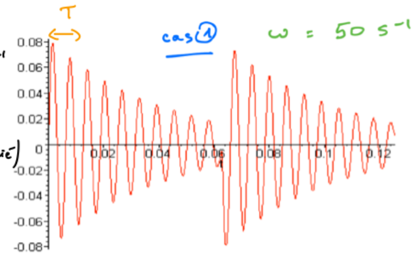
1. Donner l'expression de la fonction de transfert d'un filtre du second ordre en faisant apparaître Q et ω_0
2. Comparer les amplitudes des signaux obtenus dans les trois cas et interpréter
3. On s'intéresse au cas où la pulsation des créneaux est de 50 s^{-1}
   (a) Déterminer la pulsation du signal obtenu (la durée totale sur le graphe correspond à une période des créneaux) et interpréter
   (b) En considérant le filtre comme un circuit RLC série, interpréter en termes de régime transitoire
4. .On s'intéresse au cas où la pulsation des créneaux est de 1000 s^{-1}
   (a) Déterminer graphiquement le gain pour des pulsations de 900, 1000 et 1100 s^{-1}
   (b) Interpréter le signal obtenu
5. On s'intéresse au cas où la pulsation des créneaux est de 20000 s^{-1}
   (a) A partir de l'expression de la fonction de transfert, vérifier qu'un filtre passe-bande a, en haute fréquence (i.e pour $\omega >> \omega_0$) un comportement intégrateur (Vs est une primitive de Ve)
   (b) Interpréter le signal obtenu



1. $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jQ(x - 1/x)}$, $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

2. L'amplitude est nettement atténuée dans les cas ① et ② par rapport à ③ – On peut penser que l'amplitude dans ce dernier cas est voisine de celle de l'entrée, tandis que l'essentiel du signal est filtré dans les cas ① et ② (donc le signal, pour l'essentiel, n'est pas dans la bande passante).

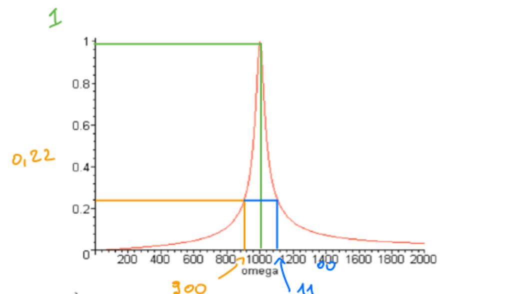
3. a. on relève une pseudo-période d'environ 0,0065 s (6,5 ms) soit une pulsation d'environ 1000 s^{-1} il s'agit de la pulsation propre du circuit RLC série (= pulsation "centrale" du filtre associé)



b. Le filtre est caractérisé par $\omega_0 = 1000\ s^{-1}$ et $Q = 20$, donc $T = 6,5$ ms (vu en a.) et $T = 40$ ms

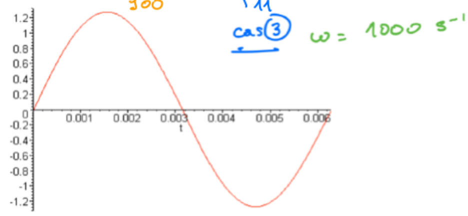
Or, la 1/2 période des créneaux vaut environ 126 ms, donc un régime transitoire de type "oscillations amorties" peut avoir lieu sur chaque 1/2 période des créneaux.

4. a. On relève $G(1000) = 1$ et $G(900) = G(1100) = 0,22$



b. Seul le fondamental passe, les harmoniques sont très atténués (le $n = 2$ est à 2000 s^{-1}, le gain est de l'ordre de 0,2).

On retrouve donc un signal sinusoïdal à une pulsation de 1000 s^{-1}, qui correspond au seul fondamental.



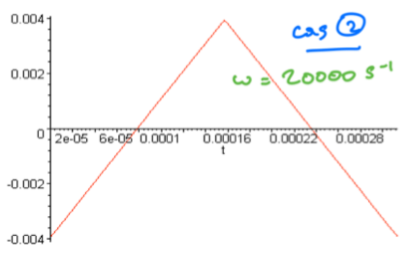
5. a. $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jQ(x - 1/x)}$

donc en HF ($x \gg 1$) :

$$\underline{H} \simeq \frac{H_0}{jQx} = \frac{H_0 \omega_0}{Q} \cdot \frac{1}{j\omega}$$

et donc $\underline{u_s} \simeq \dfrac{H_0 \omega_0}{Q} \cdot \dfrac{\underline{u_e}}{j\omega}$

Or, diviser une grandeur complexe par $j\omega$ revient à intégrer, on a donc bien le caractère intégrateur.



b. En intégrant des créneaux, on obtient bien des triangles. La périodicité (un peu plus de 0,3 ms) correspond bien aux 20 000 s^{-1} des créneaux.