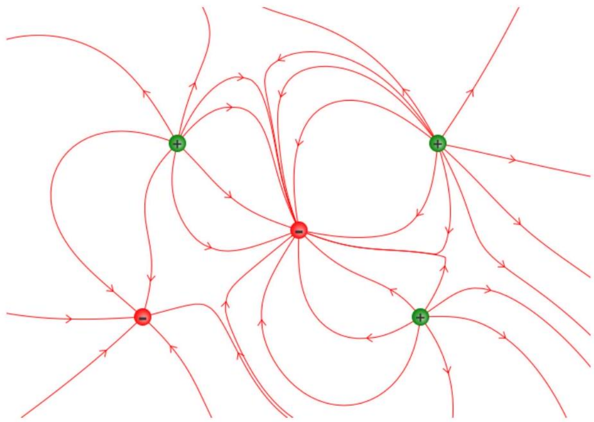
TD physique 5 Electrostatique

Exercice 1

Sur la carte de champ ci-dessous, deux des charges sont (en valeur absolue) trois fois plus grandes que les deux autres. Les identifier.



Exercice 2

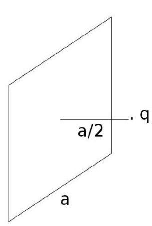
1) Donner un ordre de grandeur de la force électrique qui s'exercerait entre deux personnes se tenant à un mètre de distance l'une de l'autre si chacune, au lieu d'être parfaitement neutre électriquement, contenait un pour cent d'électrons de plus que de protons.

2) Dans une expérience célèbre, Millikan a pu maintenir immobiles de minuscules gouttelettes d'huile chargées grâce à un champ électrique (la force électrique compensant le poids). Sachant que le rayon des gouttelettes était de quelques dixièmes de micromètres, que la masse volumique de l'huile était voisine de celle de l'eau, et que chaque gouttelette ne comportait que quelques charges élémentaires en excès, de quel ordre était le champ électrique ?

3) Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron suit une trajectoire circulaire de rayon 53pm (dans l'état fondamental, les états excités correspondent à des rayons supérieurs). Calculer la valeur du champ électrique ressenti par l'électron.

Exercice 3

Calculer le flux du champ crée par une charge ponctuelle q à travers une surface carrée de coté a, la charge étant placée à une distance $a/2$ de son centre perpendiculairement à la surface.



Exercice 4

1. Donner l'expression du champ électrique créé par un «plan infini » uniformément chargé en surface (σ). Que vaut le champ en un point situé sur le plan des charges (z = 0) ?

2. Pour améliorer ce modèle, on considère que la charge est en fait uniformément répartie en volume (ρ) sur une petite épaisseur a. Quel est le lien entre ρ et σ ?

3. Calculer le champ électrique créé, en distinguant plusieurs cas.

4. Retrouve-t-on, à l'extérieur des charges, le même champ qu'avec la modélisation en surface ? Que vaut le champ en z = 0 ?

Exercice 5

Une sphère de rayon a et de centre O_1 uniformément chargé en volume possède une cavité non chargée de rayon b et de centre O_2(ρ n'est donc uniforme qu'à l'extérieur de la cavité). Calculer le champ dans la cavité.

Exercice 6

Comparer les champs de gravitation au niveau de la surface des différentes planètes du système solaire (on admettra leur symétrie sphérique).

planète	mercure	venus	terre	mars	jupiter	saturne	uranus	neptune
Rayon ($\times 10^6$ m)	2,44	6,05	6,37	3,39	69,9	58,2	25,4	24,6
Masse ($\times 10^{24}$ kg)	0,328	4,87	5,97	0,639	1899	568	86,8	102

Exercice 7

Une planète de rayon R, de masse M et de centre O est composée d'un noyau liquide de masse volumique μ_0 uniforme et de rayon R_1 et d'une coque solide de masse volumique $\mu = \alpha$ r où α est une constante positive.

1) Exprimer la masse de la planète en fonction de R, R_1, μ_0 et α.

2) Déterminer le champ de gravitation.

Exercice 8

Déterminer le champ créé par la distribution de charges en volume $\rho(\mathrm{r}) = \rho_0 \exp(-\mathrm{kr})$ de centre O (ρ_0 et k sont des constantes).

Exercice 9

Déterminer la distribution de charge nécessaire pour avoir un champ électrique radial d'intensité constante à l'intérieur d'une sphère de rayon R.

Exercice 10

Calculer le champ électrique créé par un cylindre infini de rayon a chargé uniformément en volume. Même question avec une charge uniformément répartie en surface.

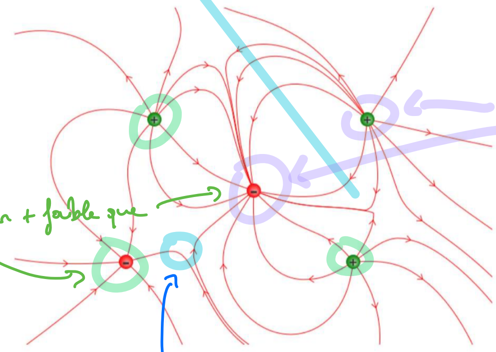
Exercice 1

Sur la carte de champ ci-dessous, deux des charges sont (en valeur absolue) trois fois plus grandes que les deux autres. Les identifier.

plan d'antisymétrie (à peu près ...)

charges les + faibles

charges les + élevées



même valeur (absolue)

valeur + faible que

en ce point, le champ est (à peu près) nul

=> la charge à droite (+ éloignée) est + grande

Exercice 2

1) Donner un ordre de grandeur de la force électrique qui s'exercerait entre deux personnes se tenant à un mètre de distance l'une de l'autre si chacune, au lieu d'être parfaitement neutre électriquement, contenait un pour cent d'électrons de plus que de protons.

2) Dans une expérience célèbre, Millikan a pu maintenir immobiles de minuscules gouttelettes d'huile chargées grâce à un champ électrique (la force électrique compensant le poids). Sachant que le rayon des gouttelettes était de quelques dixièmes de micromètres, que la masse volumique de l'huile était voisine de celle de l'eau, et que chaque gouttelette ne comportait que quelques charges élémentaires en excès, de quel ordre était le champ électrique ?

3) Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron suit une trajectoire circulaire de rayon 53pm (dans l'état fondamental, les états excités correspondent à des rayons supérieurs). Calculer la valeur du champ électrique ressenti par l'électron.

1. Nombre de protons approximatif dans un être humain : $N \sim \frac{1}{2} \frac{60}{1,7.10^{-27}} \sim 2.10^{28}$

masse humain (kg)

masse proton / neutron (kg)

grossièrement la moitié de protons (et la moitié de neutrons)

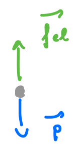
On a donc $\sim 2.10^{26}$ électrons supplémentaires, donc une charge (en valeur absolue) égale à $q = Ne$

Soit $q \sim 2.10^{7}$ C

force de Coulomb : $f = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ donc $f \sim \frac{(2.10^7)^2}{1^2} . 10^{10} \sim 5.10^{25}$ N

c'est plus que la force soleil → terre qui est de l'ordre de 4.10^{22} N

2.



$\vec{f_{el}} = q\vec{E}$, donc il y a 2 possibilités : $\uparrow \vec{E}$ et $q > 0$ ou $\downarrow \vec{E}$ et $q < 0$

$f_{el} = P$, donc $qE = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 g$ avec $q \sim e = 1,6.10^{-19}$ C

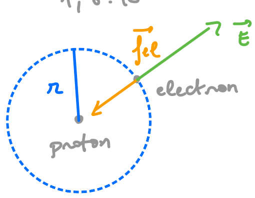
$\rho \sim 10^3$ kg.m^{-3}

$r \sim 10^{-7}$ m

$g \sim 10$ m.s^{-2}

donc $E \sim \frac{10^3 . 4 . (10^{-7})^3 . 10}{1,6.10^{-19}} \sim 300$ V/m

3.



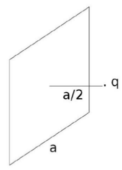
$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ donc $f_{el} \sim \frac{1,6.10^{-19} . 10^{10}}{(5.10^{-11})^2}$

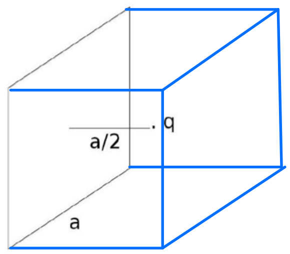
$\sim \frac{1,6.10^{-9}}{25.10^{-22}}$

$\sim 6.10^{11}$ V/m

Exercice 3

Calculer le flux du champ crée par une charge ponctuelle q à travers une surface carrée de coté a, la charge étant placée à une distance $a/2$ de son centre perpendiculairement à la surface.





On complète le cube de manière à ce que q en soit le centre. Alors, par raisons de symétries, le flux est le même au travers de toutes les faces du cube, donc $\phi(\text{face}) = \frac{1}{6}\,\phi(\text{cube})$

Mais le cube est une surface fermée, donc avec le th de Gauss : $\phi(\text{cube}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$

finalement, $\phi(\text{face}) = \frac{q}{6\varepsilon_0}$

Exercice 4

1. Donner l'expression du champ électrique créé par un «plan infini » uniformément chargé en surface (σ). Que vaut le champ en un point situé sur le plan des charges (z = 0) ?

2. Pour améliorer ce modèle, on considère que la charge est en fait uniformément répartie en volume (ρ) sur une petite épaisseur a. Quel est le lien entre ρ et σ ?

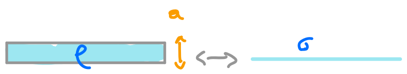
3. Calculer le champ électrique créé, en distinguant plusieurs cas.

4. Retrouve-t-on, à l'extérieur des charges, le même champ qu'avec la modélisation en surface ? Que vaut le champ en z = 0 ?

1. voir cours.

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{u_z} & \text{si } z > 0 \\ \vec{E} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{u_z} & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

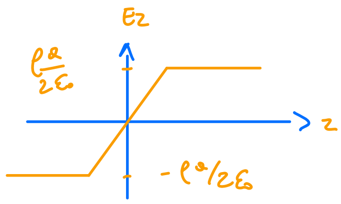
en $z = 0$, le champ n'est pas défini (mais on peut raisonnablement prendre $\vec{E} = \vec{0}$, ce que confirme la suite)

2. 

$\sigma = \rho a$ (voir cours)

3. Les symétries et invariances, ainsi que le choix de la surface de gauss (cylindre ou pavé, symétrique par rapport au plan des charges) sont exactement les mêmes que pour le plan de charges infini.

$$\begin{cases} z < -a/2 : & E_z = -\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0} \\ z \geq a/2 : & E_z = + \text{——} \\ |z| \leq a/2 : & E_z = \dfrac{\rho z}{2\varepsilon_0} \end{cases}$$

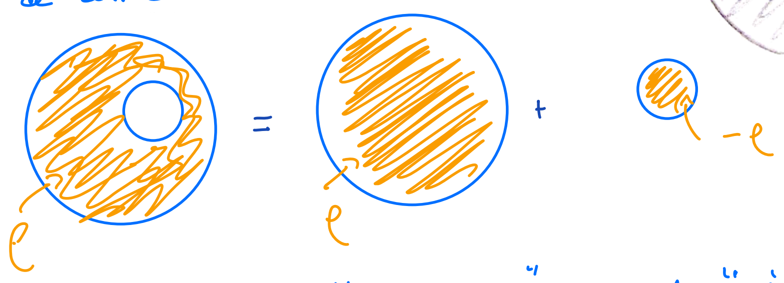


4. oui, via $\sigma = \rho a$. Le champ est nul en $z = 0$.

Exercice 5

Une sphère de rayon a et de centre O_1 uniformément chargé en volume possède une cavité non chargée de rayon b et de centre O_2(ρ n'est donc uniforme qu'à l'extérieur de la cavité). Calculer le champ dans la cavité.

On s'appuie sur le principe de superposition, en considérant la distribution de charges proposée comme la sphère de centre O_1 chargée $+\rho$ et celle de centre O_2 chargée $-\rho$.



A l'intérieur de la "petite sphère", on est "à l'intérieur" pour les deux distributions. $\vec{E}(M) = \rho\dfrac{\overrightarrow{O_1M}}{3\varepsilon_0} + (-\rho)\dfrac{\overrightarrow{O_2M}}{3\varepsilon_0} = \rho\dfrac{\overrightarrow{O_1O_2}}{3\varepsilon_0}$ (uniforme)

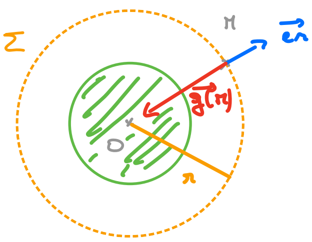
Exercice 6

Comparer les champs de gravitation au niveau de la surface des différentes planètes du système solaire (on admettra leur symétrie sphérique).

planète	mercure	venus	terre	mars	jupiter	saturne	uranus	neptune
Rayon ($\times 10^6$ m)	2,44	6,05	6,37	3,39	69,9	58,2	25,4	24,6
Masse ($\times 10^{24}$ kg)	0,328	4,87	5,97	0,639	1899	568	86,8	102

Le champ $\vec{g}$ créé à l'extérieur d'une distribution de masses à symétrie sphérique vaut $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e_r}$ donc $g = \frac{GM}{r^2}$.

En effet : $\vec{g}(r) = g_r(r)\,\vec{e_r}$ (symétries et invariances pour la symétrie sphérique) et on choisit comme surface de gauss une sphère de rayon r ($r \geq R$, où R est le rayon de la planète).



$$\Phi(\vec{g}/\Sigma) = \oiint_\Sigma (g_r(r)\,\vec{e_r})\cdot(dS\,\vec{e_r}) = 4\pi r^2 g_r(r)$$

$M_{int} = M$ (masse de la planète)

th de gauss : $\Phi(\vec{g}/\Sigma) = -4\pi G M_{int}$

donc $4\pi r^2 g_r(r) = -4\pi G M$, soit $g_r(r) = -\frac{GM}{r^2}$ et donc $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e_r}$

On trouve, en $m.s^{-2}$ (ou $N.kg^{-1}$ ...) les valeurs ci-dessous :

3,67	8,87	9,81	3,71	25,8	11,2	8,97	11,2
mercure	venus	terre	mars	jupiter	saturne	neptune	uranus

Exercice 7

Une planète de rayon R, de masse M et de centre O est composée d'un noyau liquide de masse volumique μ_0 uniforme et de rayon R_1 et d'une coque solide de masse volumique $\mu = \alpha$ r où α est une constante positive.

1) Exprimer la masse de la planète en fonction de R, R_1, μ_0 et α.

2) Déterminer le champ de gravitation.

1. $M = \underbrace{M_1}_{\text{noyau}} + \underbrace{M_2}_{\text{coque}}$ avec $M_1 = \mu_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3$ et $M_2 = 4\pi \int_{R_1}^{R} \underbrace{\mu(r)}_{\alpha r} r^2 \, dr$

Soit $M_2 = 4\pi\alpha \int_{R_1}^{R} r^3 \, dr = \frac{\cancel{4}\pi\alpha}{\cancel{4}}\left(R^4 - R_1^3\right)$

2. Symétrie sphérique $\Rightarrow \vec{g}(M) = g_r(r)\,\vec{e_r}$

sphère (O, r)

$\phi(\vec{g}/\Sigma) = 4\pi r^2 g_r(r)$

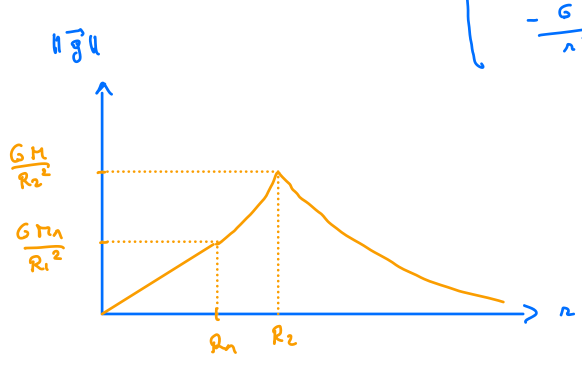
Th de gauss : $\phi(\vec{g}/\Sigma) = -4\pi G M_{int}$

$\Rightarrow g_r(r) = -\frac{G M_{int}}{r^2}$

avec $M_{int} = \begin{cases} r \leq R_1 : & M_{int} = \mu_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \\ R_1 \leq r \leq R : & M_{int} = M_1 + \pi\alpha\left(r^4 - R_1^4\right) \\ r \geq R : & M_{int} = M \end{cases}$

On obtient donc :

$$\vec{g}(M) = \begin{cases} -\frac{4\pi G \mu_0 r}{3}\,\vec{e_r} & \text{si } r \leq R_1 \\ -\frac{G}{r^2}\left(M_1 + \pi\alpha\left(r^4 - R_1^4\right)\right)\vec{e_r} & \text{si } R_1 \leq r \leq R_2 \\ -\frac{GM}{r^2}\,\vec{e_r} & \text{si } r \geq R_2 \end{cases}$$



Exercice 8

Déterminer le champ créé par la distribution de charges en volume $\rho(\mathrm{r}) = \rho_0 \exp(-\mathrm{kr})$ de centre O (ρ_0 et k sont des constantes).

symétrie sphérique $\Rightarrow \vec{E}(r) = E_r(r)\,\vec{u_r}$.

th gauss : $4\pi r^2 E(r) = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

et $Q_{int} = 4\pi \displaystyle\int_0^r \rho_0\, e^{-kr}\, r^2\, dr = \frac{4\pi \rho_0}{k^3}\left(2 - e^{-kr}\left(k^2r^2 + 2kr + 2\right)\right)$

d'où le champ...

détail :

$$\int_0^r \overset{g}{r^2}\,\overset{f'}{e^{-kr}}\,dr = \underbrace{\left[r^2\frac{e^{-kr}}{-k}\right]_0^r}_{-\frac{r^2e^{-kr}}{k}} + \frac{2}{k}\underbrace{\int_0^r \overset{g}{r}\,\overset{f'}{e^{-kr}}\,dr}_{\underbrace{\left[\frac{r\,e^{-kr}}{-k}\right]_0^r}_{-\frac{r\,e^{-kr}}{k}} + \frac{1}{k}\underbrace{\int_0^r e^{-kr}\,dr}_{\left[\frac{e^{-kr}}{-k}\right]_0^r = \frac{1}{k} - \frac{e^{-kr}}{k}}}$$

$$= \frac{-r^2e^{-kr}}{k} + \frac{2}{k}\left(\frac{-r\,e^{-kr}}{k} + \frac{1}{k}\left(\frac{1-e^{-kr}}{k}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{k^3}\left(-k^2r^2e^{-kr} - 2kr\,e^{-kr} - 2e^{-kr} + 2\right)$$

$$= \frac{1}{k^3}\left(2 - e^{-kr}\left(k^2r^2 + 2kr + 2\right)\right)$$

Exercice 9

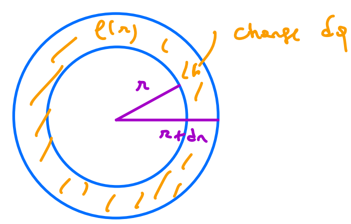
Déterminer la distribution de charge nécessaire pour avoir un champ électrique radial d'intensité constante à l'intérieur d'une sphère de rayon R.

Un champ radial (et dont la norme est indépendante de la direction) est associé à une symétrie sphérique. Donc la distribution de charges doit déjà être à symétrie sphérique.

On peut noter $\vec{E}(r) = E_0 \vec{e_r}$ (pour $r \leq R$).

Le th de Gauss donne $Q_{int}(r) = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E_0$: charge contenue à l'intérieur d'une sphère de rayon r.

On considère ensuite la charge dq contenue dans une coquille sphérique entre r et $r+dr$:



$$dq = Q_{int}(r+dr) - Q_{int}(r)$$

et, en notant $\rho(r)$ la densité de charge entre r et $r+dr$ (que l'on peut considérer comme uniforme entre r et $r+dr$) :

$$dq = \rho(r) \cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{volume de la coquille sphérique}}$$

On a donc $Q_{int}(r+dr) - Q_{int}(r) = \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$

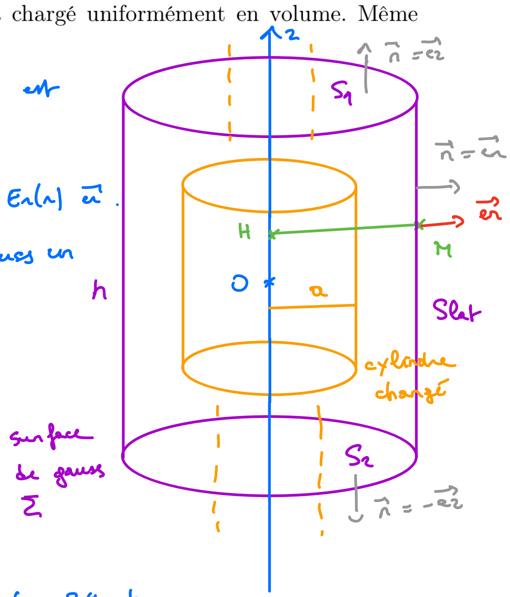
soit $\rho(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \dfrac{Q_{int}(r+dr) - Q_{int}(r)}{dr}$

$= \dfrac{dQ_{int}}{dr}$

Or, $\dfrac{dQ_{int}}{dr} = 8\pi\varepsilon_0 r E_0$, donc $\rho(r) = \dfrac{8\pi\varepsilon_0 r E_0}{4\pi r^2}$ et donc $\boxed{\rho(r) = \dfrac{2\varepsilon_0 E_0}{r}}$

Exercice 10

Calculer le champ électrique créé par un cylindre infini de rayon a chargé uniformément en volume. Même question avec une charge uniformément répartie en surface.



On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) où (Oz) est l'axe de symétrie du cylindre.

L'étude des symétries et invariances donne $\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{e_r}$.

Dans tous les cas, on prend comme surface de gauss un cylindre de rayon r ($r = HM$) et de hauteur h.

$$\phi(\vec{E}/\Sigma) = \underbrace{\underbrace{\phi(\vec{E}/S_1)}_{=0} + \underbrace{\phi(\vec{E}/S_2)}_{=0}}_{\vec{E} \perp \vec{n} = +/- \vec{e_z}} + \phi(\vec{E}/S_{lat})$$

$$\phi(\vec{E}/S_{lat}) = \iint_{S_{lat}} (E_r(r)\,\vec{e_r})\cdot(dS\,\vec{e_r}) = E_r(r) \cdot \iint_{S_{lat}} dS = E_r(r) \cdot 2\pi r h$$

donc $\phi(\vec{E}/\Sigma) = 2\pi r h\, E_r(r)$

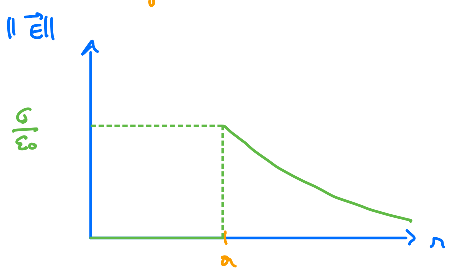
$r \quad \varepsilon = \frac{a\,\sigma}{\varepsilon_0}$

- cylindre chargé en surface :
  charge / u de surface σ

- si $r < a$ alors $Q_{int} = 0$
- si $r > a$ alors $Q_{int} = 2\pi a h \sigma$

On en déduit :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < a \\ \dfrac{a\sigma}{\varepsilon_0 r}\,\vec{e_r} & \text{si } r > a \end{cases}$$



$2 \quad \varepsilon = \frac{r\,\rho}{\varepsilon_0}$

- cylindre chargé en volume :
  charge / u de volume ρ

- si $r \leq a$ alors $Q_{int} = \pi r^2 h \rho$
- si $r > a$ alors $Q_{int} = \pi a^2 h \rho$

On en déduit :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\,\vec{e_r} & \text{si } r \geq a \\ \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\,\vec{e_r} & \text{si } r > a \end{cases}$$