TD physique 6 Electrostatique

Exercice 1

1) Dans la molécule de fluorure d'hydrogène la longueur de liaison vaut 92pm. Si le transfert d'électron de l'hydrogène vers le fluor était total, que vaudrait le moment dipolaire de cette molécule ?

2) La rigidité diélectrique d'un isolant désigne la valeur de champ électrique nécessaire pour provoquer une décharge électrique (ce qui, dans l'air, se manifeste par une étincelle). Pour l'air sec, cette valeur est d'environ $3,6$kV/mm (et peut descendre jusqu'à environ 1kV/mm selon l'humidité). Quelle différence de potentiel est nécessaire pour provoquer une étincelle dans l'air sec entre deux électrodes distantes de 10 cm ? (il s'agit d'un ordre de grandeur, on raisonnera comme si le champ était uniforme entre les deux électrodes).

Exercice 2

1) Calculer la valeur du champ électrique dans un condensateur plan d'épaisseur (distance entre les armatures) 1 mm lorsqu'il est chargé sous une tension de 10 V, dans l'approximation d'un champ uniforme à l'intérieur du condensateur.

2) Le condensateur précédent a, par ailleurs, 10 cm de coté (les armatures sont des surfaces carrées de coté 1 cm) et l'isolant entre les armatures est le vide. Calculer sa capacité, la charge portée par les armatures et l'énergie stockée, toujours pour une tension entre les armatures de 10 V.

3) On peut considérer que l'énergie emmagasinée sans un condensateur plan est uniformément répartie dans tout son volume. Vérifier, en négligeant comme précédemment les effets de bord, que l'énergie par unité de volume dans le condensateur est égale à $\varepsilon_0 \mathrm{E}^2/2$.

Exercice 3

Calculer le champ électrique créé à grande distance par un dipôle électrique (modélisé par deux charges $-q$ et $+q$ séparées par une distance a) sans passer par le potentiel.

Exercice 4

Si l'on porte un conducteur à un certain potentiel, les charges en excès se répartissent uniformément sur sa surface. Le but de cet exercice est de montrer que, pour un potentiel donné, le champ au voisinage d'un conducteur chargé est d'autant plus intense que le rayon de courbure de la surface est petit. Pour aborder ceci, on considère deux sphères conductrices de rayons différents et on cherche à montrer que le champ est plus intense au voisinage de la petite sphère.

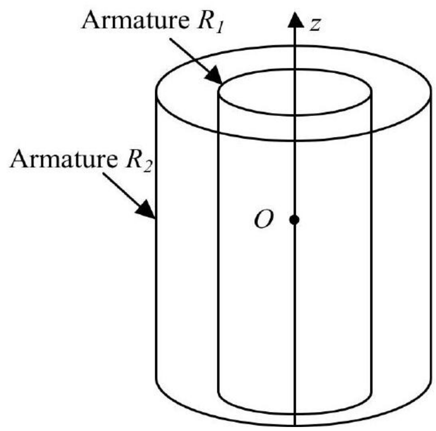
1. Comment peut-on faire, concrètement, pour charger un conducteur ?
2. Quelle est la relation entre la charge totale portée par une sphère de rayon R et la charge surfacique ?
3. Calculer le champ électrique créé à l'extérieur de la sphère.
4. En déduire le potentiel à l'extérieur de la sphère (en considérant qu'il est nul à l'infini).
5. En déduire la valeur du champ au voisinage de la sphère en fonction du potentiel auquel est portée la sphère et conclure.

Ceci explique pourquoi la foudre tombe préférentiellement sur des choses pointues : globalement, la surface de la terre (avec toutes les déformations qu'elle comporte, comme une construction ou une personne) est partout au même potentiel, le champ électrique est donc plus intense au voisinage des objets pointus (car cela correspond, localement, à un plus petit rayon de courbure). Un champ électrique intense provoque une ionisation de l'air, ce qui créé un « chemin conducteur » propice à une décharge électrique qu'est la foudre.

Exercice 5

On s'intéresse à un condensateur cylindrique constitué de deux armatures cylindriques coaxiales de hauteur h et de rayons R_1 et R_2. On néglige les effets de bord, ce qui revient à considérer que le champ est le même que si la hauteur des cylindres était infinie.

Calculer le champ puis la différence de potentiel entre les armatures et en déduire la capacité de ce condensateur.



Exercice 6

Calculer la capacité d'un condensateur constitué de deux armatures sphériques de rayons R_1 et R_2 (on considère qu'il y a le vide entre les deux armatures).

Exercice 7

Une distribution de charges à symétrie sphérique créé, à une distance r, un potentiel de la forme :
$V(r) = (1/4\pi\varepsilon_0)\,(q/r)\exp(-r/a)$.
1. Calculer le champ électrique correspondant.
2. Calculer la charge contenue dans une sphère de centre O et de rayon r. Cas où $r \to 0$ et où $r \to \infty$.
3. En déduire la charge volumique de cette distribution.

Exercice 8

Dans le modèle de Thomson, l'atome d'hydrogène est modélisé par une charge $+e$ répartie uniformément dans une sphère de rayon a_0, et une charge $-e$ ponctuelle.

1. Calculer la charge volumique associée au noyau et le champ créé.

2. On écarte l'électron d'une distance r (avec $r < a_0$) du centre. A quelle force est-il soumis ? Calculer sa valeur pour $r = a_0$.

3. L'atome étant placé dans un champ électrique extérieur uniforme $\vec{E_0}$, montrer qu'il existe une valeur limite pour ce champ en deçà de laquelle la position d'équilibre de l'électron est caractérisée par une distance r_0.

4. Calculer le moment dipolaire de l'atome qui en résulte. On définit la polarisabilité α de l'atome par $\vec{p} = \alpha\vec{E_0}$. Quelle est la dimension de α ? Calculer sa valeur numérique.

Exercice 9

On considère une répartition de charges équivalente à celle d'une molécule de CO_2 : Un charge $+2q$ en un point O et deux charges $-q$ en A et B, les points O, A et B étant alignés et les distances OA et OB étant égales à une valeur notée a. Calculer le camp créé à « grande distance ", c'est à dire à une distance r de O très supérieure à a.

Exercice 10

On constate expérimentalement qu'un filet d'eau qui coule d'un robinet et qui passe à proximité d'une règle en plexiglass chargée est systématiquement dévié vers la règle, et ce que la règle soit chargée positivement ou négativement. Interpréter ce phénomène, sachant qu'une molécule d'eau possède un moment dipolaire.

Exercice 1

1) Dans la molécule de fluorure d'hydrogène la longueur de liaison vaut 92pm. Si le transfert d'électron de l'hydrogène vers le fluor était total, que vaudrait le moment dipolaire de cette molécule ?

2) La rigidité diélectrique d'un isolant désigne la valeur de champ électrique nécessaire pour provoquer une décharge électrique (ce qui, dans l'air, se manifeste par une étincelle). Pour l'air sec, cette valeur est d'environ $3,6$kV/mm (et peut descendre jusqu'à environ 1kV/mm selon l'humidité). Quelle différence de potentiel est nécessaire pour provoquer une étincelle dans l'air sec entre deux électrodes distantes de 10 cm ? (il s'agit d'un ordre de grandeur, on raisonnera comme si le champ était uniforme entre les deux électrodes).

1. $p = aq$ A.N : $p = 92.10^{-12} \times 1,6.10^{-19} = 1,47.10^{-29}$ C.m

2. Approximation (on néglige les effets de bord, ou autrement dit on calcule le champ comme avec des plans chargés infinis) : $E = \frac{u}{d}$, donc $u = dE$

A.N : $u = 0,1 \times 3,6.10^{6} = 3,6.10^{5}$ V (360 kV)

Exercice 2

1) Calculer la valeur du champ électrique dans un condensateur plan d'épaisseur (distance entre les armatures) 1 mm lorsqu'il est chargé sous une tension de 10 V, dans l'approximation d'un champ uniforme à l'intérieur du condensateur.

2) Le condensateur précédent a, par ailleurs, 10 cm de coté (les armatures sont des surfaces carrées de coté 1 cm) et l'isolant entre les armatures est le vide. Calculer sa capacité, la charge portée par les armatures et l'énergie stockée, toujours pour une tension entre les armatures de 10 V.

3) On peut considérer que l'énergie emmagasinée sans un condensateur plan est uniformément répartie dans tout son volume. Vérifier, en négligeant comme précédemment les effets de bord, que l'énergie par unité de volume dans le condensateur est égale à $\varepsilon_0 E^2/2$.

1. $E = \frac{u}{d}$ A.N : $E = 10\ kV.m^{-1}$

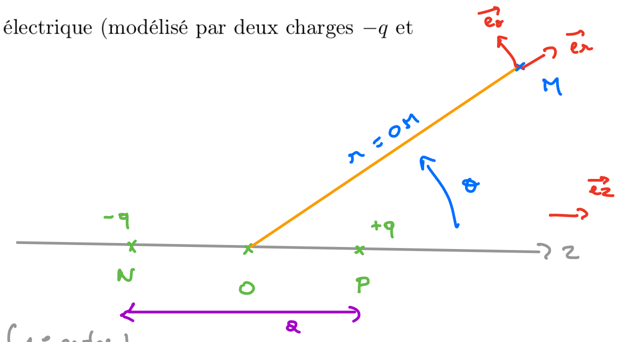
2. $C = \frac{\varepsilon_0 S}{\ell}$ A.N : $C = 88\ pF$ $q = Cu$ A.N : $q = 0{,}88\ nC$

$E_{stockée} = \frac{1}{2} Cu^2$ A.N : $E_{stockee} = 4{,}4\ nJ$

3. $w = \frac{E_{stockée}}{Volume} = \frac{1/2\ Cu^2}{Volume} = \frac{1/2\ \varepsilon_0 S/\ell\ (\ell E)^2}{S \ell} = \frac{\varepsilon_0 \cancel{S} \cancel{\ell^2} E^2}{2 \cancel{S} \cancel{\ell^2}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

Exercice 3

Calculer le champ électrique créé à grande distance par un dipôle électrique (modélisé par deux charges $-q$ et $+q$ séparées par une distance a) sans passer par le potentiel.



$$\vec{E} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{NM}}{NM^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

Or, $\vec{NM} = {}^{a}/_{2}\,\vec{e_z} + r\,\vec{e_r}$

donc $NM^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + a r \cos\theta \simeq r^2 + a r \cos\theta$ (1er ordre)

$$\simeq r^2\left(1 + \frac{a\cos\theta}{r}\right)$$

DL ordre 1

d'où $$\frac{1}{NM^3} = \left(NM^2\right)^{-3/2} = \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{a\cos\theta}{r}\right)^{-3/2} \simeq \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3a\cos\theta}{2r}\right)$$

ainsi, $$\frac{\vec{NM}}{NM^3} \simeq \left(\frac{a}{2}\vec{e_z} + r\vec{e_r}\right)\cdot\frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3a\cos\theta}{2r}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{r^3}\left(\frac{a}{2}\vec{e_z} + r\vec{e_r} - \underbrace{\frac{3a^2\cos\theta}{4r}\vec{e_z}}_{\text{terme négligeable par rapport aux autres (2° ordre en } \frac{a}{r})} - \frac{3a\cos\theta}{2}\vec{e_r}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{r^3}\left(r\vec{e_r} + \frac{a}{2}\vec{e_z} - \frac{3a\cos\theta}{2}\vec{e_r}\right)$$

de la même manière (à vous de vérifier !) on trouve $\frac{\vec{PM}}{PM^3} \simeq \frac{1}{r^3}\left(r\vec{e_r} - \frac{a}{2}\vec{e_z} + \frac{3a\cos\theta}{2}\vec{e_r}\right)$

On a donc $$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(r\vec{e_r} + \frac{a}{2}\vec{e_z} - \frac{3a\cos\theta}{2}\vec{e_r}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(r\vec{e_r} - \frac{a}{2}\vec{e_z} + \frac{3a\cos\theta}{2}\vec{e_r}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(-a\vec{e_z} + 3a\cos\theta\,\vec{e_r}\right)$$

$$= \frac{\overbrace{aq}^{=p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos\theta\,\vec{e_r} - \vec{e_z}\right)$$

finalement, $\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos\theta\,\vec{e_r} - \vec{e_z}\right)$, on peut le réécrire

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\left(3\vec{p}\cdot\vec{e_r}\right)\vec{e_r} - \vec{p}\right)$ ou retrouver la forme du cours sur la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$

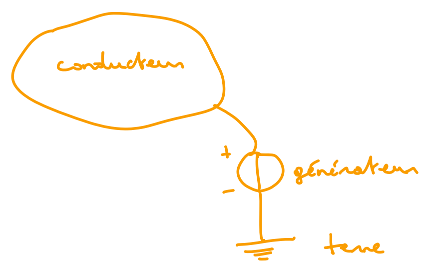
Exercice 4

Si l'on porte un conducteur à un certain potentiel, les charges en excès se répartissent uniformément sur sa surface. Le but de cet exercice est de montrer que, pour un potentiel donné, le champ au voisinage d'un conducteur chargé est d'autant plus intense que le rayon de courbure de la surface est petit. Pour aborder ceci, on considère deux sphères conductrices de rayons différents et on cherche à montrer que le champ est plus intense au voisinage de la petite sphère.

1. Comment peut-on faire, concrètement, pour charger un conducteur ?
2. Quelle est la relation entre la charge totale portée par une sphère de rayon R et la charge surfacique ?
3. Calculer le champ électrique créé à l'extérieur de la sphère.
4. En déduire le potentiel à l'extérieur de la sphère (en considérant qu'il est nul à l'infini).
5. En déduire la valeur du champ au voisinage de la sphère en fonction du potentiel auquel est portée la sphère et conclure.

Ceci explique pourquoi la foudre tombe préférentiellement sur des choses pointues : globalement, la surface de la terre (avec toutes les déformations qu'elle comporte, comme une construction ou une personne) est partout au même potentiel, le champ électrique est donc plus intense au voisinage des objets pointus (car cela correspond, localement, à un plus petit rayon de courbure). Un champ électrique intense provoque une ionisation de l'air, ce qui créé un « chemin conducteur » propice à une décharge électrique qu'est la foudre.

1.

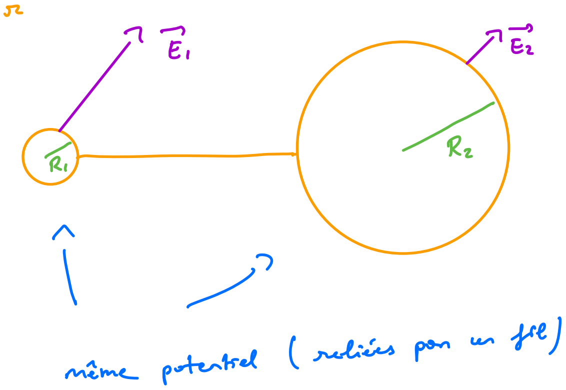


2. $q = 4\pi R^2 \sigma$

3. $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (q = charge sur la surface de la sphère)

4. $V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

5. $E = \dfrac{V}{r}$. Au niveau de la surface : $r = R$, donc $E = \dfrac{V}{R}$



$E_1 R_1 = E_2 R_2$

donc $R_2 > R_1$

$\Rightarrow E_1 > E_2$

champ + intense au voisinage de la petite sphère

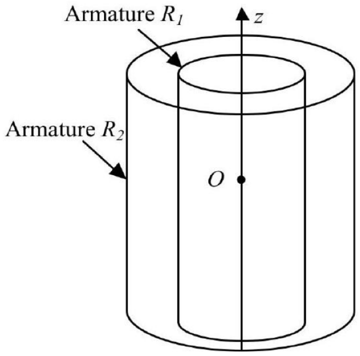
$\Rightarrow$ « pouvoir des pointes »

(paratonnerres, etc ...)

Exercice 5

On s'intéresse à un condensateur cylindrique constitué de deux armatures cylindriques coaxiales de hauteur h et de rayons R_1 et R_2. On néglige les effets de bord, ce qui revient à considérer que le champ est le même que si la hauteur des cylindres était infinie.

Calculer le champ puis la différence de potentiel entre les armatures et en déduire la capacité de ce condensateur.



géométrie cylindrique

$\Rightarrow \quad \vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{e_r}$

$\phi(\vec{E}/\Sigma) = 2\pi r h\, E_r(r)$

cylindre (Oz, r, h)

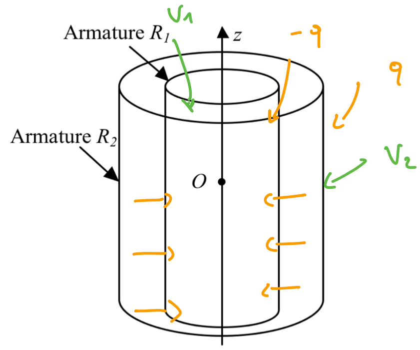
$Q_{int} =$
- $r < R_1$: 0
- $R_1 < r < R_2$: $-q$
- $r > R_2$: 0

donc :

$r < R_1$: $\vec{E}(M) = \vec{0}$

$R_1 < r < R_2$: $\vec{E}(M) = \dfrac{-q}{2\pi\varepsilon_0 r h}\,\vec{e_r}$

$r > R_2$: $\vec{E}(M) = \vec{0}$.



$r < R_1$: $\vec{E}(M) = \vec{0}$

$R_1 < r < R_2$: $\vec{E}(M) = \dfrac{-q}{2\pi\varepsilon_0 r h}\,\vec{e_r}$

$r > R_2$: $\vec{E}(M) = \vec{0}$.

entre les armatures :

$dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl} = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r h}\,dr$

$\Rightarrow V = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln(r) + c^{ste}$

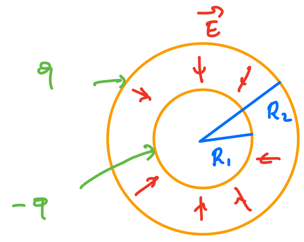
donc $V_2 - V_1 = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$

et $V_2 - V_1 = \dfrac{q}{C}$

donc $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}$

Exercice 6

Calculer la capacité d'un condensateur constitué de deux armatures sphériques de rayons R_1 et R_2 (on considère qu'il y a le vide entre les deux armatures).



sym. sphérique : $\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e_r}$

gauss : $E_r(r) = \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$

$\Rightarrow \quad V = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{r} + c^{ste}$

$\Rightarrow \quad V_2 - V_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\;\dfrac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$

d'où $\quad C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

Exercice 7

Une distribution de charges à symétrie sphérique créé, à une distance r, un potentiel de la forme :
V(r) = (1/4πε₀) (q/r) exp(−r/a).
1. Calculer le champ électrique correspondant.
2. Calculer la charge contenue dans une sphère de centre O et de rayon r. Cas où r → 0 et où r → ∞.
3. En déduire la charge volumique de cette distribution.

1. $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\frac{dV}{dr}\vec{e_r}$ (V ne dépend ni de θ ni de φ)

d'où $\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r^2}e^{-r/a} + \frac{1}{r}\left(-1/a\right)e^{-r/a}\right)\vec{e_r}$

soit $\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}e^{-r/a}\left(1+\frac{r}{a}\right)\vec{e_r}}$

2. On utilise le th de Gauss :

$\phi(\vec{E}/S) = \frac{Q_{int}(r)}{\varepsilon_0}$ et $\phi(\vec{E}/S) = \iint_{\text{sphère}} (E\,\vec{e_r}).(dS\,\vec{e_r}) = 4\pi r^2 E$

sphère de rayon r

D'où $4\pi r^2 E = \frac{Q_{int}(r)}{\varepsilon_0}$

et donc $Q_{int}(r) = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E = \cancel{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{q}{\cancel{4\pi\varepsilon_0 r^2}}e^{-r/a}\left(1+\frac{r}{a}\right)$

finalement $\boxed{Q_{int}(r) = q\,e^{-r/a}\left(1+\frac{r}{a}\right)}$

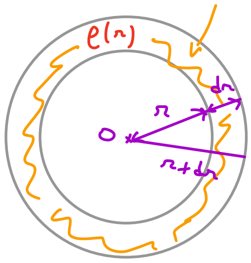
$r \to 0$: $Q_{int} \to q$
$r \to \infty$: $Q_{int} \to 0$

charge q au centre et charge −q répartie dans tout l'espace.

3. On peut raisonner sur une "coquille sphérique" (petite épaisseur dr comprise entre des sphères de rayons r et r + dr) :

$dQ = \rho(r)\,dV = \rho(r).4\pi r^2\,dr$

à l'échelle de la coquille sphérique, $\rho(r)$ est uniforme ...



volume $dV = 4\pi r^2\,dr$ de la coquille sphérique

et aussi $dQ = Q_{int}(r+dr) - Q_{int}(r)$

d'où $\rho(r).4\pi r^2\,dr = Q_{int}(r+dr) - Q_{int}(r)$

et donc $\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{Q_{int}(r+dr) - Q_{int}(r)}{dr}$ $= \frac{dQ_{int}}{dr}$

d'où $\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dQ_{int}}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2}q\,e^{-r/a}\left(-\frac{1}{a}\left(1+r/a\right)+\frac{1}{a}\right)$

$= \frac{q}{4\pi r^2}e^{-r/a}\left(-\cancel{\frac{1}{a}}-\frac{r}{a^2}+\cancel{\frac{1}{a}}\right)$ soit $\boxed{\rho(r) = \frac{-q}{4\pi r a^2}e^{-r/a}}$

Exercice 8

Dans le modèle de Thomson, l'atome d'hydrogène est modélisé par une charge $+e$ répartie uniformément dans une sphère de rayon a_0, et une charge $-e$ ponctuelle.

1. Calculer la charge volumique associée au noyau et le champ créé.

2. On écarte l'électron d'une distance r (avec $r < a_0$) du centre. A quelle force est-il soumis ? Calculer sa valeur pour $r = a_0$.

3. L'atome étant placé dans un champ électrique extérieur uniforme $\vec{E_0}$, montrer qu'il existe une valeur limite pour ce champ en deçà de laquelle la position d'équilibre de l'électron est caractérisée par une distance r_0.

4. Calculer le moment dipolaire de l'atome qui en résulte. On définit la polarisabilité α de l'atome par $\vec{p} = \alpha\vec{E_0}$. Quelle est la dimension de α ? Calculer sa valeur numérique.

1. $\rho = \dfrac{e}{4/3\,\pi a_0^3}$

champ créé par une sphère uniformément chargée en volume :

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r} & \text{si } r \leq a_0 \\[2mm] \vec{E} = \dfrac{Q_{tot}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r} & \text{si } r \geq a_0 \end{cases}$$

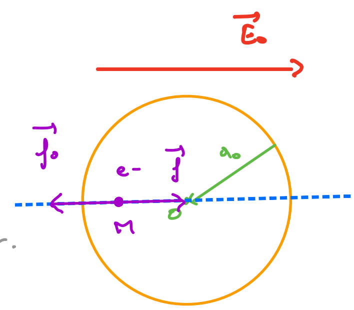
2. $\vec{f} = -e\vec{E}$ avec $\vec{E} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r}$ donc $\vec{f} = -\dfrac{e\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r}$

On peut remplacer ρ : $\dfrac{e\rho r}{3\varepsilon_0} = \dfrac{e r}{3\varepsilon_0}\cdot\dfrac{e}{4/3\,\pi a_0^3} = \dfrac{e^2 r}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}$

et donc $\vec{f} = -\dfrac{e^2 r}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}\vec{e_r}$

cette force agit comme un rappel élastique ...

Pour $r = a_0$, on obtient $\vec{f}(r=a_0) = \dfrac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2}\vec{e_r}$



3. Equilibre si $\vec{f_0} = -e\vec{E_0}$ (due au champ extérieur) et $\vec{f}$ (due à la charge positive de l'atome) se compensent.

Soit $\vec{f_0} + \vec{f} = \vec{0}$, et donc $-\cancel{e}\vec{E_0} = -\left(-\dfrac{e^{\cancel{2}} r}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}\vec{e_r}\right)$

d'où $\vec{OM} = r\vec{e_r} = -\dfrac{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}{e}\vec{E_0}$

Soit $\boxed{r_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 a_0^3 E_0}{e}}$

Mais cela n'est possible que si E_0 ne dépasse pas E_{0max} caractérisé par $eE_{0max} = f(r=a_0) = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2}$ (la force exercée par l'atome est max pour $r=a_0$)

et donc $E_{0max} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2}$

4. charge $-e$ en M et charge $+e$ "en O" (O = barycentre des charges ⊕)

donc $\vec{p} = e\vec{MO} = -e\vec{OM} = 4\pi\varepsilon_0 a_0^3\vec{E_0}$

En posant $\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E_0}$, on obtient $\boxed{\alpha = 4\pi a_0^3}$

α est homogène à un volume.

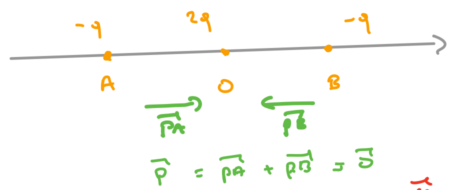
avec $a_0 = 53$ pm (rayon de Bohr de l'atome H), $\alpha \simeq 1{,}9.10^{-30}$ m^3

Exercice 9

On considère une répartition de charges équivalente à celle d'une molécule de CO_2 : Un charge +2q en un point O et deux charges −q en A et B, les points O, A et B étant alignés et les distances OA et OB étant égales à une valeur notée a. Calculer le camp créé à « grande distance ", c'est à dire à une distance r de O très supérieure à a.

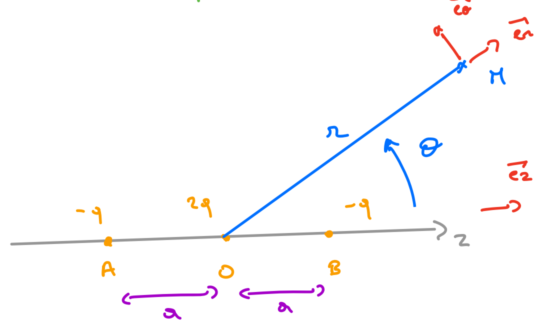
Cela ressemble beaucoup au calcul du potentiel et du champ pour un dipôle, mais si on développe à l'ordre 1 on trouve 0 : l'approximation est trop grossière. Il faut donc développer à l'ordre 2.

En fait le moment dipolaire de cette distribution est nul (on peut la qualifier de quadrupôle)



Calcul : $V = \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 AM} + \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0 OM} + \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 BM}$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} + \frac{2}{r}\right)$$



Or, $\vec{AM} = a\,\vec{e_z} + r\,\vec{e_r}$

donc $AM^2 = a^2 + r^2 + 2ar\cos\theta = r^2\left(1 + \dfrac{2a\cos\theta}{r} + \dfrac{a^2}{r^2}\right)$

d'où $\dfrac{1}{AM} = \left(AM^2\right)^{-1/2} = \dfrac{1}{r}\left(1 + \underbrace{\dfrac{2a\cos\theta}{r} + \dfrac{a^2}{r^2}}_{u \ll 1}\right)^{-1/2}$

Or, au 2° ordre, $(1+u)^\alpha \simeq 1 + \alpha u + \alpha(\alpha - 1)\dfrac{u^2}{2}$

D'où $\dfrac{1}{AM} \simeq \dfrac{1}{r}\left(1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a\cos\theta}{r} + \dfrac{a^2}{r^2}\right) - \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{3}{2}\right)\underbrace{\left(\dfrac{2a\cos\theta}{r}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

à priori c'est $\left(\dfrac{2a\cos\theta}{r} + \dfrac{a^2}{r^2}\right)^2$, mais on élimine les termes d'ordre supérieur à 2 en a/r

$$\simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a\cos\theta}{r} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\frac{a^2\cos^2\theta}{r^2}\right)$$

De la même, $\dfrac{1}{BM} \simeq \dfrac{1}{r}\left(1 + \dfrac{a\cos\theta}{r} - \dfrac{a^2}{2r^2} + \dfrac{3}{2}\dfrac{a^2\cos^2\theta}{r^2}\right)$

Donc $-\dfrac{1}{AM} - \dfrac{1}{BM} + \dfrac{2}{r} \simeq \dfrac{1}{r}\left(\underbrace{-1 + \dfrac{a\cos\theta}{r} + \dfrac{a^2}{2r^2} - \dfrac{3}{2}\dfrac{a^2\cos^2\theta}{r^2}}_{\text{vient de } -\frac{1}{AM}} \underbrace{-1 - \dfrac{a\cos\theta}{r} + \dfrac{a^2}{2r^2} - \dfrac{3}{2}\dfrac{a^2\cos^2\theta}{r^2}}_{\text{vient de } -\frac{1}{BM}} + \underbrace{2}_{\text{vient de } \frac{2}{r}}\right)$

$$\simeq \frac{1}{r}\left(\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^2\cos^2\theta}{r^2}\right) \simeq \frac{a^2}{r^3}\left(1 - 3\cos^2\theta\right)$$

finalement, $\boxed{V = \dfrac{q a^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(1 - 3\cos^2\theta\right)}$

et on en déduit le champ par $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$ ...

on remarque que le potentiel est en $1/r^3$ (le champ sera en $1/r^4$), un degré en dessous de ce que l'on a obtenu pour un dipôle.

Exercice 10

On constate expérimentalement qu'un filet d'eau qui coule d'un robinet et qui passe à proximité d'une règle en plexiglass chargée est systématiquement dévié vers la règle, et ce que la règle soit chargée positivement ou négativement. Interpréter ce phénomène, sachant qu'une molécule d'eau possède un moment dipolaire.

L'explication repose sur 4 points :

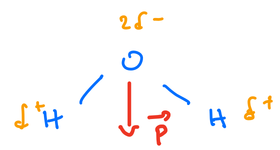
(1) Les molécules d'eau sont polaires

(2) La règle chargée crée un champ $\vec{E}$ qui est d'autant plus intense que l'on est proche de la règle (quel que soit le signe de la charge)

(3) Un dipôle placé dans un champ $\vec{E}$ va s'aligner sur ce champ si rien ne l'en empêche (ça peut être l'agitation thermique, mais ici les ordres de grandeur sont en faveur de l'alignement, ou une contrainte liée aux molécules voisines, mais ça n'est pas le cas dans un liquide)

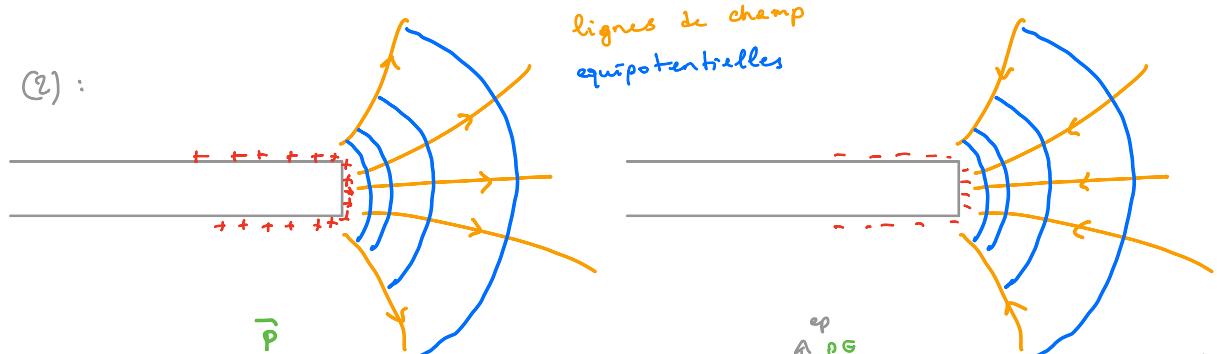
(4) Un dipôle aligné sur le champ subit, si ce champ n'est pas uniforme, une force dirigée vers les zones de fort champ électrique - quel que soit le sens du champ.

(1) :

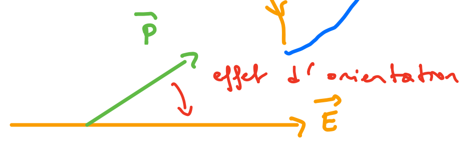


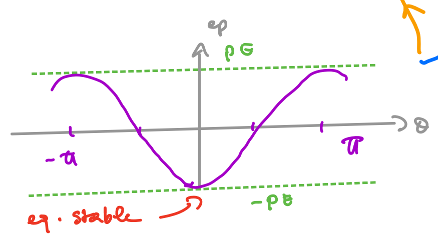
la molécule d'eau est polaire du fait de sa géométrie coudée et de la différence d'électronégativité entre O et H.

(2) :



(3) :





$e_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}$
$= -pE\cos\theta$

(4) : $e_p = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -pE$ (car $\vec{p}$ et $\vec{E}$ colinéaires, le dipôle étant aligné sur le champ)

$\vec{f} = -\overrightarrow{grad}(e_p) = -\overrightarrow{grad}(-pE) = p\,\overrightarrow{grad}(E)$

force résultante sur le dipôle

cette force est bien dirigée vers les zones de fort champ électrique.