

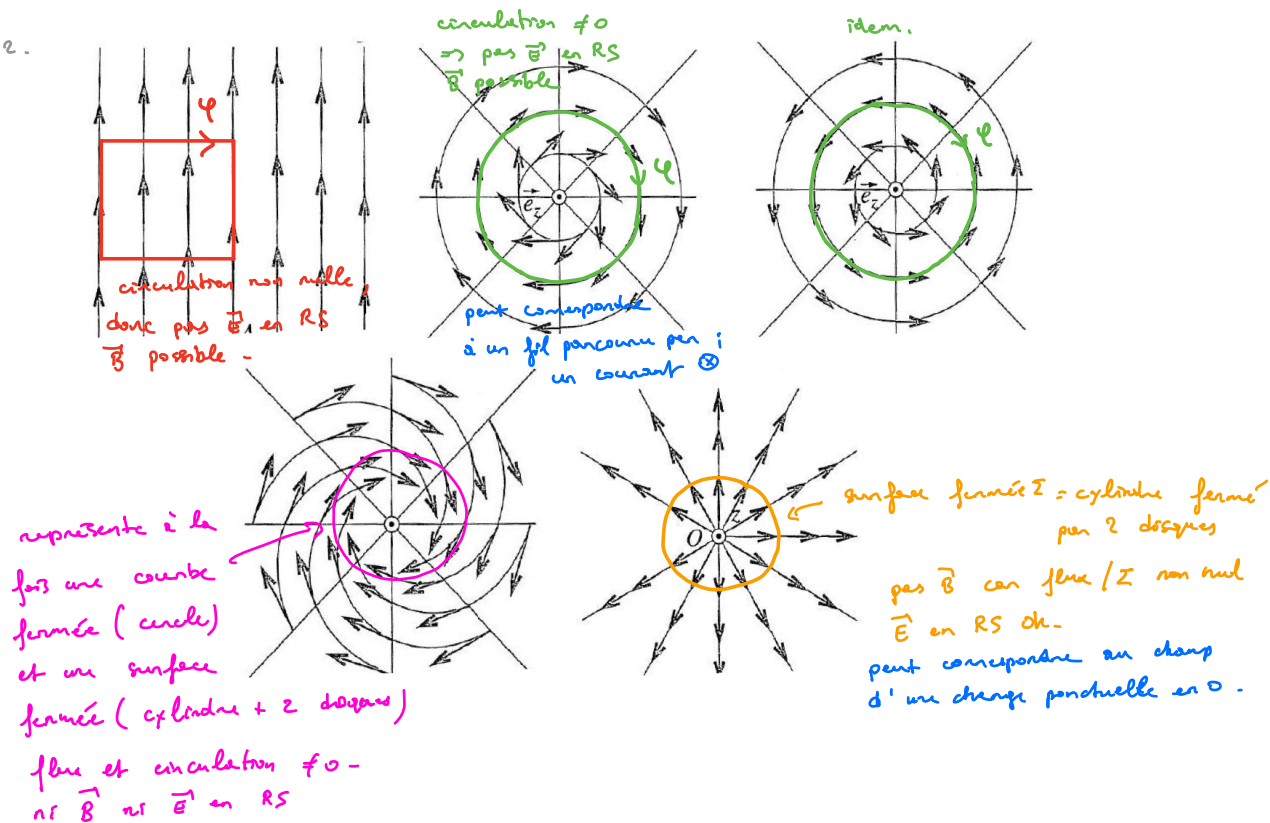
Exercice 1

1. Vérifier sur un exemple simple que le produit vectoriel de deux « vrais » vecteurs se transforme comme un pseudo vecteur par symétrie plane.

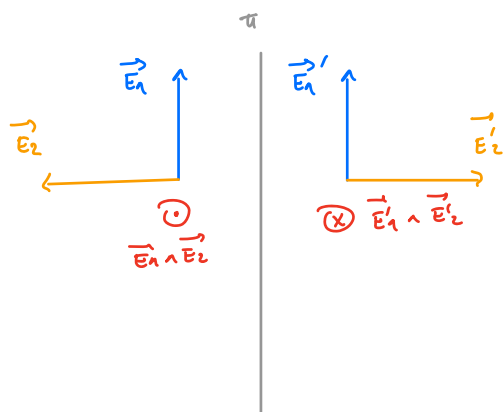
2. On propose plusieurs « cartes » (ensemble des lignes de champ) de champs de vecteurs. La figure représentée est invariante par translation perpendiculairement au plan de la figure. Dans chaque cas expliquer si il peut, oui ou non, s'agir d'un champ électrostatique ? D'un champ magnétique ?

Eventuellement, indiquer la distribution de charges ou courants susceptible de créer ce champ.

2.



1.



Exercice 2

Reprendre le calcul du champ magnétique créé au voisinage d'un fil dans l'approximation du « fil infini » en considérant une densité de courant uniforme dans le fil, de rayon a . Distinguer deux cas et vérifier que l'on retrouve, à l'extérieur du fil, le même résultat qu'avec une modélisation par un courant filiforme.

Les symétries et invariances donnent :

$$\vec{B}(M) = B_0(r) \vec{e}_\theta$$

On prend $\gamma =$ cercle (M, r)

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B_0(r)$$

$$I_c = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = \begin{cases} \pi r^2 j & \text{si } r \leq a \\ \pi a^2 j & \text{si } r > a \end{cases}$$

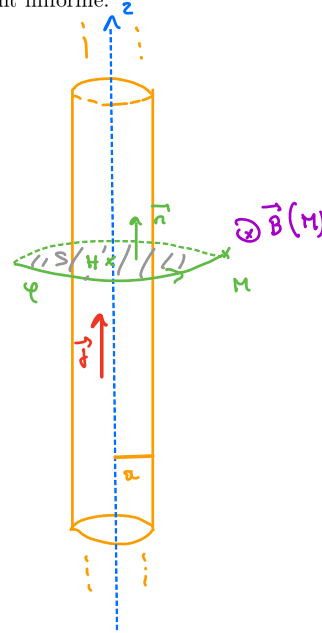
Donc par le th d' Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c$,

on obtient :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{e}_\theta & \text{si } r \leq a \\ \frac{\mu_0 a^2 j}{2r} \vec{e}_\theta & \text{si } r > a \end{cases}$$

A l'extérieur, puisque $j = \frac{I}{\pi a^2}$, on

retrouve $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.



Exercice 3

1. Le fer a une masse volumique de $7,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, une masse molaire de 56 g/mol et possède en moyenne 4 électrons libres par atome. Calculer la densité d'électrons libres et la charge libre par unité de volume.

2. Un courant électrique de 5 A circule dans un conducteur en fer de section 10 mm^2 . Calculer la densité de courant (on admet qu'elle est uniforme dans le conducteur) ainsi que la vitesse de déplacement d'ensemble des électrons.

3. La conductivité du fer vaut $9,9 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$. Calculer le temps de relaxation associé aux mouvements des électrons libres dans le fer.

4. Calculer la résistance d'un fil de fer de section 1 mm^2 et de longueur 15 m (dans l'approximation où le champ électrique est uniforme dans tout le conducteur).

$$1. \quad n^* = \frac{\rho \cdot N_A}{M} \quad \underline{A.N.}: \quad n^* = 3,4 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$$

$$\rho = -n^* e \quad \underline{A.N.}: \quad \rho = -5,4 \cdot 10^{10} \text{ C.m}^{-3}$$

$$2. \quad j = \frac{i}{S} \quad \underline{A.N.}: \quad j = 5 \cdot 10^5 \text{ A.m}^{-2}$$

$$v = \frac{j}{|e| n^*} \quad \underline{A.N.}: \quad v = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$$

$$3. \quad \sigma = \frac{n^* e^2 \tau}{m} \quad \text{donc} \quad \tau = \frac{m \sigma}{n^* e^2} \quad \underline{A.N.}: \quad \tau = 10^{-15} \text{ s}$$

$$4. \quad R = \frac{\ell}{\sigma S} \quad \underline{A.N.}: \quad R = 1,5 \, \Omega$$

Exercice 4

L'inductance L d'une bobine est définie par la relation $\phi = LI$, où ϕ est le flux au travers de la bobine du champ magnétique créé par elle-même et I le courant qui circule dans la bobine.

On considère un solénoïde comportant N spires, de rayon R et de longueur L . On se place dans l'approximation du solénoïde infini.

1. En utilisant l'expression du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infini, calculer le flux au travers d'une spire du solénoïde.

2. En déduire le flux au travers des N spires et conclure.

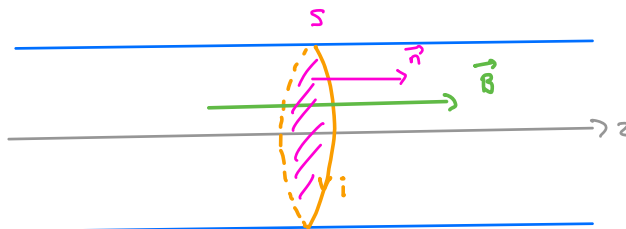
$$1. \vec{B} = \mu_0 \frac{N}{L} i \vec{e}_z$$

$$\phi(\vec{B}/S) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

flux de $\vec{B}$ au travers d'une spire

$$= \iint_S \left(\mu_0 \frac{N}{L} i \vec{e}_z \right) \cdot (dS \vec{e}_z)$$

$$= \mu_0 \frac{N}{L} i \iint_S dS = \mu_0 \frac{N}{L} i \pi R^2 \quad (S = \pi R^2)$$



2. Pour N spires, on multiplie par N le flux au travers d'une spire, donc

$$\phi = \mu_0 \frac{N^2}{L} \pi R^2 i$$

Or, par définition, $\phi = Li$, donc

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{L}$$

Exercice 5

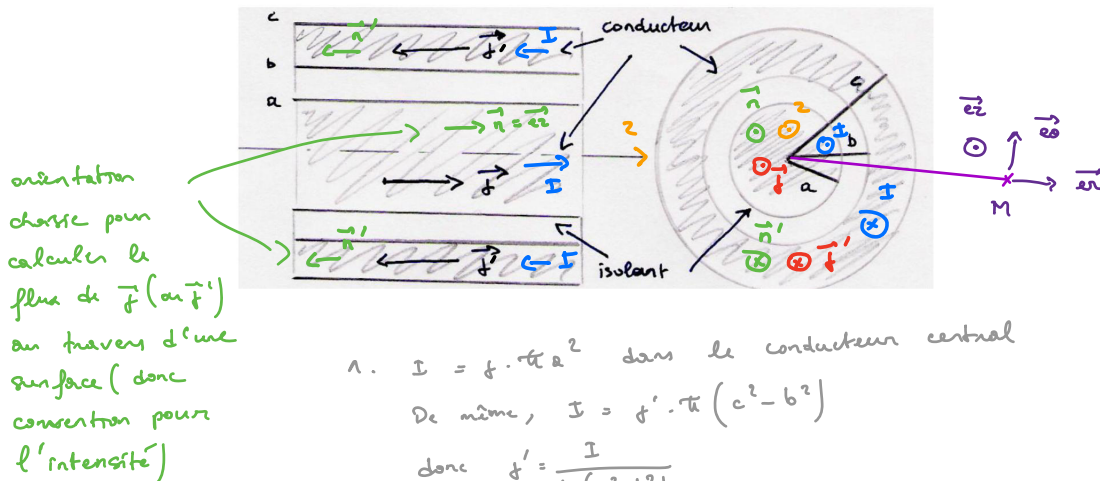
On considère un câble coaxial : Un fil conducteur rectiligne de rayon a est entouré par un matériau isolant (qui se comporte, du point de vue des propriétés magnétiques, comme du vide) entre $r = a$ et $r = b$; puis par un deuxième conducteur entre $r = b$ et $r = c$.

L'ensemble est à géométrie cylindrique (symétrie de révolution autour de l'axe du fil).

Le conducteur central est le siège d'une densité de courant uniforme $\vec{j}$ et l'intensité qui le traverse est notée I . Le conducteur périphérique est traversé par la même intensité, mais dans l'autre sens. La densité de courant y est également considérée comme uniforme.

1. Donner le lien entre la densité de courant et l'intensité. En déduire la densité de courant $\vec{j}'$ dans le conducteur périphérique.

2. On considère le câble comme « infini » en longueur. Déterminer le champ magnétique créé (distinguer différents cas selon la distance par rapport à l'axe).



1. $I = j \cdot \pi a^2$ dans le conducteur central

De même, $I = j' \cdot \pi (c^2 - b^2)$

donc $j' = \frac{I}{\pi (c^2 - b^2)}$

2. La géométrie est cylindrique, donc $\vec{B}(r) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$

symétries, invariances et choix du contour d'Ampère sont les mêmes que pour le fil infini.

Plus en détails :

- symétries : tout plan qui contient (Oz) est plan de symétrie, et $\vec{B} \perp$ plan de sym $\Rightarrow \vec{B}$ selon $\vec{e}_\theta$

- invariances : par translation le long de $(Oz) \Rightarrow$ pas z
et par rotation autour de $(Oz) \Rightarrow$ pas θ

On choisit comme contour d'Ampère (un cercle de rayon r , centré sur (Oz)).

$$\oint_{\text{ce}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B_\theta(r)$$

Le courant enlacé dépend de r :

- $r \leq a$: $I_e = j \cdot \pi r^2 = I \frac{r^2}{a^2}$

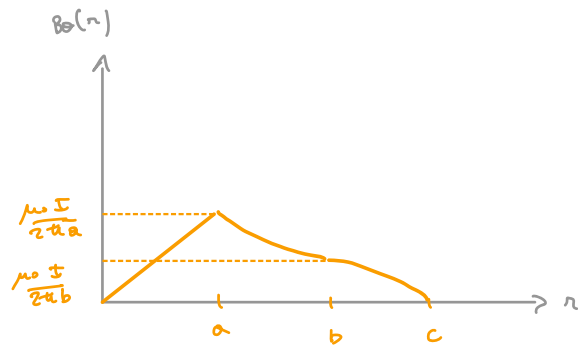
- $a \leq r \leq b$: $I_e = I$

- $b \leq r \leq c$: $I_e = I - j' \pi (r^2 - b^2) = I \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right)$

- $r \geq c$: $I_e = 0$

En appliquant le th d'Ampère, on obtient :

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta & \text{si } r \leq a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } a \leq r \leq b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right) \vec{e}_\theta & \text{si } b \leq r \leq c \\ \vec{0} & \text{si } r \geq c \end{cases}$$

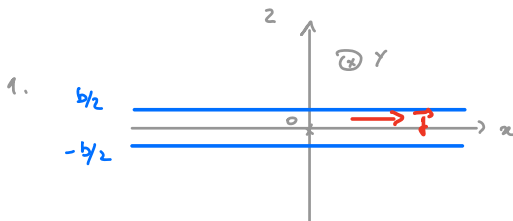
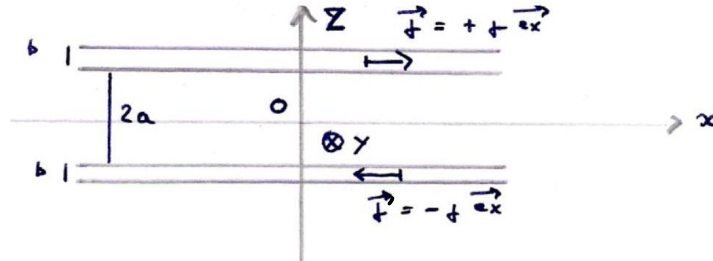


Exercice 6

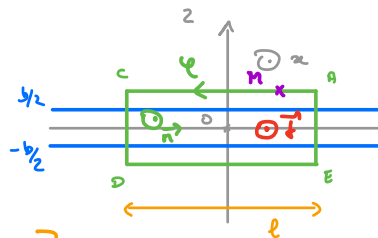
Deux couches planes « infinies », parallèles entre elles, d'épaisseur b et séparées par une distance $2a$, sont parcourues par des densités de courant uniformes, égales et opposées (cf schéma).

1. Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace par l'une de ces nappes infinies, à l'extérieur de la nappe.

2. En déduire le champ magnétique créé par les deux nappes, en un point qui leur est extérieur.



On met ici l'origine O au milieu du plan chargé.



On se place ici explicitement dans le cas $z > 0$ (M au dessus du plan (Oxy)).

rotation d' $\pi/4$ de tour autour de (Oz)

Symétries : tout plan $\parallel (Oxz)$ est sym $\rightarrow$ champ selon $\vec{y}$

Invariances : translation $\vec{ex}$ et $\vec{ez}$ $\rightarrow$ pas x et y

conclusion : $\vec{B}(M) = B_y(z) \vec{ey}$

choix du contour d'Amperine : rectangle dans un plan $\parallel (Oyz)$, symétrique par rapport à (Oxy)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

$= 0$ $= 0$

$$\int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^C (B_y(z) \vec{ey}) \cdot (-d\ell \vec{ey}) = -B_y(z) \int_A^C d\ell = -B_y(z) l$$

$$\text{et } \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} : \text{ à la fois } \vec{B} \text{ (symétrie / plan } (Oxy)) \text{ et } d\vec{\ell} \text{ sont inversés.}$$

$$\text{finalement, } \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -2 B_y(z) l$$

Pour le courant enlacé, on doit distinguer 2 cas :

- si $z > b/2$: $I_e = J b l$
- si $0 \leq z \leq b/2$: $I_e = 2 J z l$

Donc pour $z \geq b/2$: $-2B_y(z) = \mu_0 j b$ $\Rightarrow B_y(z) = -\mu_0 \frac{j b}{2}$

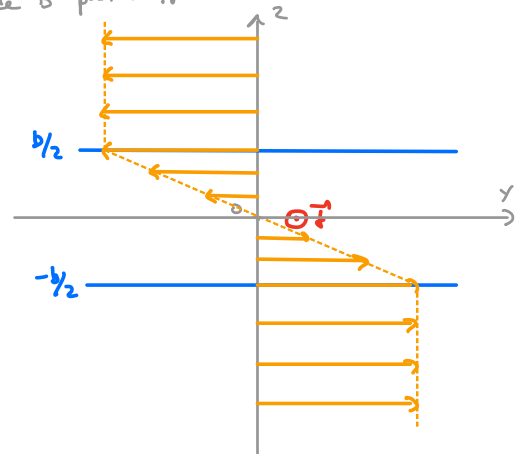
et donc $\vec{B}(z) = -\mu_0 \frac{j b}{2} \vec{e}_y$

pour $0 \leq z \leq b/2$: $-2B_y(z) = 2\mu_0 j z$ $\Rightarrow B_y(z) = -\mu_0 j z$

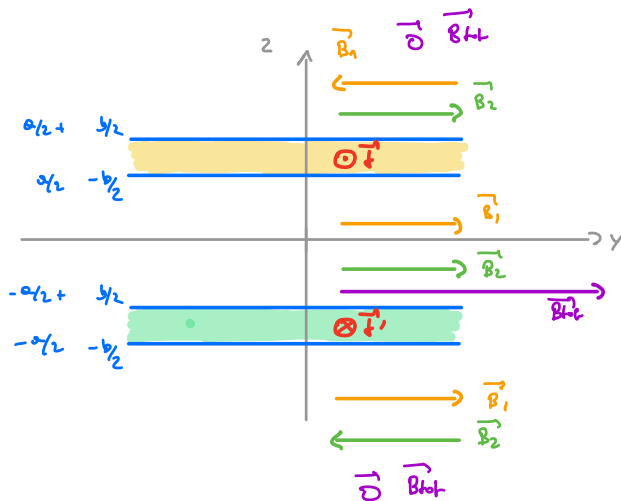
et donc $\vec{B}(z) = -\mu_0 j z \vec{e}_y$

On conclut en n'oubliant pas la symétrie de $\vec{B}$ par rapport à l'axe Ox :

$$\vec{B}(z) = \begin{cases} -\mu_0 \frac{j b}{2} \vec{e}_y & \text{si } z \geq b/2 \\ -\mu_0 j z \vec{e}_y & \text{si } -b/2 \leq z \leq b/2 \\ \mu_0 \frac{j b}{2} \vec{e}_y & \text{si } z \leq -b/2 \end{cases}$$



2. On utilise le principe de superposition :



On note $\vec{B}_1$ le champ créé par les courants de la couche "supérieure" et $\vec{B}_2$ celui créé par ceux de la couche "inférieure".

A l'extérieur des couches chargées :

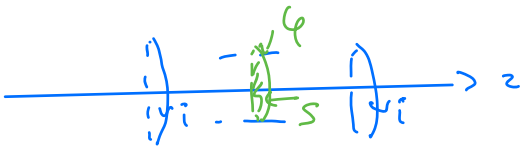
$$\vec{B}(z) = \begin{cases} \mu_0 j b \vec{e}_y & \text{si } -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \leq z \leq \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \\ 0 & \text{si } |z| > \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \end{cases}$$

Exercice 7

Le potentiel associé au champ magnétique est un champ vectoriel (et non pas un champ scalaire, comme pour le champ électrique) dont les propriétés de symétries sont celles d'un « vrai » vecteur et qui vérifie la propriété :

La circulation du potentiel vecteur le long d'une courbe fermée est égale au flux du champ magnétique au travers d'une surface entourée par cette courbe

Déterminer le potentiel vecteur à l'intérieur d'un solénoïde infini.

$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z$


sym de $\vec{A}$: plan qui contient (oz) ortho -
 $\Rightarrow \vec{A} \perp$ donc $\vec{A} = A_\theta \vec{e}_\theta$ | le potentiel vecteur s'enroule autour de l'axe (oz)

mêmes m. que $\vec{B} \Rightarrow \vec{A} = A_\theta(r) \vec{e}_\theta$

$\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ ($\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \Rightarrow \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$)


$\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r A_\theta(r)$

$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 n i \cdot \pi r^2$

d'où $A_\theta(r) = \mu_0 \frac{n}{2} r i$

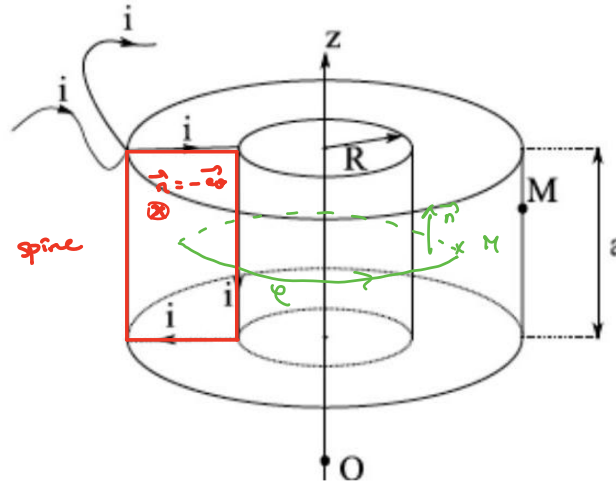
$\vec{A} = \mu_0 \frac{n n i}{2} \vec{e}_\theta$ (à l'intérieur)

à l'extérieur : $\vec{A} = \mu_0 \frac{R^2 n i}{2 r} \vec{e}_\theta$

Exercice 8

La bobine torique représentée ci-contre comporte N spires régulièrement bobinées sur un support torique à section carrée de côté a .

1. La bobine est parcourue par un courant i . Déterminer le champ magnétique.
2. Calculer l'inductance propre de cette bobine.



1. on utilise les coord. polaires
Tout plan qui contient l'axe (Oz) est plan de symétrie $\Rightarrow \vec{B}$ selon $\vec{e}_\theta$
Invariance par rotation autour de $(Oz) \Rightarrow$ pas θ

Donc $\vec{B}(M) = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta$

Contour d'Ampère: cercle de rayon r centré sur le fil.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B_\theta(r, z)$$

Courant enlacé: - si M est à l'intérieur du tore: $I_e = -Ni$
- si M est à l'extérieur du tore: $I_e = 0$

On a donc:

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{à l'intérieur} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

2. flux au travers d'une spire:

$$\Phi(1 \text{ spire}) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left(-\frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \vec{e}_\theta \right) \cdot (-ds \vec{e}_\theta) = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi} \iint_S \frac{ds}{r}$$

Or, $ds = dr dz$ donc $\iint_S \frac{ds}{r} = \int_R^{R+a} \frac{dr}{r} \times \int_0^a dz = \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) a$

D'où $\Phi(1 \text{ spire}) = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi} a \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$

Pour les N spires, on multiplie par N : $\Phi = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) i$

D'où, puisque $\Phi = Li$,

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

Exercice 9

Dans le but de justifier que le champ à l'extérieur d'un solénoïde infini est nul, on peut calculer le champ sur l'axe à partir du champ créé par une spire sur son axe.

Le solénoïde étant infini, le champ est le même en n'importe quel point de son axe. On peut donc choisir de calculer le champ en un point O que l'on prend comme origine sur cet axe. On note N le nombre de spires et L la longueur du solénoïde.

1. Donner l'expression du champ créé en O par une spire située à une distance z en utilisant l'expression donnée en cours.
2. En considérant une distribution continue de spires, exprimer le nombre de spires associé à une longueur infinitésimale dz de solénoïde.
3. En déduire la contribution au champ en O d'une longueur dz de solénoïde située à la distance z du point O.
4. Sommer sur toute la longueur du solénoïde (considéré comme infini) et conclure.

$$1. \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2} \vec{e}_z$$

$$2. \quad n \, dz \times \quad \quad \quad$$

3.

$$4. \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 n i}{2R} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2} dz \quad \quad \quad \left. \begin{array}{l} x = \frac{z}{R} \\ \frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x = \tan(\theta) \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(-z)^{-3/2}}{(\cos^2 \theta)^{-3/2}} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta = [\sin(\theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2 \end{array}$$

$$\text{donc} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 n i}{2R} \vec{e}_z \cdot 2R = \mu_0 n i \vec{e}_z$$

Exercice 10

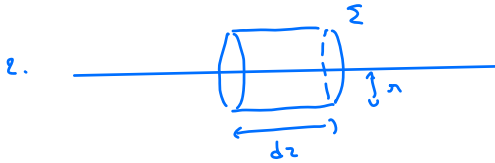
On s'intéresse au champ magnétique créé par une spire de centre O et de rayon R parcourue par un courant I en un point M situé en dehors de l'axe de la spire, mais proche de cet axe. L'axe de la spire est l'axe (Oz) et on repère la position du point M en coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

1. Montrer, en utilisant les symétries et invariances, que le champ magnétique en dehors de l'axe n'a pas de composante orthoradiale et que sa norme ne dépend pas de θ .

2. On considère que, pour M proche de l'axe, la composante parallèle à (Oz) du champ magnétique est la même que sur l'axe. Montrer, en utilisant la propriété relative au flux du champ magnétique au travers d'une surface fermée, que $B_r = -r/2 \, dB_z/dz$ et en déduire l'expression complète du champ au voisinage de l'axe.

1- en dehors de l'axe : $\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_z(r, z) \vec{e}_z$

↓
 $= \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2}$



$\oint (\vec{B} \cdot \vec{\epsilon}) = 0$. donc $B_r(r, z) \cdot 2\pi r \, dz + \left(B_z(r, z+dz) - B_z(r, z) \right) \cdot \pi r^2 = 0$

donc $B_r(r, z) = -\frac{\pi}{2} \frac{dB_z}{dz} = \frac{3}{4} \frac{\mu_0 I}{R^3} r z \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-5/2}$

~

Exercice 11

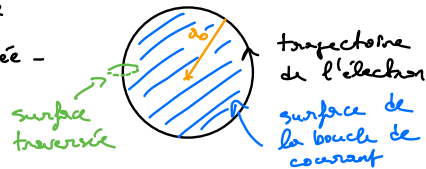
On adopte pour l'atome d'hydrogène le modèle de Bohr : L'électron gravite autour du proton avec un mouvement circulaire uniforme, et le moment cinétique L associé à ce mouvement (dit orbital) est quantifié : $L = n\hbar$ où n quantifie l'énergie et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h étant la constante de Planck.

1. Montrer que l'on peut associer au mouvement orbital de l'électron un courant $i = \frac{ev}{2\pi a_0}$ et en déduire le moment magnétique m associé.
2. Exprimer m en fonction du moment cinétique orbital L de l'électron, en déduire l'expression du magnéton de Bohr μ_B qui est le moment magnétique de l'électron dans son état fondamental.
3. Calculer numériquement μ_B .

1. On considère l'intensité en moyenne (sur un tour) au travers d'une petite surface traversée par l'électron : la charge électrique e traverse chaque tour, donc si T est la durée d'un tour on a $i = \frac{e}{T}$.
 Or, $2\pi r = vT$, d'où $i = \frac{ev}{2\pi r}$, donc avec $r = a_0$, $i = \frac{ev}{2\pi a_0}$

Le moment magnétique vaut $m = iS$, où $S = \pi a_0^2$ est la surface de la boucle de courant associée -

D'où $m = \frac{ev}{2\pi a_0} \times \pi a_0^2$, donc $m = \frac{ev a_0}{2}$



2. $\vec{L} = m_e \vec{r} \wedge \vec{v}$, d'où $L = m_e v r = m_e v a_0$ ($\vec{r} \perp \vec{v}$, trajectoire circulaire)

Ainsi, $m = \frac{e}{2m_e} m_e v a_0 = \frac{e}{2m_e} L$
 Dans l'état fondamental, $L = \hbar$, et donc $m = \frac{e\hbar}{2m_e}$
 $L = n\hbar$ en général, et $n=1$ pour l'état fondamental

Rem : en fait, en posant dès le départ $r = a_0$, on était déjà dans l'état fondamental...

Si on note μ_B (magnéton de Bohr) le moment magnétique dans l'état fondamental, on a : $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$

3. A.N : $\mu_B \approx 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$