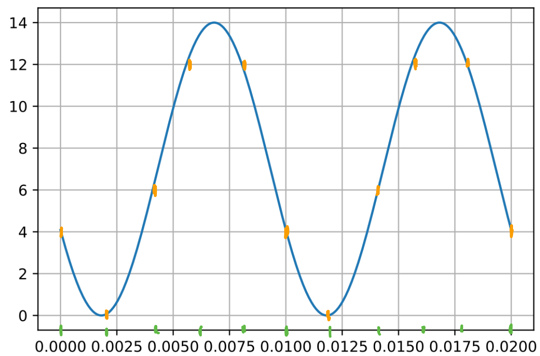
Exercice 1

Convertir le signal ci-dessous en une suite de 0 et 1 en considérant un échantillonnage à la fréquence $f_{ech} = 500Hz$ quantifié sur 3 bits.

↳ $T_{ech} = 2\,ms = 0{,}002\,s$



0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

010 / 000 / 011 / 110 / 110 / 010 / 000 / 011 / 110 / 110 / 010

Exercice 2

L'action de la marche d'un piéton sur une passerelle est traduite par une force verticale périodique, appelée charge. On donne ci-dessous (premier graphe) l'allure des variations de cette charge en fonction du temps.

On fait l'acquisition de ce signal en effectuant $N = 300$ mesures à intervalles de temps réguliers dans un intervalle $[t_{min}, t_{max}]$. On fait ensuite la décomposition de Fourier du signal numérisé. Analyser et commenter les spectres obtenus pour différents intervalles de temps.

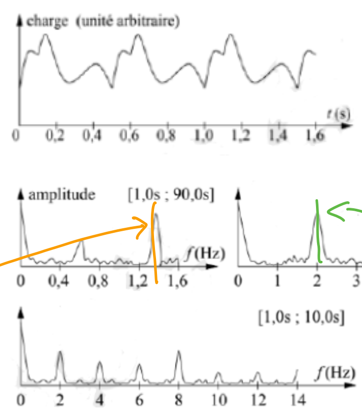
$T = 0{,}5\,s \Rightarrow f = 2\,Hz$

$T_{ech} = 0{,}3\,s$

$f_{ech} = 3{,}3\,Hz$

pb de repliement.

on récupère $f_{ech} - f = 1{,}3\,Hz$.



$T_{ech} = 0{,}09\,s$

$f_{ech} = 11\,Hz$ (plutôt 11,5)

pas de pb, prc à 2Hz.

on ne va que jusqu'à env. 5 Hz ($\sim f_{ech}/2$)

on voit un harmonique à 4Hz

et aussi l'harmonique 8Hz replié sur $11{,}5 - 8 \sim 3{,}5$.

$T_{ech} = 0{,}03\,s$ $f_{ech} = 33\,Hz$

pas de pb de repliement,

ce qu'il y a au dessus de 14Hz est faible —

Exercice 3

On cherche à enregistrer un concert sur un CD audio, en format non compressé (WAV par exemple) afin de ne pas perdre en qualité. Le son est capté par un microphone (signal analogique), filtré par un passe-bas et enfin échantillonné à une fréquence $f_e = 44,1$kHz. La transcription numérique est faite sur 16 bits. Les fréquences audibles pour l'être humain sont réputées comprises entre 20 Hz et 20kHz.

1. Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale à adopter pour enregistrer correctement le spectre audible ? Commenter le choix de f_e adopté pour ce CD.

2. Un ultrason à 43kHz est présent dans l'environnement du concert. Est-il perçu par les spectateurs ? Que se passe-t-il si on omet de placer un filtre passe-bas avant le CAN : est-il audible sur l'enregistrement ?

3. Quelle fréquence de coupure doit-on adopter pour ce filtre si on veut bien restituer le son perçu par l'oreille humaine lors du concert ? Quel problème apporte ce filtre ? Pour le contrer, on utilise un filtre passe-bas d'ordre élevé et un suréchantillonnage (f_e plus élevée que ce que prévoit le critère de Nyquist-Shannon) : expliquer pourquoi on fait cela.

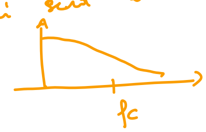
4. On cherche à déterminer la durée maximale d'enregistrement qui peut être porté par un CD du commerce (700Mo, un octet valant 8 bits). Sachant que l'enregistrement est stéréo (2 sons à restituer en même temps, combien de bits sont nécessaires pour un enregistrement d'une seconde ? En déduire la durée maximale du concert pour qu'il tienne sur un CD.

5. En utilisant un format de compression MP3, le signal numérisé est traité pour enlever les redondances et supprimer les signaux peu audibles (on perd alors en qualité). Cela permet de diviser les données numériques d'un facteur 4 à 20. Quelle durée d'enregistrement MP3 peut-on alors porter sur un CD commercial ?

1. 2 f_{max}, donc 40 kHz. il y a un peu de marge ... (→ question 3).

2. Non, 43kHz = (largement) ultrason ...
en l'absence de filtre antirepliement à ~ 20 kHz, on va récupérer du 1,1 kHz qui lui sera audible.

3. f_c ~ 20 kHz.



2pb : - on atténue le haut de la BP
- on n'élimine pas complètement ce qui est juste après f_c.
d'où l'ordre élevé (+ abrupt)
et le sur-échantillonnage
joue sur les 2
joue sur le 2°.

4. 1 s à 44,1 kHz : $4,41 \cdot 10^4$ échantillons
↓ x2 (stéréo)
$8,82 \cdot 10^4$ échantillons
↓ sur 16 bits (2 octets)
$1,74 \cdot 10^5$ octets (174 ko)
$1,41 \cdot 10^6$ bits (1,41 Mbits)
700 Mo → env. 4023 s (1h 7 min) (67 min)

on trouve 74 min.
en recherchant ...

5. 4 à 20 fois plus ...

Exercice 4

Donner la relation de récurrence entre us_n, us_{n-1}, us_{n-2}, ue_n et ue_{n-1} associée à un filtre passe-bande du second ordre.

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ(x - 1/x)} = \frac{jx}{jx + Q(jx)^2 + Q}$$

$$\Rightarrow \underline{us}\left(Q + jx + Q(jx)^2\right) = \underline{ue} \cdot jx$$

$$\Rightarrow Q\, us + \frac{1}{\omega_0}\frac{dus}{dt} + \frac{Q}{\omega_0^2}\frac{d^2us}{dt^2} = \frac{1}{\omega_0}\frac{due}{dt}$$

Or, $\dfrac{dus}{dt} = \dfrac{us_n - us_{n-1}}{Te}$ et $\dfrac{d^2us}{dt^2} = \dfrac{\dfrac{us_n - us_{n-1}}{Te} - \dfrac{us_{n-1} - us_{n-2}}{Te}}{Te}$

$$= \frac{1}{Te^2}\left(us_n - 2\,us_{n-1} + us_{n-2}\right)$$

On peut aussi le voir avec :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + \frac{1}{2} f''(a)\,h^2$$

$$f(a-h) = f(a) + f'(a)\cdot(-h) + \frac{1}{2} f''(a)\,h^2$$

$$\Rightarrow f''(a) = \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$ et on transpose ...

D'où : $Q\,us_n + \dfrac{1}{\omega_0 Te}\left(us_n - us_{n-1}\right) + \dfrac{Q}{\omega_0^2 Te^2}\left(us_n - 2\,us_{n-1} + us_{n-2}\right) = \dfrac{1}{\omega_0 Te}\left(ue_n - ue_{n-1}\right)$

soit

$$\hookrightarrow us_n = \frac{us_{n-1}\left(\dfrac{1}{\omega_0 Te} + \dfrac{2Q}{\omega_0^2 Te^2}\right) - \dfrac{Q}{\omega_0^2 Te^2}\,us_{n-2} + \dfrac{1}{\omega_0 Te}\left(ue_n - ue_{n-1}\right)}{Q + \dfrac{1}{\omega_0 Te} + \dfrac{Q}{\omega_0^2 Te^2}}$$

Exercice 5

On veut illustrer le fonctionnement d'un filtre numérique à moyenne glissante sur $n = 4$ échantillons, dont le signal de sortie us_n est la moyenne des quatre derniers échantillons du signal d'entrée :

$$us_n = (ue_n + ue_{n-1} + ue_{n-2} + ue_{n-3})/4 \qquad (1)$$

Le signal d'entrée est échantillonné à la fréquence $f_E = 1$ kHz.

1. Quel type de filtrage peut-on prévoir à partir de la relation (1) donnée ci-dessus ?

2. On applique un échelon de tension de 1 V en entrée (les valeurs de la tension d'entrée sont nulles avant $t = 0$ et valent 1 à partir de $t = 0$ inclus). Donner les valeurs de ue_n us_n pour n entre 0 et 10. Confirmer le type de filtre et donner la valeur du gain en basse fréquence (pour une fréquence nulle).

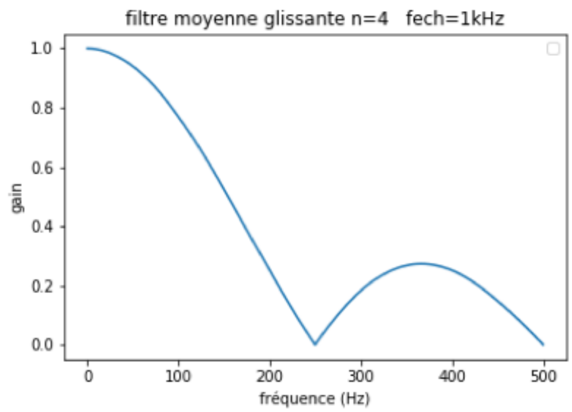
On applique en entrée un signal sinusoïdal de la forme $ue(t) = E_0 \cos(2\pi f t)$. On teste successivement les fréquences $f_E/6$, $f_E/4$, $f_E/3$ et $f_E/2$.

3. Pourquoi est-il inutile de considérer des fréquences du signal d'entrée supérieures à $f_E/2$?

4. Pour chaque fréquence, remplir un tableau avec les valeurs de ue_n et us_n pour une période complète, en partant de $n = 0$. On remarquera qu'il est utile de calculer les valeurs de ue_n pour $n = -1$, $n = -2$ et $n = -3$.

5. Estimer le gain pour chaque fréquence (fondamentalement on doit faire le rapport des valeurs efficaces, pour simplifier on pourra prendre le rapport des valeurs maximales (en valeur absolue) prises par chaque tension, ce qui donne ici le même résultat).

6. Vérifier que les valeurs obtenues sont cohérentes avec la courbe du gain en fonction de la fréquence donnée ci-dessous et estimer la fréquence de coupure. Commenter la sélectivité de ce filtre.

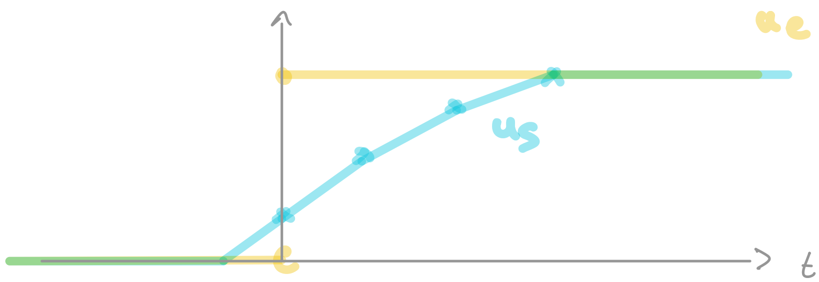


7. Tracer par vos propres moyens la courbe ci-dessus. Pour avoir le même tracé, faire varier la fréquence par pas de 1 et calculer le gain en prenant des valeurs efficaces sur 100 périodes.

1 O f 7 u moyenne, donc passe - bas --

2.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ue	0	0	0	1	1	-	—	—	—	—		-	—	1
us	0	0	0	1/4	1/2	3/4	1	1	-	—		-	—	1



un signal continu passe — le gain en BF vaut 1 -

3. avec f_E, on ne peut pas échantillonner des fréquences supérieures à $f_E/2$ ...

4. et 5. • $f = f_E/2$:

$\cos(2\pi f_E/2 \cdot t)$
$=$
$\cos(\pi n)$

$t = n T_e$
$\Rightarrow f_E t = \frac{t}{T_e} = n$

n	-3	-2	-1	0	1	2	
ue	-1	1	-1	1	-1	1	...
us	/	/	/	0	0	0	...

$g = 0$

• $f = f_E/3$:

$\cos(2\pi f_E/3 \cdot t)$
$=$
$\cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
ue	1	-0,5	-0,5	1	-0,5	-0,5	1
us	/	/	/	0,25	-0,125	-0,125	0,25

$g = 0,25$

• $f = f_E/4$:

$\cos(2\pi f_E/4 \cdot t)$
$=$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
ue	0	-1	0	1	0	-1	0	1
us	/	/	/	0	0	0	0	0

$g = 0$

• $f = f_E/6$:

$\cos(2\pi f_E/6 \cdot t)$
$=$
$\cos\left(\frac{\pi}{3} n\right)$

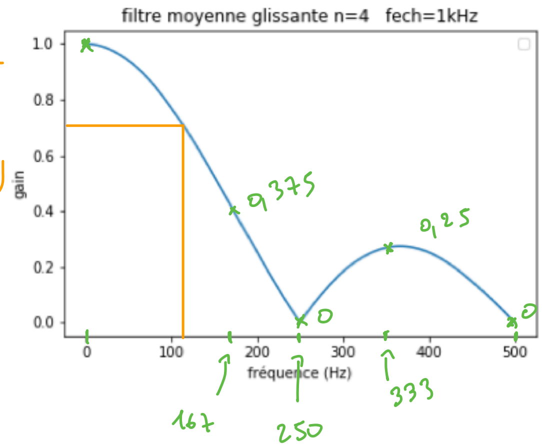
n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
ue	-1	-0,5	0,5	1	0,5	-0,5	-1	-0,5	0,5	1
us	/	/	/	0	0,375	0,375	0	-0,375	-0,375	0

$g = 0,375$

6. valeurs ok -

fc un peu sup à 100 Hz

c' est peu sélectif
(on va au max à 500Hz)
et il y a un rebond
après 250 Hz ...
on ne coupe pas
grand chose ...



```python
import math as m
import matplotlib.pyplot as plt


def entree(f):
    fe = 1000
    n = 100*int(fe/f)
    out = []
    for i in range(n+3) :
        out.append(m.cos(2*m.pi*(i-3)*f/fe))
    return out


def filtre_num(liste):
    n = len(liste)
    out = []
    for i in range(n-3) :
        out.append((liste[i]+liste[i+1]+liste[i+2]+liste[i+3])/4)
    return out


def veff(liste):
    n = len(liste)
    s = 0
    for val in liste :
        s += val**2
    return m.sqrt(s/n)


def gain(l_entree,l_sortie):
    return veff(l_sortie)/veff(l_entree)

lx,ly = [0],[1]
for i in range(1,501):
    f = i
    lx.append(f)
    l_entree = entree(f)
    l_sortie = filtre_num(l_entree)
    g = veff(l_sortie)/veff(l_entree)
    ly.append(g)
plt.plot(lx,ly)
plt.xlabel('fréquence (Hz)')
plt.ylabel('gain')
plt.title('filtre moyenne glissante n=4   fech=1kHz')
plt.legend()
plt.show()
```