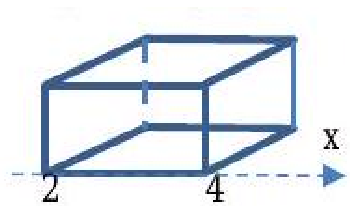
TD physique 12

Equations de Maxwell

Exercice 1

1. Représenter quelques vecteurs ainsi que les lignes de champ pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{A}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{Z}) \to \mathrm{xe_x}$. On considère le cube de coté 2 unités représenté sur le schéma.



Calculer directement le flux de $\vec{A}$. Retrouver le flux en utilisant le théorème d'Ostrogradsky.
Le champ $\mathrm{A}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \to \mathrm{xe_x}$ est-il à flux conservatif ?

2. Représenter quelques vecteurs ainsi que les lignes de champ pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{A}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{Z}) \to \mathrm{xe_y}$. Choisir un contour fermé simple permettant de prouver qu'il n'est pas à circulation conservative et calculer la circulation. Vérifier en calculant $\overrightarrow{rot}(\vec{A})$. Retrouver la circulation en utilisant le théorème de Stokes.

Exercice 2

On suppose que le champ électromagnétique régnant dans une partie de l'espace vide de charges et de courants est donné par

$$\begin{cases} \vec{E}(M,t) = f(z)\exp(-\alpha t)\overrightarrow{u_x} \\ \vec{B}(M,t) = g(z)\exp(-\alpha t)\overrightarrow{u_y} \end{cases}$$

1. Les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Thomson sont-elles vérifiées ?
2. Montrer que l'équation de Maxwell Faraday impose une expression de $g(z)$ en fonction de $f'(z)$
3. Montrer que l'équation de Maxwell Ampère impose une expression de $f(z)$ en fonction de $g'(z)$
4. En déduire $f(z)$ en admettant que f est une fonction paire et que $\vec{E}(0,0) = E_0\overrightarrow{u_x}$.

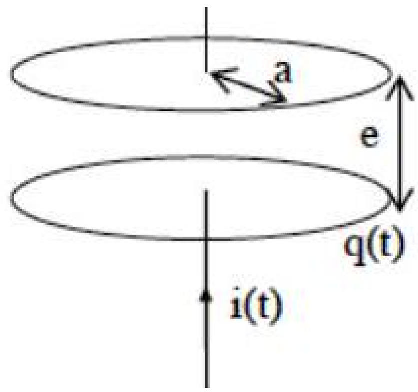
Exercice 3

On considère l'établissement du courant dans un solénoide de longueur ℓ, de rayon R et comportant N spires considéré comme 'infiniment long'.

1. Etablir l'expression du champ magnétique dans le solénoide. On admettra que le champ à l'extérieur est nul et on se place dans le cadre de l'ARQS (on calcule le champ magnétique comme en régime stationnaire).
2. Donner l'expression du champ électrique à l'intérieur du solénoide lorsque i varie.
3. En déduire l'expression du vecteur de poynting au niveau de la « surface » du solénoide.
4. Calculer le flux du vecteur de poynting à travers la surface extérieure délimitant le solénoide.
5. Calculer l'énergie magnétique contenue dans le solénoide.
6. Vérifier la conservation de l'énergie électromagnétique (L'énergie associée au champ électrique peut être négligée).

Exercice 4

Soit un condensateur constitué de 2 disques de rayon a distants de e. On suppose le champ électrique uniforme entre les armatures et nul à l'extérieur les plaques (on néglige les effets de bord) et on considère que le champ électrique a la même expression qu'en régime stationnaire.

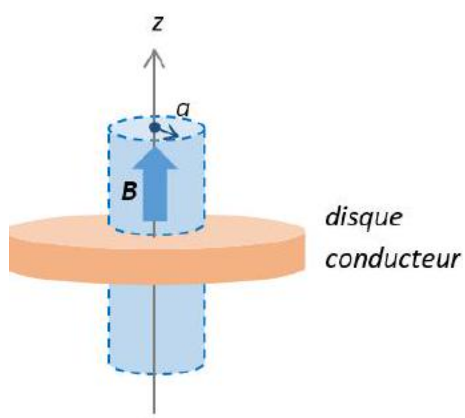


1. Calculer les champs électrique et magnétique entre les armatures en faisant intervenir q(t) et la géométrie du système.
2. Calculer la puissance électromagnétique entrant dans le condensateur lorsque q varie.
3. Montrer que cette puissance s'identifie à la variation d'énergie emmagasinée dans le condensateur.

Exercice 5

On considère le dispositif schématisé ci-après, dans lequel on parvient à générer un champ magnétique $\vec{B}$ variable qui induit des courants électriques dans un disque conducteur de conductivité γ :

$$\vec{B} = \begin{cases} B_0(t)\,\vec{e_z} & \text{pour } r < a \\ \vec{0} & \text{pour } r > a \end{cases}$$



1. Justifier que le champ électrique $\vec{E}$ à l'intérieur du disque s'écrit sous la forme $\vec{E} = E(r,z,t)\vec{e_\theta}$.
2. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday sous forme intégrale, relier $E(r,z,t)$ à $B_0(t)$ (distinguer deux cas).
3. On note b le rayon du disque conducteur et h sa hauteur. Montrer que la puissance dissipée par effet Joule à l'intérieur du disque conducteur s'écrit :

$$p = \frac{\pi\gamma h a^4}{2}\left(\frac{1}{4} + ln(b/a)\right)\left(\frac{dB_0}{dt}\right)^2$$

4. $B_0(t) = B_m cos(\omega t)$, exprimer la puissance moyenne dissipée dans le disque.

Exercice 6

On considère un morceau de matériau conducteur de forme parallélépipède de largeur w et d'épaisseur h dans lequel circule un courant I, et plongé dans un champ magnétique constant et uniforme $\vec{B}$.

On modélise le conducteur comme un réseau d'ions positifs (de charge $+e$) et un gaz d'électrons libres (charges mobiles), tous deux avec une densité volumique n. On donne des ordres de grandeur pour n : $10^{29}\ m^{-3}$ pour le cuivre et $10^{24}\ m^{-3}$ pour le silicium.

La densité de courant dans le conducteur est considérée comme uniforme, selon $\vec{e_x}$.

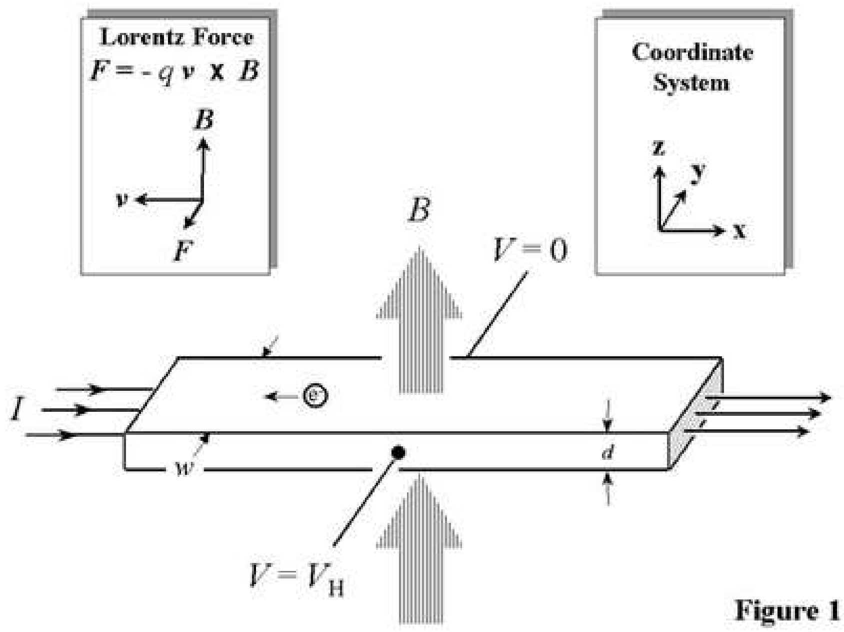
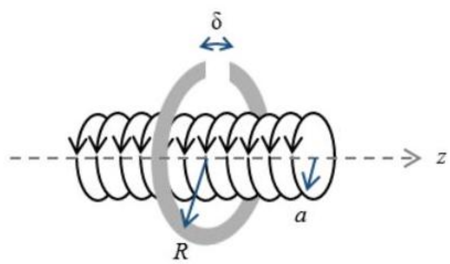


Figure 1

1. La déviation des électrons par la force de Lorentz conduit à des accumulations de charges sur les faces du conducteur parallèles à (Oxy). Indiquer les signes des charges sur ces faces, la direction et le sens du champ électrique (appelé champ de Hall) et le signe de V_H. On considère que le champ de Hall est uniforme dans le conducteur.
2. Après une (brève) période transitoire où les charges sont déviées, la situation conduit à un régime stationnaire, la forces sur les électrons due au champ de Hall compensant la force de Lorentz. Montrer que $\vec{E_H} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$.
3. En déduire l'expression de V_H (en valeur absolue) : $\mid V_H \mid = \frac{I\ B}{n\ e\ d}$. Calculer numériquement $\mid V_H \mid$ pour le cuivre et le silicium avec $d = 1mm$, $I = 1A$ et $B = 1T$. Doit-on plutôt utiliser le cuivre ou le silicium pour fabriquer un teslamètre à effet Hall ?
4. Dans les semiconducteurs, selon le type de dopage, les porteurs de charges majoritaires peuvent être des «trous » de charge positive. Expliquer en quoi le signe de V_H permet de déterminer le signe des charges mobiles.
5. La force résultante sur le conducteur peut être décrite comme celle exercée par le champ de Hall sur le réseau d'ions positifs. Montrer que, pour un volume infinitésimal de matériau dV, cette force s'écrit $d\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B}\ dV$.
6. Montrer que, en passant à une modélisation filiforme du courant I, on retrouve l'expression de la force de Laplace.

Exercice 7

Un solénoïde long, d'axe Oz et de rayon a possède n spires par unité de longueur. Il est entouré d'un mince anneau conducteur, de même axe Oz, de rayon moyen R, présentant un gap (fine ouverture de largeur $\delta \ll R$). On note γ la conductivité du matériau constituant l'anneau.



A partir de l'instant $t = 0$, on instaure un courant $i(t)$ dans le solénoide, égal à :

$$\begin{cases} I \times \frac{t}{\tau} \quad pour \quad t \leq \tau \\ I \quad pour \quad t \geq \tau \end{cases}$$

On considère que l'ARQS est valable.

Données numériques : $I = 10$ A ; $a = 3$ cm ; $n = 10^4$ m^{-1} ; $\tau = 1\,\mu s$; $R = 4$ cm ; $\delta = 1$ mm et $\gamma = 5{\cdot}10^6$ S$\cdot$m^{-1}

1. Déterminer le champ magnétique produit par le solénoide pour $t \geq 0$.
2. On suppose dans un premier temps que l'air situé dans le gap reste isolant. Justifier le fait que, sauf pendant un temps très bref (très nettement inférieur à 0,1 ms) le champ électrique à l'intérieur de l'anneau conducteur est nul.
3. En déduire une expression approchée du champ électrique à l'intérieur du gap et calculer sa valeur numérique.
4. Une étincelle est elle susceptible d'apparaître entre les deux faces en regard de l'anneau ? Si non, quelle valeur de τ faudrait-il ? On rappelle l'ordre de grandeur du champ disruptif de l'air sec : $E_R = 3600\text{kV} \cdot \text{m}^{-1}$.

Exercice 8

On plonge un barreau conducteur cylindrique dans le champ magnétique créé par un solénoïde infini. d'axe (Oz), de rayon $a = 15$ cm, parcouru par un courant électrique I de fréquence 100kHz. On suppose que le cylindre conducteur, de conductivité γ, remplit intégralement l'intérieur du solénoïde et que sa dimension dans la direction de l'axe Oz est très grande. On utilisera la notation complexe pour le courant et les champs ($\underline{E}$ et $\underline{B}$ ne dépendent que de r) :

$$\underline{I}(t) = I_0 \exp(i\omega t)$$

$$\overrightarrow{\underline{B}}(r,t) = \underline{B} \exp(i\omega t)\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{\underline{E}}(r,t) = \underline{E} \exp(i\omega t)\overrightarrow{e_\theta}$$

.

1. Expliquer les formes des champs dans le conducteur, que l'on supposera localement neutre.
2. A l'aide des équations de Maxwell, déterminer deux équations différentielles couplées du premier ordre satisfaites par $\underline{E}$ et $\underline{B}$ pour $r < a$. On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$$

3. Montrer que l'on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction dans le cas d'un cylindre de cuivre $\left(\gamma = 6,0 \cdot 10^7 \text{ Sm}^{-1}\right)$ ou de silicium $\left(\gamma = 1,0 \cdot 10^3 \text{ Sm}^{-1}\right)$ pour une fréquence de 100kHz. Simplifier alors les équations obtenues précédemment.

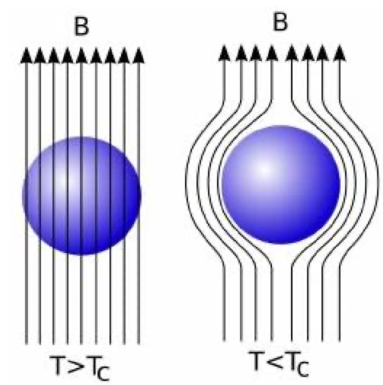
4. Établir l'équation vérifiée par $\underline{E}$. On ne demande pas de résoudre cette équation.

5. Dans cette équation, faire apparaître une grandeur homogène à une longueur, que l'on notera δ. Donner son expression et calculer sa valeur pour le cuivre et le silicium. Quelle est sa signification physique ?

Exercice 9

Certains matériaux, qualifiés de supraconducteurs, voient leur conductivité devenir infinie en dessous d'une température critique T_c.

En refroidissant un tel matériau soumis à un champ magnétique extérieur, le physicien allemand Meissner a constaté que, lorsque T devenait inférieur à T_c, le champ magnétique dans l'environnement immédiat de l'échantillon augmentait brutalement. Il en a déduit que le champ magnétique était comme «éjecté » hors du matériau (i.e. les lignes de $\vec{B}$ ne peuvent plus entrer dans le matériau et doivent le contourner). Ce phénomène, découvert en 1932, est appelé effet Meissner.



Pour expliquer cet effet, les frères London ont proposé d'ajouter aux équations de Maxwell la relation (équation de London) :

$$\overrightarrow{rot}\vec{j} = -\frac{nq^2}{m}\vec{B}$$

où n est le nombre d'électrons libres par unité de volume, q la charge d'un électron et m sa masse.

1. Établir l'équation vérifiée par le champ magnétique dans le matériau en régime stationnaire. Faire apparaître une distance caractéristique et la calculer numériquement pour l'étain (cf. données numériques en fin d'énoncé).

2. On adopte le modèle suivant : le supraconducteur occupe tout l'espace $x > 0$ et le champ à l'extérieur (donc pour $x < 0$) est uniforme et selon $\vec{e_z}$. On admettra que dans le supraconducteur $\vec{B}$ est de la forme :

$$\vec{B} = B(x)\vec{e_z}$$

Résoudre l'équation précédente (il y a continuité du champ magnétique en $x = 0$) et représenter B en fonction de x dans le supraconducteur.

3. Conclure quant au fait que le champ magnétique est «éjecté » hors du matériau.

Données numériques : Pour l'étain, $n = 2,5 \cdot 10^{28}$ m^{-3}. On rappelle par ailleurs que $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg ; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$C et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$H $\cdot$ m^{-1}.