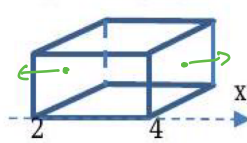


Exercice 1

1. Représenter quelques vecteurs ainsi que les lignes de champ pour le champ de vecteurs $\vec{A}(x, y, z) \rightarrow x\vec{e}_x$. On considère le cube de côté 2 unités représenté sur le schéma.

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} = 1 \quad \text{et} \quad \phi = \iiint \operatorname{div}(\vec{A}) dV = 1 \times 8 = 8$$

$$\begin{aligned} \phi &= \vec{A}(x=2) \cdot (-\vec{e}_x) \cdot 4 \\ &\quad + \vec{A}(x=4) \cdot \vec{e}_x \cdot 4 \\ &= -8 + 16 = 8 \end{aligned}$$

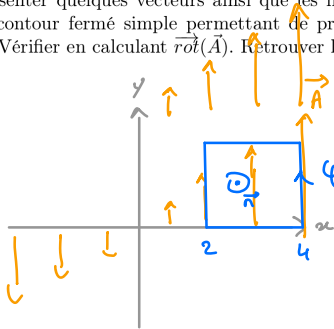


Calculer directement le flux de $\vec{A}$. Retrouver le flux en utilisant le théorème d'Ostrogradsky.

Le champ $A(x, y, z) \rightarrow x\vec{e}_x$ est-il à flux conservatif?

flux non nul / surface fermée $\Rightarrow$ ce n'est pas à flux conservatif.

2. Représenter quelques vecteurs ainsi que les lignes de champ pour le champ de vecteurs $\vec{A}(x, y, z) \rightarrow x\vec{e}_y$. Choisir un contour fermé simple permettant de prouver qu'il n'est pas à circulation conservative et calculer la circulation. Vérifier en calculant $\operatorname{rot}(\vec{A})$. Retrouver la circulation en utilisant le théorème de Stokes.



$$C = \vec{A}(x=4) \cdot (2\vec{e}_y) + \vec{A}(x=2) \cdot (-2\vec{e}_y)$$

$$= 8 - 4 = 4$$

$$\operatorname{rot}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x = \vec{e}_x$$

$$+ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y$$

$$+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$C = \iint \operatorname{rot}(\vec{A}) \cdot \vec{n} dS = 4$$

car A_y ne dépend pas de z

*circulation non conservative
(non nulle sur une
courbe fermée).*

Exercice 2

On suppose que le champ électromagnétique régnant dans une partie de l'espace vide de charges et de courants est donné par

$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) = f(z) \exp(-\alpha t) \vec{u}_x \\ \vec{B}(M, t) = g(z) \exp(-\alpha t) \vec{u}_y \end{cases}$$

1. Les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Thomson sont-elles vérifiées ?
2. Montrer que l'équation de Maxwell Faraday impose une expression de $g(z)$ en fonction de $f'(z)$
3. Montrer que l'équation de Maxwell Ampère impose une expression de $f(z)$ en fonction de $g'(z)$
4. En déduire $f(z)$ en admettant que f est une fonction paire et que $\vec{E}(0, 0) = E_0 \vec{u}_x$.

1. $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ car E_x ne dépend pas de x , donc on a bien $\text{div}(\vec{E}) = 0$,
 en cohérence avec $\text{div}(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0 = 0$ car $\rho = 0$.

même principe pour $\text{div}(\vec{B}) = 0$

2. $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\vec{E} = f(z) e^{-\alpha t} \vec{e}_x = E_x(z) \vec{e}_x$

donc $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{e}_y = f'(z) e^{-\alpha t} \vec{e}_y$

et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\alpha g(z) e^{-\alpha t} \vec{e}_y$

d'où $f'(z) e^{-\alpha t} \vec{e}_y = -(-\alpha g(z) e^{-\alpha t} \vec{e}_y)$

et donc $f'(z) = \alpha g(z)$

3. $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (car $\vec{j} = 0$)

donc, $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = -\frac{\partial B_y}{\partial z} \vec{e}_x = -g'(z) e^{-\alpha t} \vec{e}_x$ car $\vec{B} = B_y(z) \vec{e}_y$

et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\alpha f(z) e^{-\alpha t} \vec{e}_x$

d'où $g'(z) = \mu_0 \epsilon_0 \alpha f(z)$

4. $f'' = (f')'$ donc $f'' = (\alpha g)' = \alpha \mu_0 \epsilon_0 \alpha f$

d'où $f''(z) = \mu_0 \epsilon_0 \alpha^2 f(z) = \frac{\alpha^2}{c^2} f(z)$

solutions : $f(z) = \lambda e^{\frac{\alpha z}{c}} + \mu e^{-\frac{\alpha z}{c}}$

f paire donc $\lambda = \mu$

et $\vec{E}(0, 0) = E_0 \vec{e}_x$ donc $f(0) = E_0$

d'où $E_0 = \lambda + \mu$

et donc $\lambda = \mu = \frac{E_0}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}}(\vec{A}) &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x \\ &+ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y \\ &+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Alors, $f(z) = \frac{E_0}{2} \left(e^{\frac{\alpha z}{c}} + e^{-\frac{\alpha z}{c}} \right)$
 soit $f(z) = E_0 \cosh(\alpha z/c)$

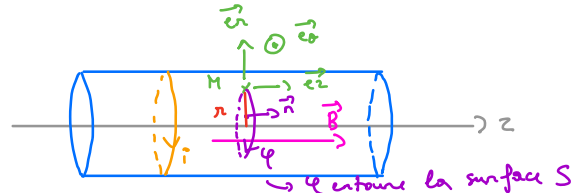
Exercice 3

On considère l'établissement du courant dans un solénoïde de longueur L , de rayon R et comportant N spires considéré comme 'infiniment long'.

1. Etablir l'expression du champ magnétique dans le solénoïde. On admettra que le champ à l'extérieur est nul et on se place dans le cadre de l'ARQS (on calcule le champ magnétique comme en régime stationnaire).
2. Donner l'expression du champ électrique à l'intérieur du solénoïde lorsque i varie.
3. En déduire l'expression du vecteur de Poynting au niveau de la « surface » du solénoïde.
4. Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers la surface extérieure délimitant le solénoïde.
5. Calculer l'énergie magnétique contenue dans le solénoïde.
6. Vérifier la conservation de l'énergie électromagnétique (L'énergie associée au champ électrique peut être négligée).

1. $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{e}_z$ (cf cours --)

2. Il s'agit d'un champ $\vec{E}$ induit par la variation de $\vec{B}$, qui est donné par la loi de Faraday $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} (\oint \vec{B} \cdot d\vec{S})$



on utilise la forme intégrale, sinon il faut tout en cylindriques

- tout plan qui contient (Oz) est plan d'antisymétrie pour les courants, donc pour $\vec{E}$, ainsi $\vec{E}$ est orthogonal (selon $\vec{e}_z$)
- mêmes raisons que $\vec{B}$, $\|\vec{E}\|$ ne dépend que de r

$$\vec{E}(r) = E_0(r) \vec{e}_\theta$$

on utilise la loi de Faraday sur un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r , centré sur (Oz) :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\mathcal{C}} (E_0(r) \vec{e}_\theta) \cdot (d\ell \vec{e}_\theta) = E_0(r) \cdot \oint_{\mathcal{C}} d\ell = E_0(r) \cdot 2\pi r$$

$$\text{et } \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \cdot \pi r^2 \quad (\text{on est à l'intérieur du solénoïde})$$

$$\text{on a donc : } E_0(r) \cdot 2\pi r = - \mu_0 \frac{N}{\ell} \pi r^2 \frac{di}{dt} \quad (\text{seul } i \text{ est variable})$$

$$\text{d'où } \vec{E}(r) = - \frac{\mu_0 N}{2\ell} r \frac{di}{dt} \vec{e}_\theta$$

3. $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(- \frac{\mu_0 N}{2\ell} r \frac{di}{dt} \vec{e}_\theta \right) \wedge \left(\frac{\mu_0 N}{\ell} i \vec{e}_z \right) = - \mu_0 \frac{N^2}{2\ell^2} r i \frac{di}{dt} \vec{e}_r$

$$= - \mu_0 \frac{N^2}{2\ell^2} r \frac{d}{dt} \left(\frac{i^2}{2} \right) \vec{e}_r$$

4. $\phi(\vec{\pi}/\Sigma) = \iint_{\Sigma} \vec{\pi} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} (\pi_r(R) \vec{e}_r) \cdot (dS \vec{e}_z)$ il s'agit du flux sortant

$$= \pi_r(R) \cdot 2\pi R \ell$$

$$\text{donc } \phi(\vec{\pi}/\Sigma) = - \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi R^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{i^2}{2} \right)$$

puissance en sortante

on voit que l'énergie entre dans le bobin si $|i| \uparrow$, ce qui est cohérent avec $\Phi_{\text{bob}} = \frac{1}{2} L i^2$.

5. Cela correspond à $E_{bob} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{l} i^2$

On peut aussi calculer $E_{bob} = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot V$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \left(\mu_0 \frac{N}{l} i \right)^2 \cdot \pi R^2 l$$

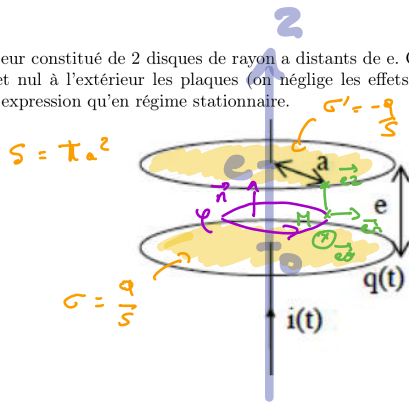
$$= \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{2 l} i^2$$

6. On doit avoir $\frac{dE_{bob}}{dt} = P_{entrante} = - P_{sortante} = - \phi (\vec{r}/z)$

donc $\frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{l} \frac{d}{dt} (i^2) = \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{l} \frac{d}{dt} (i^2/2)$ OK

Exercice 4

Soit un condensateur constitué de 2 disques de rayon a distants de e . On suppose le champ électrique uniforme entre les armatures et nul à l'extérieur des plaques (on néglige les effets de bord) et on considère que le champ électrique a la même expression qu'en régime stationnaire.



1. Calculer les champs électrique et magnétique entre les armatures en faisant intervenir $q(t)$ et la géométrie du système.
2. Calculer la puissance électromagnétique entrant dans le condensateur lorsque q varie.
3. Montrer que cette puissance s'identifie à la variation d'énergie emmagasinée dans le condensateur.

1. entre les armatures, $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{q}{\epsilon_0 S} \vec{e}_z$ (cf cours)
 le champ $\vec{B}$ est un champ $\vec{B}$ induit, qui vérifie : $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 tout plan qui contient l'axe (oz) est plan de symétrie des sources,
 donc $\vec{B}$ ($\perp$ à un tel plan) est antihorizontale (selon $\vec{e}_\theta$) -
 $||\vec{B}||$ ne dépend pas de θ . $\vec{B}(r) = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta$.
 On utilise $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ en version intégrale $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} \right)$
 sur ℓ (cercle de rayon r): $2\pi r B_\theta(r, z) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\pi r^2 \frac{q}{\epsilon_0 S} \right)$
 donc $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 \pi}{2S} \frac{dq}{dt} \vec{e}_\theta$

$$2. \vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{q}{\epsilon_0 S} \vec{e}_z \right) \wedge \left(\frac{\mu_0 \pi}{2S} \frac{dq}{dt} \vec{e}_\theta \right) = \frac{\pi}{2\epsilon_0 S^2} q \frac{dq}{dt} (-\vec{e}_r)$$

On calcule le flux de $\vec{\pi}$ au travers de la surface latérale qui entoure le condensateur (sur laquelle $r=a$):

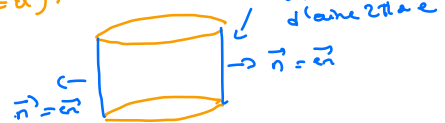
$$\phi(\vec{\pi}/S_{\text{lat}}) = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{\pi} \cdot \vec{n} dS$$

$$= \iint_{S_{\text{lat}}} \frac{a}{2\epsilon_0 S^2} \frac{d}{dt} \left(q^2/2 \right) (-\vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r dS$$

$$= - \frac{a}{2\epsilon_0 S^2} \frac{d}{dt} \left(q^2/2 \right) \cdot 2\pi a \cdot e = - \frac{e \cdot \pi a^2}{\epsilon_0 S^2} \frac{d}{dt} \left(q^2/2 \right)$$

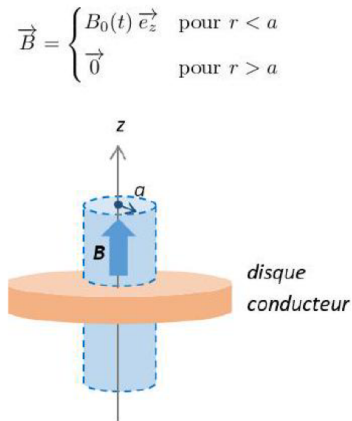
$$\text{d'où } P_{\text{entrante}} = - \phi(\vec{\pi}/S_{\text{lat}}) = \frac{e}{\epsilon_0 S} \frac{d}{dt} \left(q^2/2 \right)$$

3. $P_{\text{entrante}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} \right)$, avec $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$, et $\frac{q^2}{2C}$ est bien l'énergie stockée dans le condensateur -



Exercice 5

On considère le dispositif schématisé ci-après, dans lequel on parvient à générer un champ magnétique $\vec{B}$ variable qui induit des courants électriques dans un disque conducteur de conductivité γ :



- Justifier que le champ électrique $\vec{E}$ à l'intérieur du disque s'écrit sous la forme $\vec{E} = E(r, z, t) \vec{e}_\theta$.
- En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday sous forme intégrale, relier $E(r, z, t)$ à $B_0(t)$ (distinguer deux cas).
- On note b le rayon du disque conducteur et h sa hauteur. Montrer que la puissance dissipée par effet Joule à l'intérieur du disque conducteur s'écrit :

$$p = \frac{\pi \gamma h a^4}{2} \left(\frac{1}{4} + \ln(b/a) \right) \left(\frac{dB_0}{dt} \right)^2$$

- $B_0(t) = B_m \cos(\omega t)$, exprimer la puissance moyenne dissipée dans le disque.

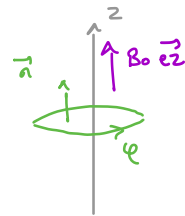
1. $\vec{E}$ est un champ induit dont (les variations de) $\vec{B}$ est la source, il a donc les mêmes symétries : tout plan qui contient (Oz) est un plan d'antisymétrie ($\vec{B}$ est un pseudo vecteur), $\vec{E}$ est orthogonal à un tel plan et est donc orthoradial. Il y a par ailleurs invariance par rotation autour de (Oz) , donc $\vec{E}(r) = E(r, z, t) \vec{e}_\theta$. $\|\vec{E}\|$ ne dépend pas de θ . Donc

2. On obtient $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} (\iint \vec{B} \cdot d\vec{S})$ sur un cercle de rayon r :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E$$

$$\iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \pi r^2 B_0 & \text{si } r \leq a \\ \pi a^2 B_0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \vec{E} = -\frac{r}{2} \frac{dB_0}{dt} \vec{e}_\theta & \text{si } r \leq a \\ \vec{E} = -\frac{a^2}{2r} \frac{dB_0}{dt} \vec{e}_\theta & \text{si } r > a \end{cases}$$



3. Dans le conducteur de conductivité γ , $P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = (\gamma \vec{E}) \cdot \vec{E} = \gamma E^2$

$$\text{Et } P_f = \iiint_{\text{disque conducteur}} P_{\text{vol}} \cdot dV \quad \text{en cylindriques, } dV = r \, dr \, d\theta \, dz$$

Comme P_{total} ne dépend que de r :

$$P_t = \underbrace{\int_0^h dz \times \int_0^{2\pi} d\phi \times}_{2\pi h} \int_0^b P_{\text{total}} r dr$$

$$P_{\text{total}} = \begin{cases} \gamma \frac{r^2}{4} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 & \text{si } r \leq a \\ \gamma \frac{a^4}{4r^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 & \text{si } r > a \end{cases}$$

$$\text{d'où } P_t = 2\pi h \gamma \left(\frac{dB_0}{dt} \right)^2 \left(\underbrace{\int_0^a r^3 dr}_{\frac{a^4}{4}} + \underbrace{\int_a^b \frac{a^4}{r} dr}_{a^4 \ln(b/a)} \right)$$

$$\text{et donc } P_t = \underbrace{\frac{\pi h \gamma a^4}{2} \left(\frac{1}{4} + \ln(b/a) \right)}_{\beta} \left(\frac{dB_0}{dt} \right)^2$$

$$4. \quad \langle P_t \rangle = \beta \left\langle \left(\frac{dB_0}{dt} \right)^2 \right\rangle$$

$$= \beta \langle B_m^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \rangle$$

$$= \beta \frac{B_m^2 \omega^2}{2} \quad \text{car } \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

Exercice 6

On considère un morceau de matériau conducteur de forme parallélépipède de largeur w et d'épaisseur h dans lequel circule un courant I , et plongé dans un champ magnétique constant et uniforme $\vec{B}$.

On modélise le conducteur comme un réseau d'ions positifs (de charge $+e$) et un gaz d'électrons libres (charges mobiles), tous deux avec une densité volumique n . On donne des ordres de grandeur pour n : 10^{29} m^{-3} pour le cuivre et 10^{24} m^{-3} pour le silicium.

La densité de courant dans le conducteur est considérée comme uniforme, selon $\vec{e}_x$.

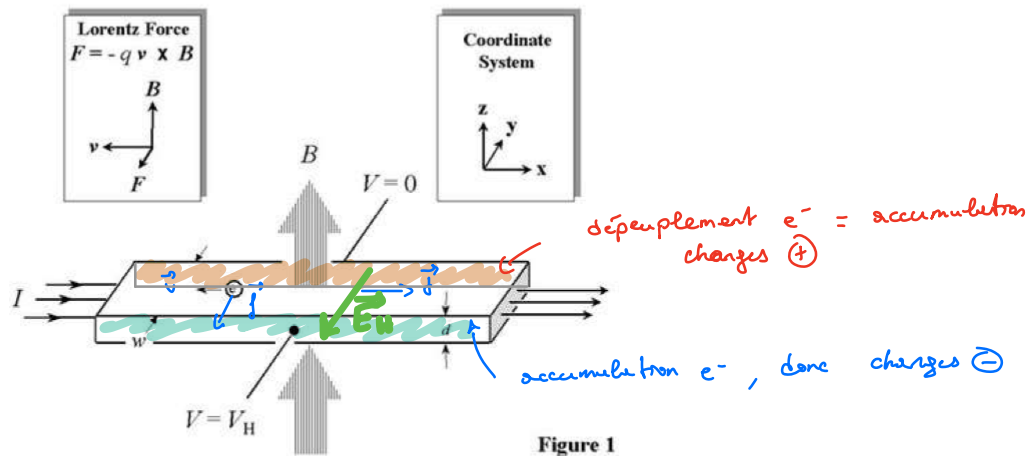


Figure 1

1. La déviation des électrons par la force de Lorentz conduit à des accumulations de charges sur les faces du conducteur parallèles à (Oxy). Indiquer les signes des charges sur ces faces, la direction et le sens du champ électrique (appelé champ de Hall) et le signe de V_H . On considère que le champ de Hall est uniforme dans le conducteur.

2. Après une (brève) période transitoire où les charges sont déviées, la situation conduit à un régime stationnaire, la forces sur les électrons due au champ de Hall compensant la force de Lorentz. Montrer que $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$.

3. En déduire l'expression de V_H (en valeur absolue) : $|V_H| = \frac{I B}{n e d}$. Calculer numériquement $|V_H|$ pour le cuivre et le silicium avec $d = 1 \text{ mm}$, $I = 1 \text{ A}$ et $B = 1 \text{ T}$. Doit-on plutôt utiliser le cuivre ou le silicium pour fabriquer un teslamètre à effet Hall ?

4. Dans les semiconducteurs, selon le type de dopage, les porteurs de charges majoritaires peuvent être des «trous» de charge positive. Expliquer en quoi le signe de V_H permet de déterminer le signe des charges mobiles.

5. La force résultante sur le conducteur peut être décrite comme celle exercée par le champ de Hall sur le réseau d'ions positifs. Montrer que, pour un volume infinitésimal de matériau dV , cette force s'écrit $d\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B} dV$.

6. Montrer que, en passant à une modélisation filiforme du courant I , on retrouve l'expression de la force de Laplace.

1. voir figure. $\vec{E}_H$ est dirigé vers les potentiels décroissants, donc $V_H < 0$.

2. Sur un e^- donné, les 2 forces doivent se compenser, donc
 $-e \vec{v} \wedge \vec{B} + (-e \vec{E}_H) = \vec{0}$, d'où $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$

3. $\vec{j}$ uniforme, donc $I = j \cdot S = j w d = n e v w d$
 $\vec{E}_H$ uniforme, donc $E_H = \frac{|V_H|}{w}$
 Comme $E_H = v \cdot B$, on obtient $\frac{|V_H|}{w} = \frac{I}{n e d} B$

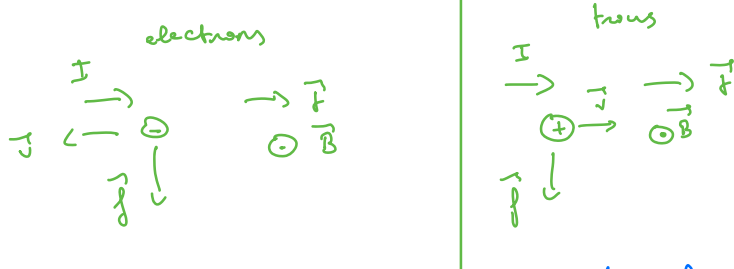
et donc $|V_H| = \frac{I B}{n e d}$

Cuivre : $|V_H| = 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

Silicium : $|V_H| = 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

Le principe d'un teslamètre à effet Hall est de créer cette situation puis de mesurer $|V_H|$ pour en déduire B .
 avec le cuivre, $|V_H|$ est trop faible pour être mesurée.

4.



la force est dans le même sens dans les 2 cas, mais le signe des particules considérées est différent, d'où le signe opposé pour V_H .

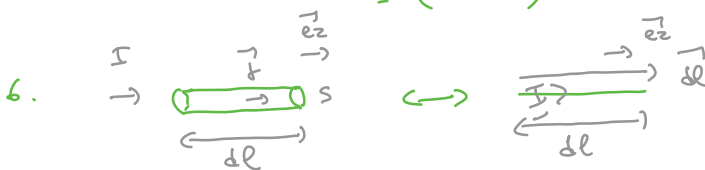
5. Sur un ion $\oplus$ du réseau, de charge e , la force exercée par le champ de Hall s'écrit:

$$\vec{f}_{\text{ion}} = e \vec{E}_H = -e \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} \text{ en RS})$$

pour un volume dV de matériau, il y a $n dV$ ions,

$$\text{d'où} \quad d\vec{f} = n dV \vec{f}_{\text{ion}} = n dV (-e \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$= (-n e \vec{v}) \wedge \vec{B} dV = \vec{j} \wedge \vec{B} dV$$



$$\vec{j} dV = \frac{I}{S} dV \vec{e}_z = \frac{I}{S} \cdot S dl \vec{e}_z = I (dl \vec{e}_z) = I d\vec{l}$$

élément de courant en description volumique

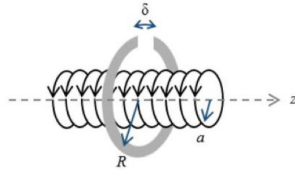
élément de courant en description filiforme

En sommant sur tout le conducteur :

$$\vec{f}_{\text{lap}} = \iiint_V \vec{j} \wedge \vec{B} dV = \int_{\text{fil}} I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Exercice 7

Un solénoïde long, d'axe Oz et de rayon a possède n spires par unité de longueur. Il est entouré d'un mince anneau conducteur, de même axe Oz , de rayon moyen R , présentant un gap (fine ouverture de largeur $\delta \ll R$). On note γ la conductivité du matériau constituant l'anneau.



A partir de l'instant $t = 0$, on instaure un courant $i(t)$ dans le solénoïde, égal à :

$$\begin{cases} I \times \frac{t}{\tau} & \text{pour } t \leq \tau \\ I & \text{pour } t \geq \tau \end{cases}$$

On considère que l'ARQS est valable.

Données numériques : $I = 10 \text{ A}$; $a = 3 \text{ cm}$; $n = 10^4 \text{ m}^{-1}$; $\tau = 1 \mu\text{s}$; $R = 4 \text{ cm}$; $\delta = 1 \text{ mm}$ et $\gamma = 5 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

- Déterminer le champ magnétique produit par le solénoïde pour $t \geq 0$.
- On suppose dans un premier temps que l'air situé dans le gap reste isolant. Justifier le fait que, sauf pendant un temps très bref (très nettement inférieur à $0,1 \text{ ms}$) le champ électrique à l'intérieur de l'anneau conducteur est nul.
- En déduire une expression approchée du champ électrique à l'intérieur du gap et calculer sa valeur numérique.
- Une étincelle est-elle susceptible d'apparaître entre les deux faces en regard de l'anneau ? Si non, quelle valeur de τ faudrait-il ? On rappelle l'ordre de grandeur du champ disruptif de l'air sec : $E_R = 3600 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.

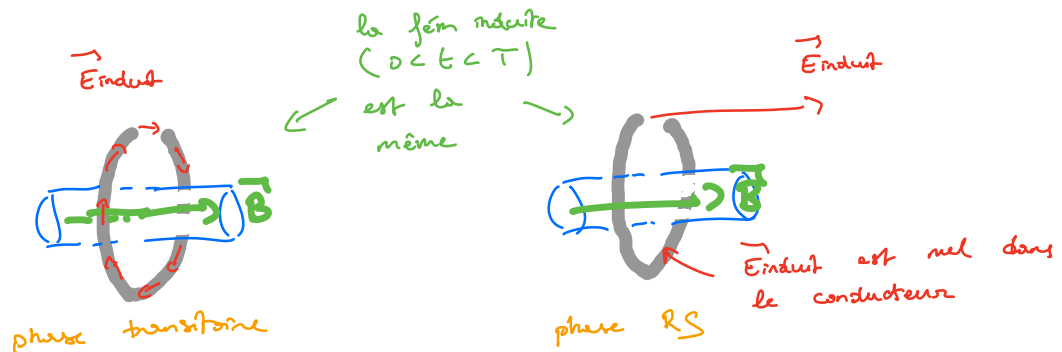
1. Dans l'approximation du solénoïde infini :

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z \text{ si l'intérieur (et nul à l'extérieur)}$$

2. Il y aura un très bref courant électrique, le temps que le régime stationnaire (dans lequel le courant est nul, l'air situé dans le gap restant isolant) s'établisse. Cela prends "quelques τ " où τ est de l'ordre de 10^{-14} , donc $\ll 0,1 \text{ ms}$

⚠ c'est le τ = temps de relaxation associé au mouvement des électrons dans le métal, ce n'est pas le τ associé aux variations de i

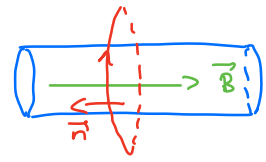
Donc une fois le RS atteint, $\vec{E}$ est nul dans l'anneau conducteur, puisque $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (donc courant nul $\Leftrightarrow \vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$)



$$3. \quad e = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (-B \cdot \pi a^2)$$

$$= \pi a^2 \frac{dB}{dt} = \pi a^2 \mu_0 n \frac{dI}{dt}$$

$$\text{donc} \quad e = \pi a^2 \mu_0 n \frac{I}{T} \quad \text{entre 0 et T} \\ \text{(nul sinon)}$$



⚠ $\vec{n}$ est choisi (volontairement) pour avoir $\phi < 0$, et finalement $e > 0$.

$$\text{Or,} \quad e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\text{anneau conducteur}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\text{gap}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\text{mais} \quad \int_{\text{anneau}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0, \quad \text{puisque (RS ouvert)} \quad \vec{E} = \vec{0} \text{ ds le conducteur}$$

$$\text{et} \quad \int_{\text{gap}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_{\text{gap}} \cdot \delta \quad \left(\text{en admettant } \vec{E} \text{ uniforme dans le gap, d'où le caractère approche} \right).$$

$$\text{finalement,} \quad \boxed{E_{\text{gap}} = \frac{e}{\delta} = \frac{\pi a^2 \mu_0 n I}{\delta T}} \rightarrow \text{entre 0 et T, une fois le RS ouvert}$$

$$4. \quad \text{L' A.N donne} \quad E_{\text{gap}} = 360 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Ce n est pas suffisant face aux $3600 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ du champ de claquage de l'air - Il faut un champ au moins dix fois plus élevé, donc un T au moins dix fois + faible -

Exercice 8

On plonge un barreau conducteur cylindrique dans le champ magnétique créé par un solénoïde infini, d'axe Oz , de rayon $a = 15$ cm, parcouru par un courant électrique $I(t)$ de fréquence 100kHz. On suppose que le cylindre conducteur, de conductivité γ , remplit intégralement l'intérieur du solénoïde et que sa dimension dans la direction de l'axe Oz est très grande. On utilisera la notation complexe pour le courant et les champs :

→ approximation

"solénoïde infini"

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 \exp(i\omega t) \\ \vec{B}(r, t) &= B \exp(i\omega t) \vec{e}_z \\ \vec{E}(r, t) &= E \exp(i\omega t) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

1. Expliquer les formes des champs dans le conducteur, que l'on supposera localement neutre.
2. A l'aide des équations de Maxwell, déterminer deux équations différentielles couplées du premier ordre satisfaites par E et B pour $r < a$. On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$

3. Montrer que l'on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction dans le cas d'un cylindre de cuivre ($\gamma = 6,0 \cdot 10^7 \text{ Sm}^{-1}$) ou de silicium ($\gamma = 1,0 \cdot 10^3 \text{ Sm}^{-1}$) pour une fréquence de 100kHz. Simplifier alors les équations obtenues précédemment.

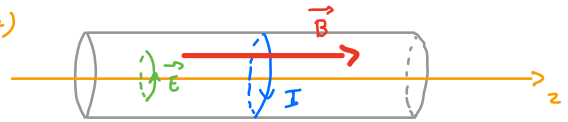
4. Établir l'équation vérifiée par E . On ne demande pas de résoudre cette équation.

5. Dans cette équation, faire apparaître une grandeur homogène à une longueur, que l'on notera δ . Donner son expression et calculer sa valeur pour le cuivre et le silicium. Quelle est sa signification physique ?

1. Il y a invariance par rotation autour de (Oz)

et par translation le long de (Oz)

⇒ E et B ne dépendent que de r .



Tout plan $\perp (Oz)$ est plan de symétrie et $\vec{B}$ est $\perp$ à un tel plan ⇒ $\vec{B} // (Oz)$.

Tout plan qui contient (Oz) est plan d'antisymétrie et $\vec{E} \perp$, donc $\vec{E}$ selon $\vec{e}_\theta$.

2. On part de $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\text{Comme } \vec{E} = E_0(r, t) \vec{e}_\theta, \quad \vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_0)}{\partial r} \vec{e}_z$$

$$\text{On passe ensuite en complexes : } \underline{\vec{E}} = \underline{E}_0(r, t) \vec{e}_\theta = \underline{E} e^{i\omega t} \vec{e}_\theta$$

$$\text{Alors } \vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{E})}{\partial r} e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

$$\text{Et } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (B e^{i\omega t}) \vec{e}_z = i\omega B e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

$$\text{On en déduit : } \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{E})}{\partial r} e^{i\omega t} \vec{e}_z = -i\omega B e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

$$\text{et donc } \frac{d}{dr} (r \underline{E}) = -i\omega r B \quad (1)$$

on peut passer au "d droit" car $\underline{E}$ ne dépend que de r

De la même manière, à partir de $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$:

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = - \frac{dB}{dr} e^{i\omega t} \vec{e}_\theta ; \quad \vec{j} = \gamma \underline{E} = \gamma \underline{E} e^{i\omega t} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = i\omega \underline{E} e^{i\omega t} \vec{e}_\theta$$

donc $-\frac{dB}{dn} = \mu_0 \gamma E + \mu_0 E_0 i\omega E \quad (2)$

3. cela revient à comparer γE et $E_0 \omega E$, donc γ et $E_0 \omega$:

$\underbrace{\gamma E}_{\text{conduction}} \quad \underbrace{E_0 \omega E}_{\text{déplacement}} \quad \underbrace{\gamma}_{10^{-3} \text{ ou } 6 \cdot 10^{-2}} \quad \underbrace{E_0 \omega}_{6 \cdot 10^{-6}}$

avec $f = 100 \text{ kHz}$, $E_0 \omega = 2\pi E_0 f = 6 \cdot 10^{-6} \text{ SI}$, ce qui est faible devant la conductivité, même pour le silicium.

On peut donc négliger le courant de déplacement, l'équation (2) devient :

$-\frac{dB}{dn} = \mu_0 \gamma E \quad (2)$

4.
$$\begin{cases} \frac{d}{dn} (n E) = -i\omega n B & (1) \\ -\frac{dB}{dn} = \mu_0 \gamma E & (2) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{1}{n} \frac{d}{dn} (n E) \right) = \frac{d}{dn} (i\omega B) = -i\omega \frac{dB}{dn} = \overset{(1)}{\rightarrow} \overset{(2)}{\rightarrow} i\omega \mu_0 \gamma E$$

d'où $\frac{d}{dn} \left(\frac{1}{n} \frac{d}{dn} (n E) \right) = i \underbrace{\mu_0 \gamma \omega E}_{\text{homogène à } \frac{1}{\text{distance}^2}}$

homogène à $\frac{E}{\text{distance}^2}$

5. On remarque que $\mu_0 \gamma \omega$ est homogène à $\frac{1}{\text{distance}^2}$, donc on peut poser $\delta = (\mu_0 \gamma \omega)^{-1/2}$.

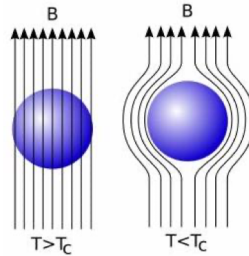
l' A.N donne : $\delta = 0,14 \text{ nm}$ (cuivre)

$\delta = 35 \text{ cm}$ (silicium)

Exercice 9

Certains matériaux, qualifiés de supraconducteurs, voient leur conductivité devenir infinie en dessous d'une température critique T_c .

En refroidissant un tel matériau soumis à un champ magnétique extérieur, le physicien allemand Meissner a constaté que, lorsque T devenait inférieur à T_c , le champ magnétique dans l'environnement immédiat de l'échantillon augmentait brutalement. Il en a déduit que le champ magnétique était comme «éjecté» hors du matériau (i.e. les lignes de $\vec{B}$ ne peuvent plus entrer dans le matériau et doivent le contourner). Ce phénomène, découvert en 1932, est appelé effet Meissner.



Pour expliquer cet effet, les frères London ont proposé d'ajouter aux équations de Maxwell la relation (équation de London) :

$$\vec{\text{rot}} \vec{j} = -\frac{nq^2}{m} \vec{B}$$

où n est le nombre d'électrons libres par unité de volume, q la charge d'un électron et m sa masse.

1. Établir l'équation vérifiée par le champ magnétique dans le matériau en régime stationnaire. Faire apparaître une distance caractéristique et la calculer numériquement pour l'étain (cf. données numériques en fin d'énoncé).

2. On adopte le modèle suivant : le supraconducteur occupe tout l'espace $x > 0$ et le champ à l'extérieur (donc pour $x < 0$) est uniforme et selon $\vec{e}_z$. Résoudre l'équation précédente et représenter B en fonction de x dans le supraconducteur

3. Conclure quant au fait que le champ magnétique est «éjecté» hors du matériau.

Données numériques : Pour l'étain, $n = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$. On rappelle par ailleurs que $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

1. On utilise $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{B})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{B})) - \vec{\Delta}(\vec{B})$

Or, $\text{div}(\vec{B}) = 0$.

De plus, $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{B})) = \vec{\text{rot}}\left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ (régime stationnaire)

$= \mu_0 \vec{\text{rot}}(\vec{j})$

$= -\frac{nq^2}{m} \vec{B}$

↳ équation de London

$= -\frac{\mu_0 n q^2}{m} \vec{B}$

On obtient donc $\vec{\Delta}(\vec{B}) = \frac{\mu_0 n q^2}{m} \vec{B}$

$\frac{\mu_0 n q^2}{m}$ est homogène à l'inverse d'une distance, on peut donc

poser $\delta = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n q^2}}$. A.N : $\delta = 35 \text{ nm}$

2. pour $x \leq 0$, $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

pour $x \geq 0$, $\vec{B} = B(x) \vec{e}_z$

Ainsi, $\vec{\Delta}(\vec{B}) = \frac{d^2 B}{dx^2} \vec{e}_z$

B vérifie donc : $\frac{d^2 B}{dx^2} \vec{e}_z = \frac{1}{\delta^2} B \vec{e}_z$

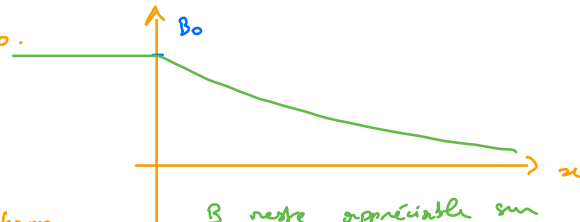
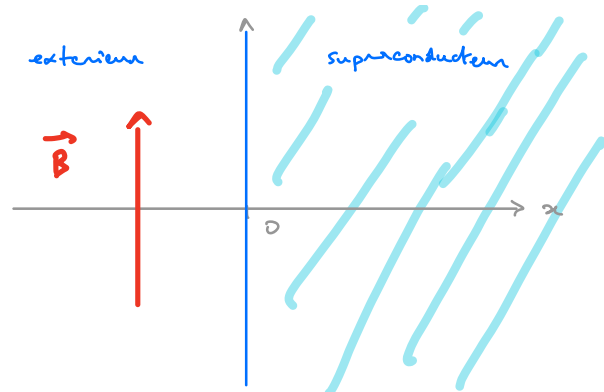
soit $\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{1}{\delta^2} B$

Les solutions sont de la forme $B = \lambda e^{x/\delta} + \mu e^{-x/\delta}$

Mais $B \rightarrow \infty$ n'est pas physiquement acceptable, donc il faut $\lambda = 0$.

Et $B(x=0) = B_0$, donc $\mu = B_0$.

Finalement, $B(x) = B_0 e^{-x/\delta}$



B reste appréciable sur une épaisseur de "quelques δ ", de l'ordre d'une centaine de nm

3. Avec le modèle précédent, le champ $\vec{B}$ n'est notablement non nul dans le supraconducteur que sur une épaisseur inférieure (voire nettement inférieure) au μm , donc nul dans l'essentiel du matériau supraconducteur,

en accord avec l'idée que le champ $\vec{B}$ est "éjecté" hors du matériau.

oo oo
o papa o
oo o o o

-