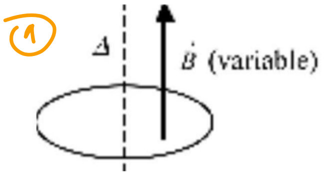
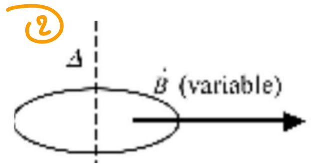
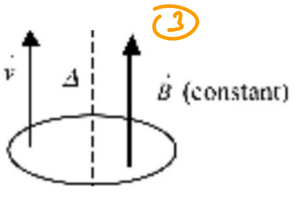
Exercice 1

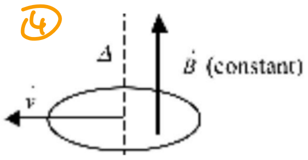
Dans chacun des six cas suivants, calculer la valeur efficace du courant induit dans la spire d'axe (Δ) de surface 10 cm ^{2} et de résistance $0,5\Omega$.

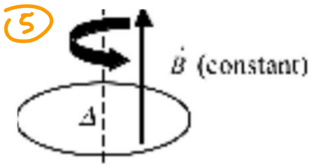
- Cas 1 : la spire est immobile dans un champ magnétique uniforme parallèle à son axe, d'amplitude 0, 1 T et de fréquence 50 Hz.
- Cas 2 : la spire est immobile dans un champ magnétique uniforme orthogonal à son axe, d'amplitude 0, 1 T et de fréquence 50 Hz.
- Cas 3 : la spire se déplace sans changer d'orientation avec une vitesse de 2 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ parallèle à son axe dans un champ magnétique constant et uniforme de 0, 1 T.
- Cas 4 : la spire se déplace sans changer d'orientation avec une vitesse 2 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ orthogonale à son axe dans un champ magnétique constant et uniforme de 0, 1 T.
- Cas 5 : la spire tourne avec une vitesse angulaire de $5\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ autour de son axe dans un champ magnétique constant et uniforme parallèle à son axe de 0, 1 T.
- Cas 6 : la spire tourne avec une vitesse angulaire de $5\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ autour d'un de ses diamètres dans un champ magnétique constant et uniforme parallèle à son axe de 0, 1 T.

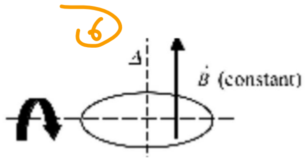








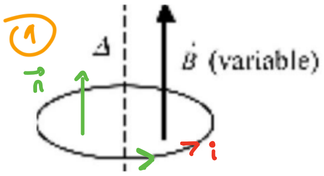




Dans les cas 2 et 4, le flux est nul, donc pas d'induction

Dans les cas 3 et 5, le flux est non nul, mais ne varie pas, donc pas d'induction non plus.

Cas 1 :

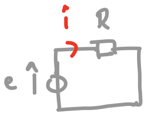


$\phi = BS$

donc $e = -\frac{d\phi}{dt}$

$= -S\frac{dB}{dt}$

circuit électrique équivalent :



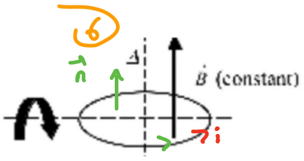
$i = \frac{e}{R}$

On a donc $i = -\frac{S}{R}\frac{dB}{dt}$ et $B = B_0\cos(\omega t)$ donc $\frac{dB}{dt} = -\omega B_0 \sin(\omega t)$

d'où $i = \frac{B_0 S\omega}{R}\sin(\omega t)$, soit $I_m = \frac{B_0 S\omega}{R}$ et donc $I_{eff} = \frac{B_0 S\omega}{R\sqrt{2}}$

A.N : $I_{eff} = 45 \text{ mA}$

cas 6 :



Ici, $\phi = BS\cos\theta$ où θ est l'angle entre $\vec{n}$ et $\vec{B}$.
vitesse angulaire ω constante, donc $\theta = \omega t$
$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(BS\cos(\omega t)\right) = BS\omega\sin(\omega t)$
Le circuit électrique équivalent est le même que précédemment, et $i = \frac{e}{R} = \frac{BS\omega}{R}\sin(\omega t)$

On trouve cette fois $I_{eff} = 0,71 \text{ mA}$

Exercice 2

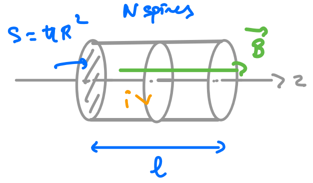
1. On considère un solénoïde de 2000 spires de rayon 5 cm de longueur 80 cm. Calculer son inductance (on se place dans l'approximation du solénoïde infini).

2. Un champ uniforme traverse une bobine de 500 spires de rayon 10 cm (le champ est orthogonal aux spires). Ce champ varie au cours du temps selon $B = B_0 + at$ avec $B_0 = 0,6T$ et $a = 0,03T \cdot s^{-1}$. Calculer la fém induite.

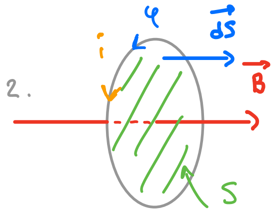
3. Un barreau cylindrique se déplace sur des rails de Laplace distants de 10 cm avec une vitesse de $0,5$ m/s. L'ensemble est soumis à un champ magnétique uniforme d'intensité 30mT. Calculer la fém induite.

1. $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \, \vec{e_z}$ et $\phi = N . B . S = N . B . \pi R^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell} i$

donc $L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell}$ A.N : $L = 49 \text{ mH}$



2.

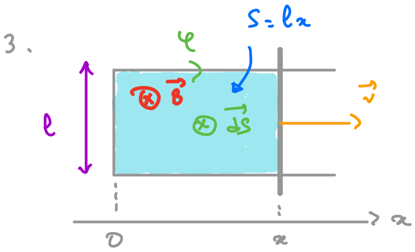


$\phi = BS = (B_0 + at) . \pi R^2$

et $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi R^2 a$ A.N : $e = 0,47 \text{ V}$

⚠ pour 2 et 3, valeurs de e compte-tenu des conventions d'orientation choisies.

3.

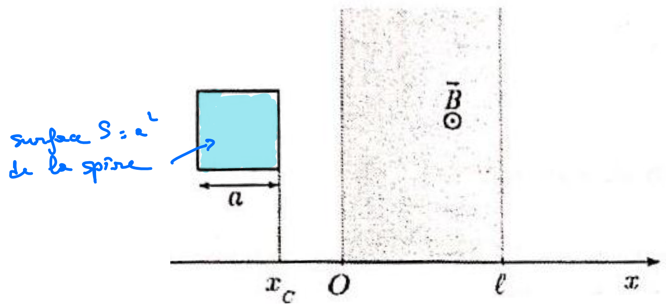


$\phi = BS = B\ell x$

et $e = -\frac{d\phi}{dt} = -B\ell \frac{dx}{dt} = -B\ell v$ A.N : $e = -1,5 \text{ mV}$

Exercice 3

On considère une spire carrée de côté a, en translation rectiligne selon l'axe Ox (la spire est guidée dans un plan horizontal. sans frottement sur la fiqure). Le champ magnétique $\vec{B}$ est uniforme et constant dans la zone de l'espace compris entre $x = 0$ et $x = \ell$ et nul ailleurs.

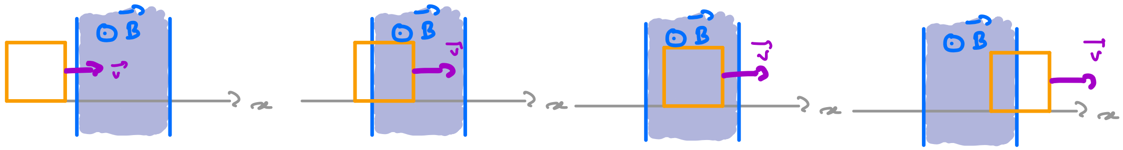


On lance le cadre avec une vitesse $v_0\vec{u}_x$ depuis la partie de champ magnétique nul correspondant à $x < 0$. Le cadre pénètre dans la zone de champ magnétique non nul à $t = 0$ et on étudie ensuite la dynamique du cadre. Le circuit défini par le cadre a une masse m et présente une résistance R. Son inductance propre est supposée négligeable.

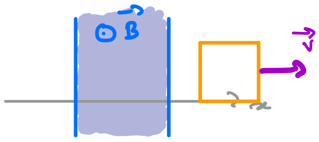
1. En faisant une analyse des phénomènes physiques intervenant au cours du déplacement du circuit, décrire qualitativement des différentes phases de son mouvement.

2. Etablir l'expression de la vitesse du cadre en distinguant les différentes phases du mouvement.

1. Il y a un phénomène d'induction si le flux au travers de S varie au cours du temps, ce qui implique que le cadre soit partiellement dans la zone de champ $\vec{B}$:



① pas d'induction ② induction ③ pas d'induction ④ induction

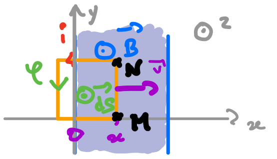


⑤ pas d'induction

Lorsqu'il y a un φ d'induction (cas ② et ④), il en résulte un ralentissement via l'apparition d'une force de Laplace qui s'oppose au mouvement (conformément à la loi de Lenz). Il y a donc un mouvement à vitesse constante dans les phases ①, ③ et ⑤ ; et un mouvement avec une vitesse qui diminue lors des phases ② et ④.

On pourrait penser que la vitesse réaugmente lors de la phase ④, mais cela contredirait la loi de Lenz ainsi que la conservation de l'énergie (si l'énergie cinétique du cadre diminue, elle est finalement dissipée par effet Joule, mais il n'y a rien qui permette d'augmenter l'ec.)

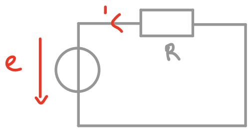
2. phase ② :



$\phi = B\,a\,x$ (la surface à l'intérieur du cadre et traversée par le champ vaut ax)

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -B\,a\,\frac{dx}{dt} = -B\,a\,v$$

circuit électrique équivalent :



$i = \frac{e}{R}$ donc $i = -\frac{B\,a\,v}{R}$

La force de Laplace sur l'ensemble du cadre est égale à celle qui s'exerce sur la partie MN, puisque sur la partie gauche le champ $\vec{B}$ est nul et sur les parties horizontales les forces se compensent.

Donc $\vec{f}_{lap} = i\,\vec{MN} \wedge \vec{B} = i(a\,\vec{e_y}) \wedge (B\,\vec{e_z}) = i\,a\,B\,\vec{e_x}$

D'où, en remplaçant i : $\vec{f}_{lap} = -\frac{(B\,a)^2}{R}\,v\,\vec{e_x}$

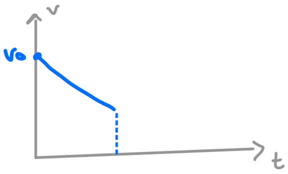
On voit que cette force de Laplace s'oppose bien au mouvement

On écrit ensuite la 2° loi de Newton pour le cadre :

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_{lap}$ donc, en projetant sur $\vec{e_x}$: $m\frac{dv}{dt} = -\frac{(B\,a)^2}{R}\,v$

soit $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = 0$ avec $\boxed{\tau = \frac{mR}{(B\,a)^2}}$

Solution : $\boxed{v = v_0\,e^{-t/\tau}}$



On peut vérifier l'aspect dimensionnel :

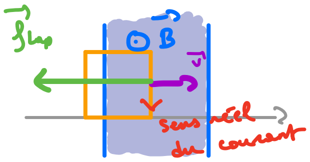
$f_{lap} = i\,l\,B$ donc $B\,a$ homogène à f/i

donc $\frac{mR}{(Ba)^2} = \frac{m\,R\,i^2}{f^2}$ et $R\,i^2$ est une puissance donc homogène à $f.v$

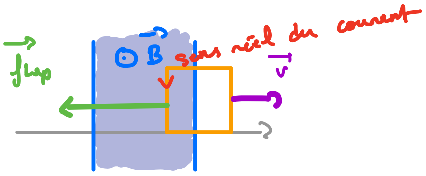
donc $\frac{mR}{(Ba)^2} = \frac{m.v.f}{f^2} = \frac{m.v}{f}$ ce qui est bien homogène à un temps $\left(\frac{kg.m.s^{-1}}{kg.m.s^{-2}} = s\right)$

cette solution " dure " jusqu'à ce que le cadre soit entièrement dans la zone de champ $\vec{B}$.

Lors de la phase ④, c'est exactement la même chose (avec une vitesse initiale moindre), mais la force de Laplace s'applique car la fém et le courant sont inversés, mais la force de Laplace s'applique cette fois sur la gauche du cadre, et la force est finalement dans le même sens.



phase ②

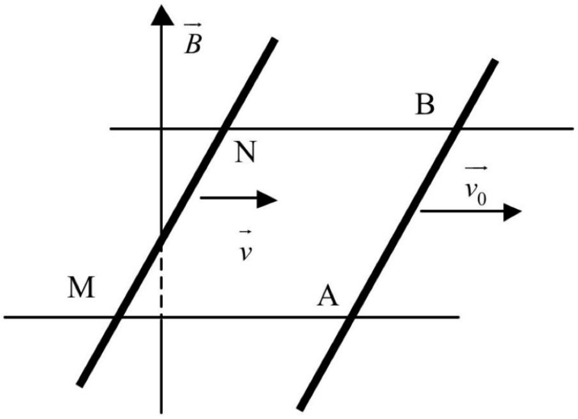


phase ④

Exercice 4

Deux barreaux mobiles cylindriques de masse m peuvent rouler sur des rails « infinis » conducteurs parallèles, écartés d'une distance a. Le barreau (AB) se déplace à vitesse constante vo, sous l'effet d'une force $\mathbf{f_{op}}$. Le barreau (MN) est initialement immobile. Les deux barreaux sont plongés dans un champ magnétique constant et uniforme, orthogonal au plan des rails.

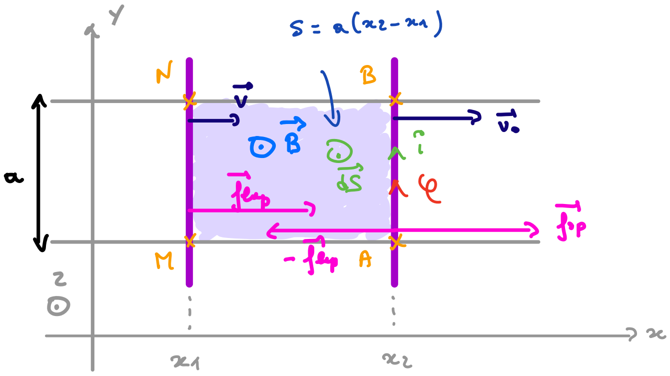
On note R la résistance des barreaux (résistance entre les points de contact avec les rails) et on néglige la résistance des rails.



1. Justifier qualitativement la mise en mouvement du barreau (MN), préciser le sens.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de (MN).
3. Résoudre cette équation. Identifier en particulier la vitesse limite et la constante de temps associée à ce régime transitoire.
4. Faire un bilan énergétique. Commenter en distinguant le régime transitoire et le régime permanent.

1. Du fait du déplacement du barreau AB, la surface ABMN augmente, l'effet du courant induit va donc être (via la force de Laplace) de s'opposer à cette $\nearrow$ de surface en déplaçant le barreau MN. En conséquence, le barreau MN " suit " le barreau AB.

2. On calcule d'abord le fém :



$\phi = B\,S = B\,a\,(x_2 - x_1)$

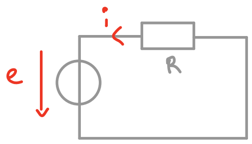
et $e = -\dfrac{d\phi}{dt} = -B\,a\left(\underbrace{\dfrac{dx_2}{dt}}_{v_0} - \underbrace{\dfrac{dx_1}{dt}}_{v}\right)$

donc $e = -B\,a\,(v_0 - v)$

On calcule ensuite i avec le circuit électrique équivalent :

$i = \dfrac{e}{R}$, et donc $i = -\dfrac{Ba}{R}(v_0 - v)$

$v_0 > v$, donc $i < 0$



On peut alors calculer la force de Laplace qui s'exerce sur le barreau MN :

$\vec{f_{lap}} = i\,\vec{NM} \wedge \vec{B} = i(-a\,\vec{e_y}) \wedge (B\,\vec{e_z}) = -iaB\,\vec{e_x}$

et donc, en remplaçant i : $\vec{f_{lap}} = \frac{(aB)^2}{R}(v_0 - v)\,\vec{e_x}$ $\vec{f_{lap}}$ est vers la droite

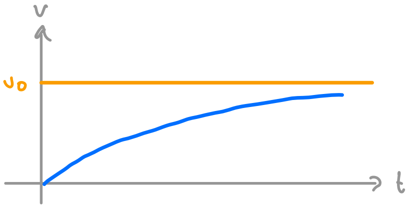
On utilise enfin la 2° loi de Newton appliquée au barreau MN. Seule la force de Laplace est à prendre en compte, il n'y a pas de frottements et poids / réaction normale se compensent.

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f_{lap}}$ donc, en projetant sur $\vec{e_x}$: $m\frac{dv}{dt} = \frac{(aB)^2}{R}(v_0 - v)$

Soit, en posant $\underline{\tau = \frac{mR}{(aB)^2}}$: $\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = \frac{1}{\tau}v_0}$

3. $v = \underbrace{\lambda e^{-t/\tau}}_{sh} + \underbrace{v_0}_{sp}$ et $v(t=0) = 0$ donc $\lambda = -v_0$

ainsi, $\underline{v = v_0(1 - e^{-t/\tau})}$



4.
- pendant la phase transitoire :
  l'énergie fournie par $\vec{f_{op}}$ est en partie dissipée par effet Joule et sert pour l'autre partie à augmenter l'ec du barreau MN

- une fois le régime permanent atteint ($v = v_0$) :
  toute l'énergie fournie par $\vec{f_{op}}$ est dissipée par effet Joule

Plus formellement : $P_{op} = \vec{f_{op}} \cdot \vec{v_0}$ et $\underset{\text{sur le barreau AB}}{\vec{f_{op}}} = \underset{\text{sur le barreau MN}}{\vec{f_{lap}}}$ car le barreau AB subit $\vec{f_{op}}$ et $-\vec{f_{lap}}$ et a un mouvement R. U donc $\vec{f_{op}} - \vec{f_{lap}} = \vec{0}$

Donc $P_{op} = \vec{f_{lap}} \cdot \vec{v_0} = -iaBv_0$ car $\vec{f_{lap}} = -iaB\,\vec{e_x}$

On reprend ensuite l'équation « électrique » : $e = Ri$ donc $-Ba(v_0 - v) = Ri$ car $e = -Ba(v_0 - v)$

et on multiplie par i : $-iBav_0 + iBav = Ri^2$

On reprend également l'équation « mécanique » : $m\frac{dv}{dt} = -iaB$

et on multiplie par v : $mv\frac{dv}{dt} = -iaBv$ et on remarque que $mv\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

Donc $\underbrace{-iBav_0}_{P_{op}} + \underbrace{iBav}_{-\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)} = Ri^2$ s'interprète comme $P_{op} - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = Ri^2$

soit $\boxed{P_{op} = \frac{de_c}{dt} + Ri^2}$ effet Joule

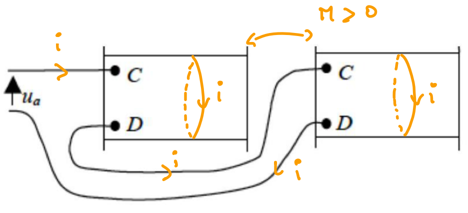
fournie par l'opérateur ↗ de ec (régime transitoire)

Exercice 5

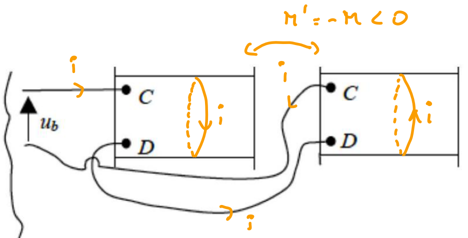
On dispose de deux bobines identiques (S_1) et (S_2) chacune d'inductance propre L et de résistance Ohmique $r = 8\Omega$. On repère les bornes de chaque bobine par les lettres C et D. Les deux bobines sont placées à proximité l'une de l'autre. On les connecte en série sans les déplacer de manière à créer un nouveau dipôle. La connexion se fait selon les deux possibilités suivantes :

On alimente successivement chacun des dipôles (a) et (b) par un courant sinusoïdal de fréquence $f = 2\text{KHz}$. La mesure du module de l'impédance donne $Z_a = 375\Omega$ et $Z_b = 225\Omega$.

En déduire les valeurs de l'inductance propre L de chaque bobine et de l'inductance mutuelle M des deux bobines (on précisera les orientations choisies).

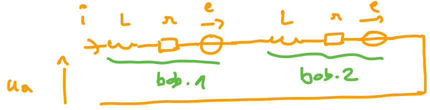


Dipôle (a) : la borne D de (S_1)
est reliée à la borne C de (S_2)

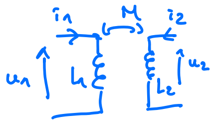


Dipôle (b) : la borne D de (S_1)
est reliée à la borne D de (S_2)

La différence entre les 2 situations peut se résumer au signe de l'inductance mutuelle.
On peut donc faire toute la mise en équation en considérant le premier cas, puis en déduire le second en remplaçant M par −M.



Rappel de cours : interaction entre 2 bobines



$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 i_1 + M i_2$

Alors $e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$

En considérant, du point de vue des conventions, e_1 dans le même sens que i_1, donc $u_1 = -e$

Et donc $u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$

Si l'on prend en compte la résistance de la bobine, on ajoute $r_1 i_1$

De la même manière, $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$

Soit $\Phi_2 = M i_1 + L_2 i_2$

et donc $u_2 = -e_2 = M \frac{di_1}{dt} + L \frac{di_2}{dt} \; (+ r_2 i_2)$

Pour chaque bobine, on modélise l'induction propre par

et l'induction extérieure par

Le courant qui traverse les 2 bobines étant le même, pour chaque bobine $u = L\frac{di}{dt} + ri - e$

Et $e_{ext} = -\frac{d\Phi_{ext}}{dt} = -\frac{d}{dt}(Mi) = -M\frac{di}{dt}$

D'où $u = L\frac{di}{dt} + ri + M\frac{di}{dt}$

Et comme $u_a = 2u$, on obtient :

$u_a = 2*\left(L\frac{di}{dt} + ri + M\frac{di}{dt}\right)$

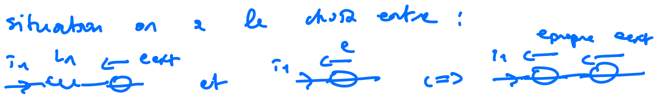
$\Rightarrow \underline{u_a} = 2\left(r + (L+M)j\omega\right)\underline{i} \Rightarrow Z_a = 4\sqrt{r^2 + (L+M)^2\omega^2}$

de même, (même principe, mais $M \leftrightarrow -M$) :

On connaît r, Z_a, Z_b, d'où $L+M$ et $L-M$. $\quad Z_b = 4\sqrt{r^2 + (L-M)^2\omega^2}$

les A.N donnent $L = 11{,}9$ mH et $M = 2{,}99$ mH.

Finalement, pour modéliser une bobine dans cette situation on a le choix entre :



$e_{ext} = -M\frac{di_2}{dt}$ $\qquad e = -L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$ $\qquad e_{propre} = -L_1 \underline{di_1}$