

**Exercice 6**

1. On retrouve une situation simple vue dans le résumé de cours : On note  $B = B_0 \cos(\omega t)$  et le flux est égal à  $\phi = BS = B_0 S \cos(\omega t)$ , en utilisant la loi de Faraday on obtient  $e_{ind} = \omega B_0 S \sin(\omega t)$ , c'est à dire que l'amplitude est  $E_{ind} = \omega B_0 S$ .

Application numérique :  $E_{ind} = 0,12V$

2. Le circuit électrique équivalent est simplement une source de tension  $e_{ind}$  aux bornes d'une résistance. On en déduit que le courant (orienté

dans le même sens que  $e_{ind}$ ) est  $i = \frac{e_{ind}}{r}$ , d'où son

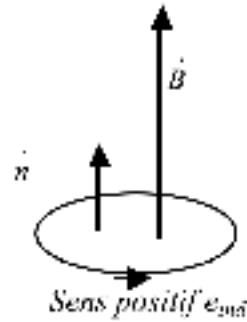
amplitude :  $I_m = \frac{\omega B_0 S}{r}$ . Application numérique :  $I_m = 0,12A$

3. Le courant induit s'oppose par ses effets à la variation de flux (loi de Lenz), de ce fait en négligeant le champ magnétique qu'il créé on surestime la variation de flux, donc la fém induite et donc le courant induit.

4. L'application numérique donne  $L = 0,39 \mu H$

5. Le flux associé à l'auto induction est donné par  $\phi' = Li$  et la fém correspondante est donc  $e'_{ind} = -\frac{d\phi'}{dt} = -L \frac{di}{dt}$ .

Comme  $i$  est sinusoïdal, on en déduit  $E'_{ind} = L\omega I_m$ . L'application numérique donne  $E'_{ind} = 15 \mu V$ , l'auto induction est ici effectivement négligeable.

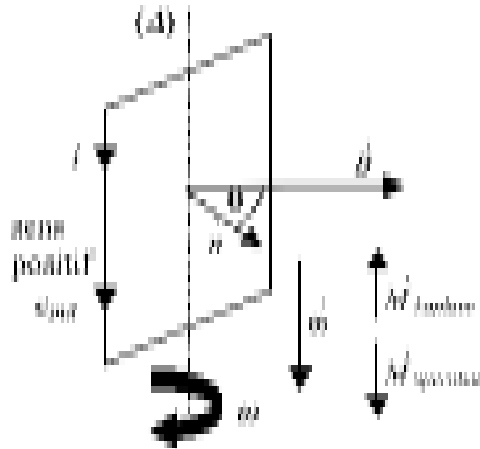


**Exercice 7**

1. Il faut que le flux du champ magnétique au travers des spires soit le plus élevé possible d'où, par exemple, la configuration suivante.

2. D'après la loi de Lenz le courant induit tend à s'opposer à la cause qui lui donne naissance, c'est à dire ici la rotation de la bobine. Le moment des forces de Laplace est donc de sens opposé au vecteur rotation, et le couple qui permet de maintenir la rotation est dans le même sens que le vecteur rotation.

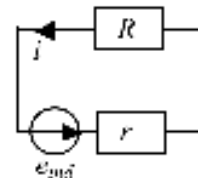
3. On néglige l'auto induction dans la bobine, on la modélise donc par une source de tension  $e_{ind}$  associée au mouvement de rotation en série avec sa résistance interne  $r$ .



On calcule  $e_{ind}$  avec la loi de Faraday : avec les notations du schéma,

$$e_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} \text{ et } \phi = N \vec{B} \cdot \vec{n} S = N B S \cos \theta, \text{ d'où } e_{ind} = -N B S \frac{d(\cos \theta)}{dt}$$

Et donc  $e_{ind} = N B S \omega \sin(\omega t)$  puisque,  $\omega$  étant constante,  $\theta = \omega t$ .



4. Le schéma électrique équivalent permet d'obtenir  $i = \frac{e_{ind}}{r + R}$ , et donc  $i = \frac{N B S \omega \sin(\omega t)}{r + R}$ .

La puissance dissipée par effet Joule dans l'ensemble (bobine et résistance  $R$ ) est donnée par  $P_J = (r + R) i^2$ , soit

$$P_J = \frac{(N B S \omega \sin(\omega t))^2}{r + R}$$

5. D'un point de vue mécanique la puissance du couple  $P_{opérateur}$  est égale, en valeur absolue, à celle des forces de Laplace (puisque, la vitesse angulaire étant constante,  $\vec{M}_{opérateur} + \vec{M}_{Laplace} = \vec{0}$ ). D'un point de vue électrique, toujours en valeur absolue, la puissance associée à la fém est égale à la puissance dissipée par effet Joule. Etant donné que d'une manière générale  $|P_{Laplace}| = |P_{fém}|$ , on en déduit que  $P_{opérateur} = P_J$ .

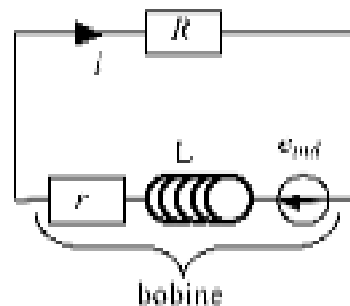
Enfin,  $P_{opérateur} = \vec{M}_{opérateur} \cdot \vec{\omega} = \omega M_{opérateur}$ . On en déduit que  $M_{opérateur} = \frac{\omega (NBS \sin(\omega t))^2}{r + R}$

Ce  $M_{opérateur}$  est algébrique, ce n'est pas la norme de  $\vec{M}_{opérateur}$  mais sa projection sur la direction définie par le vecteur unitaire  $\vec{u} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$  :  $\vec{M}_{opérateur} = M_{opérateur} \vec{u}$ .

6. On peut assimiler la bobine à un moment magnétique  $\vec{m} = NiS\vec{n}$  (l'orientation de  $\vec{n}$  est cohérente avec celle du courant) et le moment des forces de Laplace est donné par  $\vec{M}_{Laplace} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ , d'où  $\vec{M}_{Laplace} = NiS\vec{n} \wedge \vec{B} = NiSB \sin\theta (-\vec{u})$  et comme  $\vec{M}_{opérateur}$  en est l'opposé, on a finalement  $\vec{M}_{opérateur} = NiSB \sin\theta \vec{u}$  et donc  $M_{opérateur} = NiSB \sin\theta$  et on retrouve le résultat de la question précédente en remplaçant  $i$  par son expression.

### Exercice 8

1. Pour modéliser la bobine, on associe en série la résistance interne, une inductance pure et la fém induite du fait de la rotation notée  $e_{ind}$  (on aurait pu aussi ne pas faire figurer l'inductance et prendre en compte dans  $e_{ind}$  les deux contributions, celle associée à la rotation et celle associée à l'auto induction). Le calcul de  $e_{ind}$  a déjà été fait plusieurs fois (voir résumé de cours ou exercice précédent) et donne :  $e_{ind} = NBS\omega \sin(\omega t)$ . La modélisation électrique donne :



$e_{ind} = (r + R)i + L \frac{di}{dt}$ . L'équation différentielle vérifiée par  $i$  est donc, en posant  $\tau = \frac{L}{r + R}$  :

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{NBS\omega}{L} \sin(\omega t)$$

2. La solution la plus générale est la somme de la solution homogène et d'une solution particulière sinusoïdale :

$i = i_h + i_p = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + I_m \cos(\omega t + \varphi)$ . La solution homogène correspond à un régime transitoire, qui s'amortit au bout de quelques  $\tau$ , alors que la solution particulière correspond au régime permanent sinusoïdal (tout cela revient à considérer la réponse d'un circuit RL à une excitation sinusoïdale). Application numérique :  $\tau = 0,47 \text{ ms}$

3. Il faut calculer  $I_m$ , on utilise pour cela la notation complexe et on pose  $\underline{i}_p = I_m e^{j\omega t} e^{j\varphi}$  (ainsi  $i_p = \text{Re}(\underline{i}_p)$  :

L'équation vérifiée par  $\underline{i}_p$  est  $\frac{d\underline{i}_p}{dt} + \frac{1}{\tau}\underline{i}_p = \frac{NBS\omega}{L}(-j)e^{j\omega t}$ , ce qui donne

$I_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} (j\omega + \frac{1}{\tau}) = \frac{NBS\omega}{L}(-j)e^{j\omega t}$ . L'égalité des modules donne  $I_m = \frac{NBS\omega}{L\sqrt{\omega^2 + (1/\tau)^2}}$

Application numérique :  $I_{eff} = 0,23 \text{ A}$  (le courant étant sinusoïdal,  $I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ )

### Exercice 9

1. Le champ magnétique créé en  $O_2$  par la bobine 1 s'écrit :  $\vec{B}_1(O_2) = \frac{\mu_0 i_1}{2} \frac{R_1^2}{(R_1^2 + O_1 O_2^2)^{3/2}} \vec{e}_z$ . Avec

l'approximation  $\vec{B}_1(M) \approx \vec{B}_1(O_2)$  pour un point  $M$  du disque qui s'appuie sur  $C_2$ , le flux de  $\vec{B}_1$  à travers ce disque orienté suivant  $+\vec{e}_z$  sera :

$$\Phi_{12} = \vec{B}_1(O_2) \cdot \pi R_2^2 \vec{e}_z = \frac{\mu_0 i_1}{2} \frac{R_1^2}{(R_1^2 + O_1 O_2^2)^{3/2}} \pi R_2^2.$$

On en déduit immédiatement le coefficient d'inductance :  $M_{12} = \frac{\mu_0}{2} \frac{R_1^2}{(R_1^2 + O_1 O_2^2)^{3/2}} \pi R_2^2$ .

2. De la même manière, on obtient :  $M_{21} = \frac{\mu_0}{2} \frac{R_1^2}{(R_1^2 + O_1 O_2^2)^{3/2}} \pi R_2^2$

3. Dans la mesure où  $O_1 O_2 \gg R_1$  et  $R_2$ , les dénominateurs des deux expressions sont quasiment égaux et on a bien

$$M_{12} \approx M_{21}$$

### Exercice 10

1. Comme toujours, il faut commencer par introduire l'intensité  $i$  qui circule et choisir un sens positif. On choisit (par exemple !) le sens positif indiqué sur le schéma ci-après. Pour obtenir l'équation électrique, il faut calculer la fém induite. On utilise la loi de Faraday.

Avec le sens positif choisi, la normale à la surface plane qui s'appuie sur le circuit est  $\vec{n} = \vec{e}_z$  et le flux du champ magnétique s'écrit, comme  $\vec{B}$  est uniforme :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} \text{ avec } \vec{S} = S \vec{e}_z \text{ si } S \text{ est l'aire hachurée sur le schéma.}$$

En notant  $S_0$  est l'aire limitée par l'axe vertical en pointillé et le circuit fixe, on a

algébriquement :  $S = S_0 - \frac{1}{2} a^2 \theta$ , car  $\frac{1}{2} a^2 \theta$  est l'aire limitée par le secteur circulaire d'angle  $\theta$ .

$$\text{Le flux est finalement : } \Phi = B \left( S_0 - \frac{1}{2} a^2 \theta \right).$$

$$\text{La loi de Faraday conduit à : } e_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt} = + \frac{1}{2} B a^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Le schéma électrique équivalent est du même type que celui des exercices précédents. Il conduit à l'équation électrique habituelle :

$$e_{ind} = + \frac{1}{2} B a^2 \frac{d\theta}{dt} = R i.$$

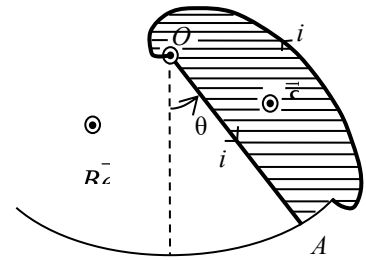
Il reste à obtenir l'autre équation électromécanique. Pour cela, on applique le théorème du moment cinétique en projection suivant  $(Oz)$ . Comme la liaison est pivot parfaite, le moment en projection suivant  $(Oz)$  des actions de liaison est nul. Il en va de même pour les actions associées au contact glissant en  $A$ , supposé ponctuel et sans frottement. Les seuls moments à prendre en compte sont ceux du poids et des forces de Laplace.

Pour le poids, on sait qu'il est équivalent à une force ponctuelle unique appliquée au centre de gravité :

$$\vec{M}_{O(Poids)} = \vec{OG} \wedge m \vec{g} = \frac{a}{2} \vec{e}_r \wedge mg (\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta) = -mg \frac{a}{2} \sin(\theta) \vec{e}_z.$$

En coordonnées cylindriques :  $d\vec{f} = i dr \vec{e}_r \wedge B \vec{e}_z = -i B dr \vec{e}_\theta$  et donc :

$$\vec{M}_{O(Laplace)} = \int_0^a r \vec{e}_r \wedge (-i B dr \vec{e}_\theta) = -i B \vec{e}_z \int_0^a r dr = -i B \frac{a^2}{2} \vec{e}_z.$$



Et en projection suivant  $(Oz)$  :  $M_{Oz(Laplace)} = -iB \frac{a^2}{2}$ .

*On remarque que le moment précédent aurait pu s'obtenir en considérant que l'on a affaire à*

*une force ponctuelle égale à la résultante des forces de Laplace  $\vec{R}_{(Laplace)} = \int_0^A \vec{df} = -i l B \vec{e}_0$ ,*

*appliquée au centre de gravité de la tige. C'était prévisible car la force de Laplace est ici répartie uniformément le long de la tige. Mais ce résultat n'est pas général. Il est donc prudent de savoir calculer le moment des forces à partir de sa définition !*

Le théorème du moment cinétique en projection suivant  $(Oz)$  s'écrit finalement :

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M_{Oz} = -mg \frac{a}{2} \sin(\theta) - iB \frac{a^2}{2}. \text{ En remplaçant l'expression de } i \text{ obtenue avec l'équation électrique,}$$

$$i = + \frac{1}{2R} B a^2 \frac{d\theta}{dt}, \text{ il vient : } \boxed{J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \frac{a}{2} \sin(\theta) - \frac{B^2 a^4}{4R} \frac{d\theta}{dt}}$$

On voit que les courants induits se traduisent par un terme de freinage proportionnel à la vitesse angulaire. C'est un cas classique de freinage par induction.

2. Si l'on se limite à de petites oscillations autour de  $\theta = 0$ , on peut linéariser le sinus en  $\sin(\theta) \approx \theta$  et on est

conduit à l'équation linéaire du second ordre :  $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{B^2 a^4}{4RJ} \frac{d\theta}{dt} + \frac{mga}{2J} \theta = 0$ . La forme des solutions dépend du signe

du discriminant  $\Delta = \left( \frac{B^2 a^4}{4RJ} \right)^2 - 4 \frac{mga}{2J}$ . La limite entre le régime oscillant et le régime aperiodique correspond au

régime aperiodique critique pour lequel on a un retour le plus rapide possible sans oscillation :

$$\boxed{\Delta = \left( \frac{B_{\min}^2 a^4}{4RJ} \right)^2 - 4 \frac{mga}{2J} = 0}. \text{ Ce qui donne la valeur de } B_{\min}.$$

3. L'énergie mécanique du pendule est transformée en énergie thermique ou (lumineuse) via l'effet Joule. On doit

donc avoir :  $\frac{dE_m}{dt} = -Ri^2$ . L'expression de l'énergie mécanique est  $E_m = E_c + E_p$ . Avec  $E_c = \frac{1}{2} J \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$  et

$E_p = mg \frac{a}{2} (1 - \cos(\theta))$ , en prenant l'origine de l'énergie potentielle en  $\theta = 0$ . On a donc :

$$E_m = \frac{1}{2} J \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mg \frac{a}{2} (1 - \cos(\theta)) \text{ et } \frac{dE_m}{dt} = J \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mg \frac{a}{2} \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt}. \text{ L'équation qui traduit le théorème du}$$

moment cinétique en projection suivant  $(Oz)$  multipliée par  $\frac{d\theta}{dt}$  conduit à :

$$\boxed{J \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mg \frac{a}{2} \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} = -iB \frac{a^2}{2} \frac{d\theta}{dt}}$$

Et l'équation électrique  $\frac{1}{2} B a^2 \frac{d\theta}{dt} = Ri$  donne immédiatement le résultat attendu.