Exercice 1

On s'intéresse à une OPPH électromagnétique, de pulsation ω et de nombre d'onde k, dont le champ électrique s'écrit, en notations complexes :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{E}_x(M,t)\,\vec{e_x} + \underline{E}_y(M,t)\,\vec{e_y}$$

avec $\underline{E}_x(M,t) = E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \frac{k}{3}(2x+2y+z)\right)\right)$.

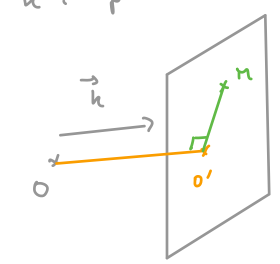
1. Déterminer le vecteur d'onde $\vec{k}$ associé à cette onde et donner l'équation cartésienne des plans d'onde.
2. Déterminer l'expression de $\underline{E}_y(M,t)$.
3. Calculer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M,t)$ correspondant à cette OPPH.

1. $\omega t - \frac{k}{3}(2x+2y+z)$ doit s'identifier à $\omega t - \vec{k}\cdot\vec{OM}$, donc

$$\boxed{\begin{cases} k_x = \frac{2k}{3} \\ k_y = \frac{2k}{3} \\ k_z = \frac{k}{3} \end{cases}}$$

Rem : $k_x^2+k_y^2+k_z^2 = k^2$, le k utilisé dans l'expression de E correspond bien à la norme du vecteur d'onde

$\vec{k}$. plans $\perp$ k ?



points M tq $\vec{k}\cdot\vec{OM} = \vec{k}\cdot\vec{OO'}$,
puisque $\vec{k}\cdot\vec{O'M} = 0$
donc $\vec{k}\cdot\vec{OM} = c^{te}$
et donc $k_x x + k_y y + k_z z = c^{te}$.

donc ici les plans d'onde ont pour équation :
$2x + 2y + z = c^{te}$.

2. On doit vérifier $\mathrm{div}(\underline{\vec{E}}) = 0$. (on peut aussi écrire $\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$, ce qui est équivalent pour une OPPH en notation complexe.)

donc $\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} = 0$ avec $\underline{E}_x = E_0\, e^{i(\omega t - k/3\,(2x+2y+z))}$
et $\underline{E}_y = \underline{E}_{0y}\, e^{i(\omega t - k/3\,(2x+2y+z))}$ ($\underline{E}_y$ doit avoir cette forme, sinon ce n'est pas une OPPH.)

d'où $E_0\left(-\frac{2ik}{3}\right) + \underline{E}_{0y}\left(-\frac{2ik}{3}\right) = 0$ et donc $\underline{E}_{0y} = -E_0$

d'où $\underline{E}_y = -E_0\, e^{i\left(\omega t - \frac{k}{3}(2x+2y+z)\right)}$

3. OPPH, donc $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$

$$\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = (k_x\vec{e_x} + k_y\vec{e_y} + k_z\vec{e_z})\wedge(\underline{E}_x\vec{e_x} + \underline{E}_y\vec{e_y})$$
$$= -k_z\underline{E}_y\vec{e_x} + k_z\underline{E}_x\vec{e_y} + (k_x\underline{E}_y - k_y\underline{E}_x)\vec{e_z}$$
$$= \left[-\frac{k}{3}(-E_0)\vec{e_x} + \frac{k}{3}E_0\vec{e_y} + \left(\frac{2k}{3}(-E_0) - \frac{2k}{3}E_0\right)\vec{e_z}\right] e^{i\left(\omega t - \frac{k}{3}(2x+2y+z)\right)}$$
$$= \frac{kE_0}{3}\left(\vec{e_x} + \vec{e_y} - 4\vec{e_z}\right) e^{i(\dots)}$$

finalement, $\underline{\vec{B}} = \frac{kE_0}{3\omega}\, e^{i\left(\omega t - \frac{k}{3}(2x+2y+z)\right)}\left(\vec{e_x} + \vec{e_y} - 4\vec{e_z}\right)$

Rem : on peut vérifier que $\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$:

$\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = (2\vec{e_x} + 2\vec{e_y} + \vec{e_z})\cdot(\vec{e_x} + \vec{e_y} - 4\vec{e_z})\cdot(\dots)$
$= 2 + 2 - 4$
$= 0$

Exercice 2

Dans une région de l'espace vide de charges et de courants, règne un champ magnétique :

$$\vec{B} = a\sin(\omega t - kx)\vec{u}_x + aky\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$$

où a, ω et k sont des constantes.

1. Déterminer le champ électrique associé et vérifier que $(\vec{E}, \vec{B})$ constitue bien une onde électromagnétique (i.e. vérifie les équations de Maxwell).

2. Déterminer le vecteur de Poynting de l'onde ainsi que sa valeur moyenne.

⚠ ce n'est pas une onde plane, à cause de la dépendance en y dans le terme oscillant de B_y et il y a une composante sur $\vec{u_x}$, donc dans la direction de propagation.

1. Comme ce n'est pas une onde plane, on ne peut pas utiliser les relations $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ et $\vec{E} = -c^2 \frac{\vec{k} \wedge \vec{B}}{\omega}$, il faut repartir des équations de Maxwell :

$$\vec{rot}(\vec{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Ici, $\vec{rot}(\vec{B}) = \frac{\partial B_y}{\partial x}\vec{u_z}$

$$= aky \cdot k\sin(\omega t - kx)\vec{u_z}$$

Pour obtenir $\vec{E}$, on multiplie par c^2 et on intègre :

à priori on ajoute une constante, mais une constante ne représente rien en termes d'onde em, on la prend égale à 0

$$\vec{E} = ak^2c^2y\left(-\frac{1}{\omega}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{u_z}$$

soit $\vec{E} = -\frac{ak^2c^2y}{\omega}\cos(\omega t - kx)\vec{u_z}$

vérifie Maxwell ?

$\text{div}(\vec{E}) = 0$: ok car $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

$\text{div}(\vec{B}) = 0$: $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = a(-k)\cos(\omega t - kx) + ak\cos(\omega t - kx) = 0$

$\vec{rot}(\vec{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$: on l'a utilisée pour établir $\vec{E}$ ...

$\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: $\vec{rot}(\vec{E}) = \frac{\partial E_z}{\partial y}\vec{u_x} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{u_y}$

$$= -\frac{ak^2c^2}{\omega}\cos(\omega t - kx)\vec{u_x} + \frac{ak^2c^2y}{\omega}k\sin(\omega t - kx)\vec{u_y}$$

et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = a\omega\cos(\omega t - kx)\vec{u_x} - aky\omega\sin(\omega t - kx)\vec{u_y}$

D'où, en identifiant :

$$\begin{cases} \frac{\cancel{a}k^2c^2}{\omega} = \cancel{a}\omega \Rightarrow k^2c^2 = \omega^2 \\ \frac{\cancel{a}k^2c^2\cancel{yk}}{\omega} = \cancel{a}\cancel{k}\cancel{y}\omega \Rightarrow k^2c^2 = \omega^2 \end{cases}$$

C'est donc bien vérifié avec $k^2c^2 = \omega^2$: on retrouve la relation de dispersion des ondes planes.

On pouvait aussi l'obtenir en écrivant que l'équation de d'Alembert doit être vérifiée (à ce stade on sait que ça va être le cas, car les eq. Maxwell sont vérifiées) :

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}}_{=0}\right)\vec{u_z} = (-k^2)\frac{a k^2 c^2 y}{\omega}\cos(\omega t - kx)\vec{u_z}$$

$$= -k^2\vec{E}$$

la dérivée 1° est non nulle, mais la dérivée 2° est nulle

et $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = (-\omega^2)\vec{E}$

donc $-k^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}(-\omega^2\vec{E}) \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

même chose que pour une onde plane car on a toujours $\vec{\Delta}(\vec{E}) = -k^2\vec{E}$.

2. $\vec{\pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{a k^2 c^2 y}{\mu_0 \omega}\cos(\omega t - kx)\,\vec{u_z} \wedge \left(a\sin(\omega t - kx)\,\vec{u_x} + a k y\cos(\omega t - kx)\,\vec{u_y}\right)$

$$= -\frac{a^2 k^2 c^2 y}{\mu_0 \omega}\left(\cos(\omega t - kx)\sin(\omega t - kx)\,\vec{u_y} - k y\cos^2(\omega t - kx)\,\vec{u_x}\right)$$

Comme $\langle \cos(\omega t - kx)\sin(\omega t - kx)\rangle = 0$ et $\langle \cos^2(\omega t - kx)\rangle = \frac{1}{2}$,

on obtient $\boxed{\langle\vec{\pi}\rangle = \frac{a^2 k^3 c^2 y^2}{2\mu_0\omega}\vec{u_x}}$

- $\langle\vec{\pi}\rangle$ a bien même direction et même sens que $\vec{k} = k\,\vec{u_x}$

- $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$ donc

$$\langle\|\vec{\pi}\|\rangle = \underbrace{\frac{a^2}{2\mu_0}}_{\text{énergie volumique}}\underbrace{k^2 y^2}_{\text{sans dimension}}\underbrace{c}_{\text{vitesse de propagation}}$$

donc c'est ok dimensionnellement.

Exercice 3

Un laser hélium-néon, de puissance moyenne 2 mW, émet un faisceau lumineux monochromatique, de longueur d'onde $\lambda_0 = 632,8$ nm, supposé cylindrique de rayon $r = 0,75$ mm, que l'on peut en première approximation assimiler à une OPPH polarisée rectilignement.

1. Calculer les valeurs numériques des amplitudes E_0 et B_0 des champs électrique et magnétique associés à cette OPPH.

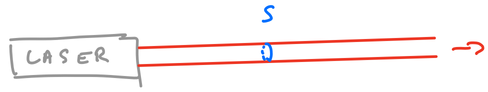
2. Déterminer le nombre moyen N de photons émis par seconde et en déduire le nombre moyen $\langle n \rangle$ de photons par unité de volume dans le faisceau.

3. Pourquoi la modélisation du faisceau laser par une OPPH n'est-elle pas réellement satisfaisante ?

1. Pour une OPPH, $I = \langle \| \vec{\pi} \| \rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2 c}{2}$

Et I est la puissance moyenne par u. de surface, donc ici $I = \dfrac{\langle p \rangle}{S}$

avec $S = \pi r_0^2$



Avec $\langle p \rangle = 2$ mW et $S = 1,76 \cdot 10^{-6}$ m^2 $(1,76 \text{ mm}^2)$

on obtient $I = 1,13$ kW$\cdot$m^{-2}

On en déduit $E_0 = \sqrt{\dfrac{2I}{\varepsilon_0 c}} = 923$ V$\cdot$m^{-1}

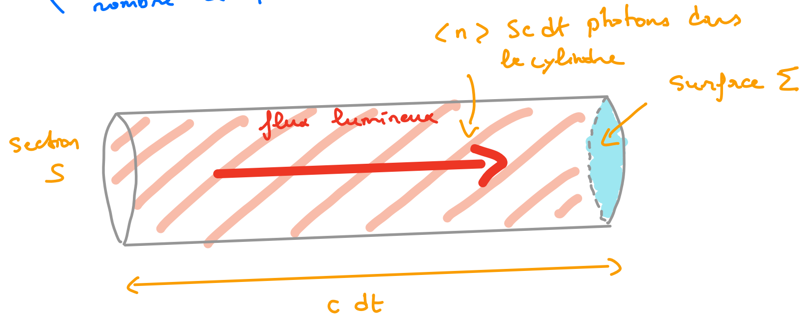
Et $B_0 = \dfrac{E_0}{c} \simeq 3,1 \cdot 10^{-6}$ T

2. $E_{photon} = hf = \dfrac{hc}{\lambda_0} = 3,14 \cdot 10^{-19}$ J $(\simeq 2 \text{ eV})$

énergie d'un photon de longueur d'onde 632,8 nm

$\langle p \rangle = N \, E_{photon}$, donc $N = 6,4 \cdot 10^{15}$ s^{-1}

nombre de photons émis par seconde



Les photons qui vont traverser Σ entre t et $t+dt$ sont, à l'instant t, contenus dans le cylindre de section S et de longueur $c\,dt$, de volume $Sc\,dt$, il y en a donc $\langle n \rangle Sc\,dt$.

D'où $N\,dt = \langle n \rangle Sc\,dt$ (le nombre de photons qui traverse Σ pendant dt est égal au nombre de photons émis pendant dt)

et donc $\langle n \rangle = \dfrac{N}{Sc}$

A.N : $\langle n \rangle = 1,2 \cdot 10^{13}$ m^{-3} nombre moyen de photons par u. de volume

3. Le faisceau a une étendue de $2r_0 = 1,5$ mm transversalement à la direction de propagation ... ce n'est pas vraiment représentable par une onde plane qui est par définition illimitée transversalement.

Exercice 4

On superpose, dans le vide, la superposition de deux OPPH polarisées rectilignement dont les champs électriques s'écrivent

$$\vec{E}_1(x,t) = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_y} \quad et \quad \vec{E}_2(x,t) = E_0\cos(\omega t + kx)\vec{e_y}$$

où on suppose $k > 0$

1. Calculer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ résultant de la superposition, vérifier qu'il s'agit bien d'une onde stationnaire. Que peut-on dire des noeuds de vibration des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$?

2. Exprimer le vecteur de Poynting de l'onde résultante, puis calculer sa valeur moyenne temporelle. Commenter.

1. $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = E_0\,\vec{e_y}\left(\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)\right)$ | $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

donc $\vec{E} = 2E_0\cos(\omega t)\cos(kx)\,\vec{e_y}$

⚠ $\vec{E}$ est la superposition de 2 OPPH, mais ce n'est pas une OPPH (ne se propage pas),
Écrire $\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$ n'aurait aucun sens : que prendrait-on pour $\vec{k}$?
pour $\vec{E_1}$, $\vec{k_1} = k\vec{e_x}$
pour $\vec{E_2}$, $\vec{k_2} = -k\vec{e_x}$
les 2 sens de propagation sont opposés

On calcule $\vec{B_1} = \frac{\vec{k_1}\wedge\vec{E_1}}{\omega} = \frac{(k\vec{e_x})\wedge(E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_y})}{\omega}$

$= \frac{kE_0}{\omega}\cos(\omega t - kx)\,\vec{e_z}$

De même, $\vec{B_2} = \frac{\vec{k_2}\wedge\vec{E_2}}{\omega} = \frac{(-k\vec{e_x})\wedge(E_0\cos(\omega t + kx)\vec{e_y})}{\omega}$

$= -\frac{kE_0}{\omega}\cos(\omega t + kx)\,\vec{e_z}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
$\Downarrow$ $p = a+b$, $q = a-b$
$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

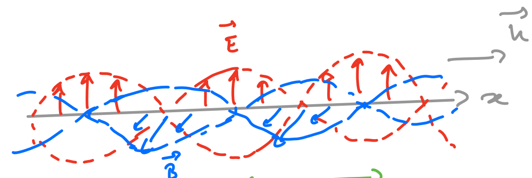
D'où $\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2} = \frac{kE_0}{\omega}\vec{e_z}\left(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)\right)$

$= -\frac{2kE_0}{\omega}\sin(\omega t)\sin(-kx)\,\vec{e_z}$

donc $\vec{B} = \frac{2E_0}{c}\sin(\omega t)\sin(kx)\,\vec{e_z}$

Il s'agit bien d'une onde stationnaire, les variables temps et espace sont découplées.

Les noeuds pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont décalés :
Un ventre pour $\vec{E}$ correspond à un noeud pour $\vec{B}$ et inversement.



$\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{k}$

2. $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \left(2E_0\cos(\omega t)\cos(kx)\vec{e_y}\right)\wedge\left(2\frac{E_0}{c}\sin(\omega t)\sin(kx)\vec{e_z}\right)$

$= \frac{4E_0^2}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\sin(\omega t)\cos(kx)\sin(kx)\,\vec{e_x}$

Donc $\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c}\cos(kx)\sin(kx)\,\vec{e_x}\,\underbrace{\langle\cos(\omega t)\sin(\omega t)\rangle}_{=0}$

$\langle\cos(\omega t)\sin(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,dt = \frac{1}{T}\left[\sin^2(\omega t)\right]_0^T = \frac{1}{T}\left(\sin^2(2\pi) - \sin^2(0)\right) = 0$

donc $\langle\vec{\Pi}\rangle = \vec{0}$: en moyenne, pas de déplacement d'énergie associé à l'"onde" stationnaire.

Exercice 5

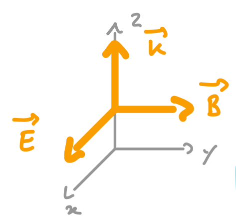
On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique dans l'atmosphère jusqu'à une altitude de $80km$ (là où commence l'ionosphère). L'onde est émise verticalement (et vers le haut), elle est considérée comme plane, progressive, monochromatique et polarisée rectilignement.

La première partie de l'atmosphère (jusqu'à $50km$ est assimilée au vide. La seconde (de $50km$ à $80km$) est un milieu homogène absorbant caractérisé par une épaisseur de peau de $\delta = 2000km$ et une vitesse de phase égale à c.

1. On s'intéresse d'abord à la propagation dans la première couche.
   - (a) La longueur de l'onde émise est de $\lambda_0 = 12m$. Quelle est sa fréquence ? A quel domaine d'ondes électromagnétiques appartient-elle ?
   - (b) Donner une expression possible pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
   - (c) La puissance par unité de surface de l'onde émise est de $P_S = 1kW.m^{-2}$. Calculer les amplitudes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
2. On considère maintenant la propagation de l'onde dans la couche absorbante.
   - (a) Donner l'expression de $\vec{E}$ dans ce milieu.
   - (b) En admettant que $P_S(z) = \frac{E_m^2(z)}{2\mu_0 c}$, donner la proportion de l'énergie initiale de l'onde perdue par absorbtion dans cette couche.

1. a. $f = \frac{c}{\lambda_0} = 2,5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$. onde radio.

on pourrait rajouter φ, mais pas d'intérêt

b. 

$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\vec{e_x}$

on prend $\vec{e_x}$ comme direction de polarisation

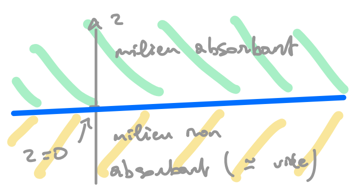
propagation selon (Oz), vers z ↗

$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)\,\vec{e_y}$

c. $P_S = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$ (OPPH). D'où $E_0 = \sqrt{\frac{2P_S}{\varepsilon_0 c}} \simeq 900 \text{ V.m}^{-1}$

et $B_0 = \frac{E_0}{c} = 3.10^{-6} \text{ T}$

2. a $\vec{E} = E_0\, e^{-z/\delta} \cos(\omega t - kz)\,\vec{e_x}$



b. $P_S(z) = \frac{E_m^2(z)}{2\mu_0 c} = \frac{E_0^2\, e^{-2z/\delta}}{2\mu_0 c} = P_S(z=0)\, e^{-2z/\delta}$

L'épaisseur de la couche absorbante est de 30 km (elle s'étend de 50 à 80 km). On pose z = 0 au début de cette couche (au début dans le sens de la propagation), comme indiqué sur le schéma, et alors dans le sens de la propagation z = L = 30 km à la sortie.

Alors $P_2 = P_1\, e^{-2L/\delta}$

puissance à la sortie

puissance à l'entrée

A.N : $P_2 = 0,94\, P_1$

donc $\frac{|P_2 - P_1|}{P_1} = 0,06$: 6% de l'énergie est absorbée

Exercice 6

Sur la notice d'un téléphone portable, on peut lire que la puissance maximale de sortie de l'antenne pour les communications en 4G est de 23 dBm. Le dBm est une abréviation du rapport de puissance, exprimé en décibels (dB), entre la puissance mesurée et un milliwatt (mW).

1. Calculer la puissance maximale, en W, émise par l'antenne du téléphone portable lors de communications 4G
2. A l'aide d'un modèle simple, estimer l'amplitude du champ électrique rayonné par l'antenne d'un téléphone portable à une distance $d = 15\ cm$ de l'antenne. Commenter le résultat obtenu sachant que le niveau d'exposition maximale recommandé est de 61 $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

1. $P_{dB} = 10 \log\left(\frac{P}{P_{ref}}\right)$

$P_{ref} \to 1\ mW$

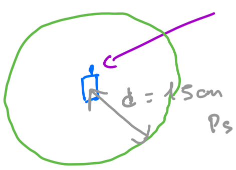
$P = P_{ref}\ 10^{\frac{P_{dB}}{10}}$

A.N : $P = 200\ mW$

2. $\langle \pi \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} c$

E_0 : amplitude du champ $\vec{E}$.

$\langle \pi \rangle$: puissance /u. de surface ⊥ à l'onde



antenne du téléphone +/- ponctuelle

$P_S = \langle \pi \rangle = \frac{P}{S}$

$P \to W$: $0{,}2\ (200\ mW)$

$S \to m^2$: $4\pi d^2 = 0{,}28\ m^2$

$P_S \to W \cdot m^{-2}$

A.N : $\langle \pi \rangle = 0{,}7\ W \cdot m^{-2}$

d'où $E_0 = \left(\frac{2\langle \pi \rangle}{\varepsilon_0 c}\right)^{1/2} = \left(2 \langle \pi \rangle \mu_0 c\right)^{1/2}$

A.N : $\boxed{E_0 = 23\ V \cdot m^{-1}}$

ça reste en dessous des 61 $V \cdot m^{-1}$ ...

Modèle :

La puissance P_0 (= 200 mW) émise par l'antenne du téléphone se répartit, à une distance d, sur une surface sphérique d'aire $4\pi d^2$, et donc $P_S = \langle \pi \rangle = \frac{P_0}{4\pi d^2}$

Exercice 7

On considère une onde EM plane, progressive et monochromatique se propageant dans le vide dans la direction des z croissants. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ de cette onde agissent sur une particule ponctuelle de charge q et de masse m animée, sous l'action de la force de Lorentz et d'autres forces non décrites ici, d'un mouvement sinusoidal forcé de même fréquence que l'onde EM dans le plan z = 0.

La polarisation de l'onde EM et le mouvement de la particule sont à priori quelconques (elliptiques...)

1. Donner, en fonction de $< \vec{v}.\vec{E} >$ (où $\vec{v}$ est la vitesse de la particule), l'expression de l'énergie W cédée par le champ à la particule en une période.

2. Montrer que l'impulsion (quantité de mouvement) cédée à la particule par le champ en une période T peut s'écrire : $\overrightarrow{\Delta p} = q\int_0^T \vec{v}\wedge\vec{B}(z=0)\ dt$

3. En utilisant la relation $\vec{B} = (1/\omega)\vec{k}\wedge\vec{E}$, montrer que $\overrightarrow{\Delta p} = (W/c)\vec{e}_z$. On pourra utiliser le fait que $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

1. La particule subit la force de Lorentz $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$

La puissance correspondante s'écrit $P = \vec{f}\cdot\vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\vec{v}$
$= q\ \vec{E}\cdot\vec{v}$

L'énergie cédée par le champ à la particule en une période est donc :

$$W = \int_0^T P\,dt = q\int_0^T \vec{E}\cdot\vec{v}\,dt = qT\cdot\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \vec{E}\cdot\vec{v}\,dt}_{<\vec{E}\cdot\vec{v}>}$$

donc $\boxed{W = qT<\vec{E}\cdot\vec{v}>}$

2. On part de la 2° loi de Newton : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$

D'où $d\vec{p} = \vec{f}\,dt = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})\,dt$

L'impulsion cédée à la particule par le champ en une période s'écrit :

$\vec{\Delta p} = \int_0^T d\vec{p}$ donc $\vec{\Delta p} = \int_0^T \vec{f}\,dt = \int_0^T q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})\,dt = q\int_0^T \vec{E}\,dt + q\int_0^T \vec{v}\wedge\vec{B}\,dt$

Mais $\int_0^T \vec{E}\,dt = \vec{0}$ (par exemple, pour la composante x, $\int_0^T E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi_x)\,dt = 0$ car la valeur moyenne sur une période est nulle)

D'où $\boxed{\vec{\Delta p} = q\int_0^T \vec{v}\wedge\vec{B}\,dt}$

La particule est dans le plan $z = 0$, donc c'est le champ $\vec{B}$ en $z = 0$ qui compte.

3. $\vec{v}\wedge\vec{B} = \vec{v}\wedge\left(\frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega}\left((\vec{v}\cdot\vec{E})\vec{k} - \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{k})}_{=0}\vec{E}\right)$

$= \frac{1}{\omega}(\vec{v}\cdot\vec{E})\vec{k} = (\vec{v}\cdot\vec{E})\underbrace{\frac{k}{\omega}}_{=\frac{1}{c}}\vec{e_z}$

$\vec{v}\cdot\vec{k} = 0$ car, la particule restant dans le plan $z = 0$, $\vec{v}$ reste dans ce plan et donc $\vec{v}\perp(Oz)$, et donc $\perp\vec{k}$ ($\vec{k} = k\vec{e_z}$).

donc $\vec{v}\wedge\vec{B} = \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{E})\vec{e_z}$

$$\text{D'où}\quad \vec{\Delta p} = q\int_0^T \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{E})\vec{e_z} = \frac{q}{c}T\cdot\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T(\vec{v}\cdot\vec{E})}_{<\vec{v}\cdot\vec{E}>}\vec{e_z} = \frac{qT}{c}<\vec{v}\cdot\vec{E}>\vec{e_z}$$

impulsion d'un photon en Q quantique : $p = \frac{E}{c}$

Or, $<\vec{v}\cdot\vec{E}> = \frac{W}{qT}$, donc $\vec{\Delta p} = \frac{\cancel{qT}}{c}\cdot\frac{W}{\cancel{qT}}\vec{e_z}$ et donc $\boxed{\vec{\Delta p} = \frac{W}{c}\vec{e_z}}$

Exercice 8

1. On place sur le trajet d'une onde plane progressive monochromatique se propageant dans la direction de l'axe (Oz) et polarisée rectilignement dans la direction de $\vec{e_x}$ un polariseur orienté pour transmettre une polarisation rectiligne perpendiculaire à (Oz) et faisant un angle θ par rapport au vecteur $\vec{e_x}$

a. Ecrire l'expression du champ électrique de l'onde avant la traversée du polariseur en introduisant les notations nécessaires.

b. En déduire l'expression du champ électrique de l'onde après traversée du polariseur (on appelle ϕ_0 le déphasage dû à la traversée du polariseur). Quel est le coefficient de transmission du polariseur défini comme le rapport de l'éclairement de l'onde sortant du polariseur à l'éclairement de l'onde arrivant sur le polariseur ?

2. On place maintenant sur le trajet de l'onde une suite de N polariseurs. Le polariseur n est orienté pour transmettre une polarisation rectiligne formant un angle $n\theta$ par rapport à la polarisation initiale de l'onde.

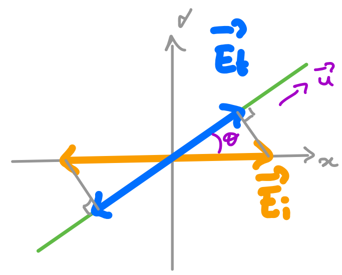
a. Quel est l'éclairement de l'onde transmise après traversée des N polariseurs ?

b. Montrer que, pour une valeur de N suffisamment grande, le dispositif permet de faire tourner un polarisation linéaire de 90° avec une perte d'énergie négligeable. Combien de polariseurs faut-il utiliser pour que les pertes d'énergie de ce système soient inférieures à 1%?

1. a. $\vec{E_i} = E_{0i} \cos(\omega t - kz)\, \vec{e_x}$

b. $\vec{E_t} = \underbrace{E_{0i}\cos(\theta)}_{E_{0t}} \cos(\omega t - kz)\, \vec{u}$

il n'y a pas de déphasage lors de la traversée du polariseur



direction passante du polariseur

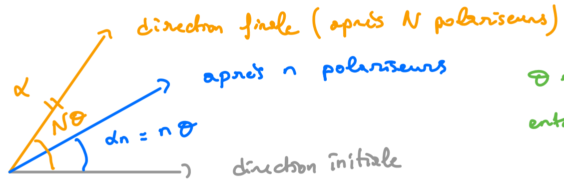
on peut appeler ceci intensité (lumineuse si c'est dans le visible) ou éclairement, c'est l'unité $(W.m^{-2})$ qui est importante

$\to I = \dfrac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$

Donc $T = \dfrac{I_t}{I_i} = \dfrac{E_{0t}^2}{E_{0i}^2} = \cos^2(\theta)$

le coeff. de transmission en énergie vaut $\boxed{T = \cos^2(\theta)}$

2. a



θ est le "pas", on tourne de θ entre 2 polariseurs

$I_{n+1} = I_n \cdot \cos^2(\theta)$ donc $I_t = I_N = I_0 (\cos^2(\theta))^N = I_0 \cos(\theta)^{2N}$

I_0 = I_i, éclairement incident

b. $\dfrac{I_t}{I_0} = \cos(\theta)^{2N}$

Si N est suffisamment grand, $\theta = \dfrac{\alpha}{N}$ est petit ($\ll 1$ rad). Il n'y a aucun intérêt à tourner de plus d'1/2 tour, donc $\alpha = \pi$ au max.

Si $\theta \ll 1$, $\cos(\theta) \simeq 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ et donc $\cos(\theta)^{2N} \simeq \left(1 - \dfrac{\theta^2}{2}\right)^{2N} \simeq 1 - N\theta^2$ en restant au 2° ordre.

Donc $\dfrac{I_t}{I_0} = 1 - N\theta^2 = 1 - N\left(\dfrac{\alpha}{N}\right)^2$

et donc $\boxed{\dfrac{I_t}{I_0} = 1 - \dfrac{\alpha^2}{N}}$

On voit donc que, dans l'approximation $\theta \ll 1$, pour tourner d'un angle α donné, plus N est grand et plus la perte d'énergie est négligeable.

Pour $\alpha = 90° = \pi/2$ rad, pour avoir 1% de pertes ($\frac{I_t}{I_0} = 0,99$),

il faut $\underbrace{1 - \frac{I_t}{I_0}}_{=0,01} = \frac{\alpha^2}{N}$ et on trouve $N \simeq 247$ (arrondi au supérieur)

Il faut donc au moins ~ 250 polariseurs intermédiaires pour faire tourner de $90°$ avec moins de 1% de pertes.