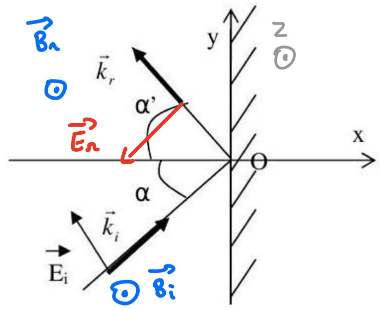
Exercice 5

On considère une onde électromagnétique plane monochromatique qui se propage dans l'air qui sera traité comme le vide. Cette onde se réfléchit sur un conducteur parfait sous une incidence α avec la normale sortante au conducteur. On va d'abord envisager la forme de l'onde incidente puis retrouver la loi de Descartes sur la réflexion et en déduire le champ réfléchi. On analysera ensuite la forme du champ total.

Le champ électrique de l'onde incidente est contenu dans le plan de figure : l'onde est polarisée rectilignement et d'amplitude E_0.



1. Déterminer $\vec{k}_i, \vec{E}_i$ et $\vec{B}_i$.

2. Rappeler pourquoi l'onde réfléchie est de même fréquence que l'onde incidente. Que peut-on en déduire sur la longueur d'onde de l'onde réfléchie ? Sur la norme du vecteur d'onde lors de la réflexion ?

La réflexion s'opère sans dissipation. Que peut-on en déduire sur les normes des champs électrique et magnétique réfléchis ?

3. On note $\vec{k}_r = k_{rx}\vec{e}_x + k_{ry}\vec{e}_y + k_{rz}\vec{e}_z$ le vecteur d'onde de l'onde réfléchie. Exprimer le champ électrique réfléchi sans considérer de polarisation particulière.

4. En utilisant les relations de passage sur la surface du métal, déterminer E_{rz} puis k_{ry} et k_{rz}. Quelles valeurs de k_{rx} sont alors possibles. Dans le cadre de la réflexion, quelle valeur doit-on choisir ? Quelle loi retrouve-t-on alors ?

5. Déterminer le champ électrique de l'onde réfléchie puis son champ magnétique.

1. $\vec{k_i} = k(\cos\alpha\,\vec{e_x} + \sin\alpha\,\vec{e_y})$

$\vec{E_i} = E_0(-\sin\alpha\,\vec{e_x} + \cos\alpha\,\vec{e_y})\cos(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{OM})$

$\vec{B_i} = \frac{E_0}{c}\,\vec{e_z}\cos(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{OM})$ | $\vec{B_i} = \frac{\vec{k_i}\wedge\vec{E_i}}{\omega}$: c'est une OPPM

2. L'onde réfléchie est due aux dipôles oscillants du métal mis en oscillation par l'onde incidente, la fréquence du champ réfléchi qu'ils créent est donc égale à celle du champ incident.

Le milieu de propagation de l'onde réfléchie étant le même que pour l'onde incidente, la vitesse de propagation est la même et donc, à fréquence égale, la longueur d'onde est la même. Il en de même du vecteur d'onde ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$).

En l'absence de dissipation, et puisqu'il n'y a pas d'onde transmise dans le conducteur parfait, la totalité de l'énergie de l'onde incidente est réfléchie. On garde donc les amplitudes E_0 et $B_0 = \frac{E_0}{c}$ pour les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ réfléchis.

3. D'une manière générale, on aura :

$$\vec{E_r} = E_{rx}\cos(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{OM} + \phi_x)\,\vec{e_x} + E_{ry}\cos(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{OM} + \phi_y)\,\vec{e_y} + E_{rz}\cos(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{OM} + \phi_z)\,\vec{e_z}$$

on peut anticiper que $\vec{E_r}$ n'aura pas de composante sur $\vec{e_z}$

4. Le champ $\vec{E}$ étant nul dans le conducteur parfait, la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ implique, en se plaçant au point O :

$$\underbrace{\vec{E_i} + \vec{E_r}}_{\text{composante tangentielle, au point O}} = \vec{0}$$

Au point O, $\vec{k_i}\cdot\vec{OM} = \vec{k_r}\cdot\vec{OM} = 0$, et donc $\cos(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{OM}) = \cos(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{OM}) = \cos(\omega t)$

Donc $E_0\cos(\alpha)\cos(\omega t)\,\vec{e_y} + E_{ry}\cos(\omega t + \phi_y)\,\vec{e_y} + E_{rz}\cos(\omega t + \phi_z)\,\vec{e_z} = \vec{0}$

Ceci doit être valable pour tout instant t, et donc implique :

$$\begin{cases} E_{rz} = 0 \\ E_{ry} = -E_0\cos(\alpha) \text{ et } \phi_y = 0 \end{cases}$$

On a donc $E_{rz} = 0$, comme prévu.

On reprend ensuite la condition de continuité de $\vec{E}$ tangentiel, mais en un point M quelconque de l'interface (pas spécifiquement au point O), compte-tenu de ce que l'on vient d'établir :

plan (Oyz)

$$E_0\cos(\alpha)\cos(\omega t - \underbrace{\vec{k_i}\cdot\vec{OM}})\,\vec{e_y} - E_0\cos(\alpha)\cos(\omega t - \underbrace{\vec{k_r}\cdot\vec{OM}})\,\vec{e_y} = 0$$

pour un point M dans le plan (Oyz)

On doit donc avoir $\vec{k_i}\cdot\vec{OM} = \vec{k_r}\cdot\vec{OM}$ $\forall M \in (Oyz)$

D'où $k\sin(\alpha)\,y = k_{ry}\,y + k_{rz}\,z$ $\forall (y,z)$.

Cela implique

$$\begin{cases} k_{ry} = k\sin(\alpha) \; (= k_{iy}) \\ k_{rz} = 0 \end{cases}$$

ce qui est cohérent avec la figure, où $\vec{k_r}$ est bien dans le plan (Oxy)

On doit avoir $k_{rx}^2 + k_{ry}^2 = k^2$ (cf question 2, $\|\vec{k_i}\| = \|\vec{k_r}\| = \frac{2\pi}{\lambda}$)

D'où $k_{rx}^2 = k^2(1 - \sin^2(\alpha)) = k^2\cos^2(\alpha)$

$\Rightarrow k_{rx} = \pm k\cos(\alpha)$

→ $k_{rx} = -k\cos(\alpha)$: correspond à la figure, à l'onde réfléchie. On retrouve la loi de la réflexion $\alpha' = \alpha$

→ $k_{rx} = k\cos(\alpha)$: cela donnerait $\vec{k_r} = \vec{k_i}$, associé à une onde transmise sans déviation. Ce n'est pas ce qui se produit ici.

5. $\vec{E_r}$ n'a pas de composante sur $\vec{e_z}$, sa composante sur $\vec{e_y}$ est (hors terme de propagation) $-E_0 \cos(\alpha)$ et son amplitude doit être E_0 (cf question 2).

La seule possibilité est : $\underline{\vec{E_r} = E_0 \left(-\sin\alpha \, \vec{e_x} - \cos\alpha \, \vec{e_y} \right) \cos(\omega t - \vec{k_r} \cdot \vec{OM})}$

On en déduit : $\underline{\vec{B_r} = \frac{E_0}{c} \vec{e_z} \cos(\omega t - \vec{k_r} \cdot \vec{OM})}$

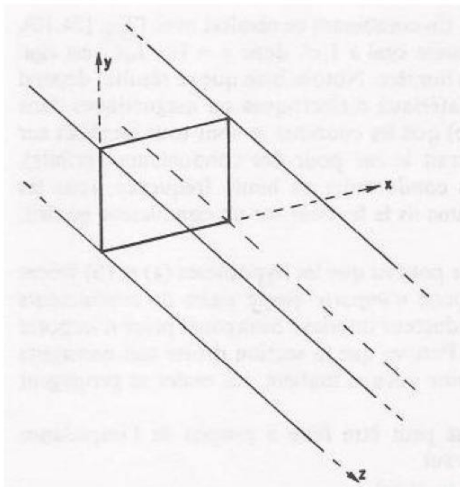
Exercice 6

On considère un guide d'onde à section rectangulaire de dimensions a (selon (Ox)) et b (selon (Oy)). Les parois du guide d'onde sont considérées comme un métal parfait. Attention, il ne s'agit pas ici d'une onde plane !

On envisage la propagation d'une onde électromagnétique selon un mode transverse électrique dans lequel le champ électrique est selon (Oy). On écrira donc, à priori :

$$\vec{E} = E(x, y)\exp\left(i\left(\omega t - k_z z\right)\right)\vec{e}_y$$

1. Montrer que l'amplitude du champ ne dépend pas de y
2. Montrer que $E(x)$ est de la forme $E_0 \sin(k_x x)$
3. En considérant les conditions aux limites, donner les valeurs possibles pour k_x
4. Déterminer la fréquence de coupure
5. Donner l'expression du champ magnétique dans le guide d'onde
6. Déterminer les charges de surface sur les faces (xz) et les courants de surface sur les faces (yz)



1. $\vec{E} = E_y \, e^{i(\omega t - k_z z)} \, \vec{e_y}$

$\vec{E}$ doit vérifier $\mathrm{div}(\vec{E}) = 0$, donc $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$, donc E_y ne dépend pas de y

2. $\vec{E}$ doit vérifier l'équation de d'Alembert : $\vec{\Delta}(\vec{E}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Or, $\vec{\Delta}(\vec{E}) = \Delta(E_y \, e^{i(\omega t - k_z z)})\,\vec{e_y}$

$$= \left(\frac{d^2 E_y}{dy^2} e^{i(\omega t - k_z z)} + E_y \, e^{i(\omega t - k_z z)}(-k_z^2)\right)\vec{e_y}$$

$$= \left(\frac{d^2 E_y}{dy^2} - k_z^2 E_y\right) e^{i(\omega t - k_z z)}\,\vec{e_y}$$

Et $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_y \, e^{i(\omega t - k_z z)}\,\vec{e_y}$

D'où $\left(\frac{d^2 E_y}{dy^2} - k_z^2 E_y\right) e^{i(\omega t - k_z z)}\,\vec{e_y} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_y \, e^{i(\omega t - k_z z)}\,\vec{e_y}$

Et donc $\frac{d^2 E_y}{dy^2} + \underbrace{\left(\omega^2/c^2 - k_z^2\right)}_{= k_x^2} E_y = 0$

Soit $\frac{d^2 E_y}{dy^2} + k_x^2 E_y = 0$

Les solutions sont de la forme $E_y = E_0 \sin(k_x x + \phi)$

Or, la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ implique que $E_y(x=0) = 0$.

Donc $E_0 \sin(\phi) = 0$, et donc on peut prendre $\phi = 0$.

D'où $E_y = E_0 \sin(k_x x)$

3. La continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ donne aussi $E_y(x=a) = 0$.

Donc $E_0 \sin(k_x a) = 0$, et donc $k_x a = n\pi$ avec n entier.

Soit $k_x = \frac{n\pi}{a}$, n entier

pour chaque valeur de $k_x = \frac{n\pi}{a}$, il y a une valeur de ω correspondante

$\omega = c\sqrt{k_x^2 + k_z^2}$

$= c\sqrt{k_z^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$

4. On a posé $k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2$, avec k_x entier.

Cela implique que $\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 > 0$, soit $\omega > c\, k_z$

On a donc un comportement passe haut avec $\omega_{coupure} = c\, k_z$

5. On utilise $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

⚠ ce n'est pas une onde plane, donc pas de $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$!

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Donc $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e_z}$

$$= -(-i k_z) E_0 \sin(k_x x)\, e^{i(\omega t - k_z z)}\vec{e_x} + E_0 k_x \cos(k_x x)\, e^{i(\omega t - k_z z)}\vec{e_z}$$

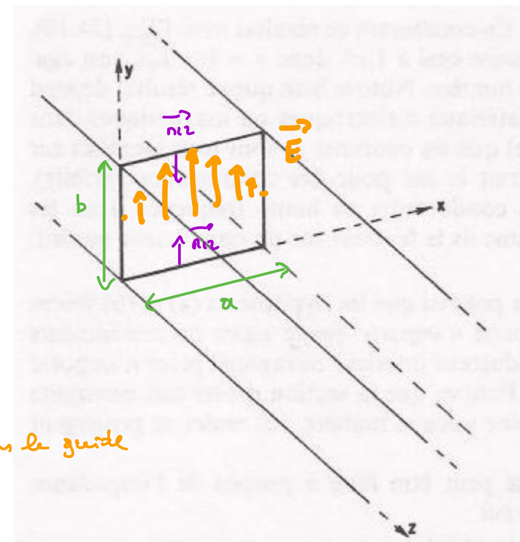
$\vec{B}$ sera aussi en $e^{i\omega t}$, donc $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}$

Ainsi, $\vec{B} = -\frac{k_z}{\omega} E_0 \sin(k_x x)\, e^{i(\omega t - k_z z)}\vec{e_x} + i\frac{E_0 k_x}{\omega}\cos(k_x x)\, e^{i(\omega t - k_z z)}\vec{e_z}$

Finalement, $$\boxed{\vec{B} = Re(\vec{B}) = -\frac{k_z}{\omega} E_0 \sin(k_x x)\cos(\omega t - k_z z)\,\vec{e_x} - \frac{k_x E_0}{\omega}\cos(k_x x)\sin(\omega t - k_z z)\,\vec{e_z}}$$

6 - On utilise ici les relations de passage.

- Pour les surfaces (xz) : cela concerne la composante normale de $\vec{E}$, on aura des charges en surface données par



$$\vec{n_{12}} \cdot \left(\vec{E_2} - \vec{E_1}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

, on considère $\vec{E_1}$ dans le métal du guide d'onde (donc $\vec{E_1} = \vec{0}$) et $\vec{E_2}$ dans le vide à l'intérieur du guide d'onde, ainsi $\vec{n_{12}}$ est dirigé vers l'intérieur du guide.

En $y = 0$: $\vec{n_{12}} = \vec{e_y}$

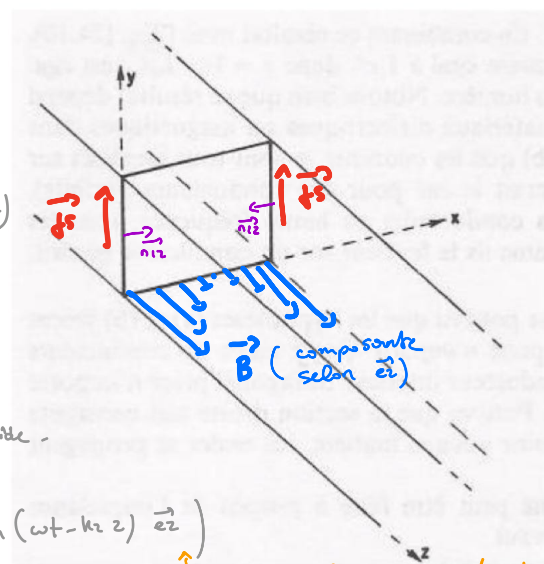
Alors $\sigma(y=0) = \varepsilon_0 \, \vec{e_y} \cdot \vec{E}$ ← champ $\vec{E}$ dans le guide

Or, $\vec{E} = E_0 \sin(k_x x) \cos(\omega t - k_z z) \, \vec{e_y}$,

donc $\boxed{\sigma(y=0) = \varepsilon_0 E_0 \sin(k_x x) \cos(\omega t - k_z z)}$

En $y = b$: c'est essentiellement la même chose, mais cette fois $\vec{n_{12}} = -\vec{e_y}$, on a donc le signe opposé : $\boxed{\sigma(y=b) = -\varepsilon_0 E_0 \sin(k_x x) \cos(\omega t - k_z z)}$

- Pour les surfaces (yz), c'est la composante tangentielle de $\vec{B}$ qui intervient, donc celle selon $\vec{e_z}$ (celle selon $\vec{e_x}$ est orthogonale aux surfaces (yz), elle est par ailleurs – $\sin(k_x x)$ – nulle en $x=0$ et $x=a$)



Les courants de surface sont donnés par la relation de passage :

$$\vec{n_{12}} \wedge \left(\vec{B_2} - \vec{B_1}\right) = \mu_0 \vec{j_s}$$

Comme précédemment, $\vec{B_1} = \vec{0}$ (dans le conducteur) et $\vec{B_2}$ est le champ dans le guide.

En $x = 0$, $\vec{n_{12}} = \vec{e_x}$:

$$\vec{j_s}(x=0) = \frac{1}{\mu_0} \vec{e_x} \wedge \left(-\frac{k_x E_0}{\omega} \cos(k_x \cdot 0) \sin(\omega t - k_z z) \, \vec{e_z} \right)$$

avec la composante de $\vec{B}$ sur $\vec{e_x}$, $\vec{e_x} \wedge \vec{e_x}$ serait nul –

donc $\boxed{\vec{j_s}(x=0) = \frac{k_x E_0}{\mu_0 \omega} \sin(\omega t - k_z z) \, \vec{e_y}}$

$x = 0$ donc $\cos(k_x x) = \cos(0) = 1$

En $x = a$, $\vec{n_{12}} = -\vec{e_x}$, on obtient donc la même chose avec le signe opposé :

$$\boxed{\vec{j_s}(x=a) = +/- \frac{k_x E_0}{\mu_0 \omega} \sin(\omega t - k_z z) \, \vec{e_y}}$$

$\cos(k_x x) = \cos(k_x a) = \cos\left(\frac{n\pi}{a} a\right) = \cos(n\pi) = +/- 1$