Exercice 1

On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique dans l'ionosphère(au delà de $80km$ d'altitude). L'onde est considérée comme plane, progressive, monochromatique et polarisée rectilignement, avec une longueur d'onde dans le vide de $12m$.

On décrit l'ionosphère comme un plasma peu dense qui contient en densité $n_V = 2,5.10^{12}m^{-3}$ des ions positifs de charge $+e$ et de masse m_+et des électrons. On considérera que la masse des ions est grande devant celle des électrons. Ces différentes particules subissent la seule force de Lorentz associée à la propagation de l'onde (ni "frottement fluide", ni rappel élastique).

1. Pourquoi est-il généralement pertinent de négliger l'action du champ magnétique devant celle du champ électrique ?
2. Etablir l'équation de dispersion associée à la propagation de l'onde.
3. Justifier le fait que l'onde se propage dans l'ionosphère.
4. Calculer la vitesse de phase, la vitesse de groupe, l'indice du milieu et la longueur d'onde.

1. $\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$, on compare donc E et vB. Mais $B = \frac{E}{c}$, donc $vB = \frac{v}{c}E$

Ainsi, $vB \ll E$ si $v \ll c$: si la vitesse de l'électron reste faible devant c on peut négliger l'action du champ magnétique.

2. la conductivité du plasma s'écrit :

2° loi de Newton → électron : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow \underline{\vec{v}} = \frac{-e\underline{\vec{E}}}{im\omega}$ en notation complexe

$\vec{j} = n^*(-e)\vec{v}$ donc $\underline{\vec{j}} = -n^*e\left(\frac{-e\underline{\vec{E}}}{im\omega}\right) = \frac{n^*e^2}{im\omega}\underline{\vec{E}}$ d'où $\underline{\gamma} = \frac{n^*e^2}{im\omega}$

On utilise ensuite les équations de Maxwell :

M. Faraday

$$\vec{rot}(\vec{rot}(\underline{\vec{E}})) = \vec{rot}\left(-\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{rot}(\underline{\vec{B}})\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\underline{\vec{j}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}\right) = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{\gamma}\underline{\vec{E}} + \varepsilon_0\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}\right)$$

M. Ampère

Or, $\vec{rot}(\vec{rot}(\underline{\vec{E}})) = \vec{grad}(\underbrace{div(\underline{\vec{E}})}_{=0}) - \vec{\Delta}(\underline{\vec{E}})$, donc :

$$\vec{\Delta}(\underline{\vec{E}}) = \mu_0\left(\underline{\gamma}\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} + \varepsilon_0\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}\right)$$

Avec une onde de la forme $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}\vec{e_x}$, on aura :

$$-\underline{k}^2\underline{\vec{E}} = \mu_0\left(i\omega\underline{\gamma}\underline{\vec{E}} - \varepsilon_0\omega^2\underline{\vec{E}}\right) = \mu_0\left(i\omega\underline{\gamma} - \varepsilon_0\omega^2\right)\underline{\vec{E}}$$

et donc $\underline{k}^2 = \underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{1/c^2}\omega^2 - i\mu_0\underline{\gamma}\omega$

on pose $\omega_p = \sqrt{\frac{n^*e^2}{\varepsilon_0 m}}$

Or, $i\mu_0\underline{\gamma}\omega = \cancel{i}\mu_0\cancel{\omega}\frac{n^*e^2}{\cancel{i}m\cancel{\omega}} = \underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{1/c^2}\frac{n^*e^2}{\varepsilon_0 m} = \frac{\omega_p^2}{c^2}$

Donc $\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ relation de dispersion associée à la propagation dans le plasma

3. si $\omega < \omega_p$, $\underline{k}$ est imaginaire pur et il n'y a pas de propagation.

si $\omega > \omega_p$, $\underline{k}$ est réel et il y a propagation sans absorption.

Donc on veut $\omega > \omega_p$. Or, l'A.N donne $\omega_p = 9.10^7\ s^{-1}$ ($f_p \sim 15$ MHz)

Et $\omega = 2\pi f$ avec $f = \frac{c}{\lambda} = 2{,}5.10^7$ Hz

$\Rightarrow \omega = 1{,}57.10^8\ s^{-1}$

On a bien $\omega > \omega_p$, et donc propagation.

4. $\omega > \omega_p$, donc $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

A.N : $v_\varphi = \frac{3.10^8}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}9}{1{,}57}\right)^2}} = 3{,}7.10^8\ m.s^{-1}$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{c} \frac{\cancel{2}\omega}{\cancel{2}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}\right)^{-1} = c\,\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

A.N : $v_g = 2{,}46.10^8\ m.s^{-1}$

On aurait pu dire $v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}$, ayant déjà calculé v_φ...

L'indice de réfraction est donné par $n = \frac{c}{v_\varphi}$, ce qui conduit ici à $n = 0{,}81$

la longueur d'onde par $\lambda = v_\varphi . T = \frac{v_\varphi}{f}$, ce qui donne $\lambda = 14{,}8$ m

Exercice 2

On s'intéresse à la propagation d'ondes électromagnétiques centimétriques (pour les applications numériques, on prendra $\lambda = 1$ cm) dans le cuivre.

Pour décrire le comportement du métal, on utilisera le modèle de drude : Les électrons libres subissent, du fait des interactions avec les ions et les autres électrons du métal, une force « de frottement » proportionnelle à leur vitesse. Par ailleurs, on considère que le cuivre n'a aucune propriété diélectrique ni magnétique.

1. Ecrire l'équation du mouvement des électrons du métal sous l'action d'un champ électrique. Introduire une constante τ ayant la dimension d'un temps. Quelle est sa signification ?

2. Donner l'expression de γ_0, conductivité du métal en régime continu, en fonction de τ, e, m_e et n (nombre d'électrons libres par unité de volume)

3. On donne, pour le cuivre, $\rho = 9000$ kg/m^3 et $M_{Cu} = 63,5$ g/mol. En déduire n, en considérant que chaque atome de cuivre donne, en moyenne, un électron libre. On donne $\gamma_0 = 6.10^7$ S/m. En déduire la valeur de τ.

4. En considérant un régime sinusoidal forcé pour le mouvement des électrons, sous l'action d'un champ $\vec{E}$ variant sinusoidalement au cours du temps, donner l'expression de la conductivité complexe pour une fréquence ω quelconque. Quelle approximation peut-on faire, compte tenu du domaine de fréquences envisagé ?

5. Ecrire les équations de maxwell dans le métal. En déduire l'équation de propagation pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et la relation de dispersion liant $\underline{k}$ et ω.

6. Comparer numériquement les termes $\mu_0\gamma\omega$ et ω^2/c^2 qui interviennent dans cette relation. Quelle approximation peut-on faire ? Préciser quel terme cela revient à négliger dans les équations de maxwell.

7. En déduire l'expression de $\underline{k}$. Introduire une grandeur δ homogène à une longueur, préciser sa signification et donner sa valeur numérique.

8. Ecrire l'expression de $\underline{\vec{E}}$ pour une onde plane monochromatique se propageant dans le sens de $\vec{e}_\mathbf{x}$ et polarisée rectilignement selon $\vec{e}_\mathbf{y}$. En déduire l'expression de $\underline{\vec{B}}$ et préciser son déphasage par rapport au champ électrique.

9. Ecrire l'expression du vecteur de poynting et calculer sa valeur moyenne. En déduire la puissance dissipée en moyenne dans un volume de surface S et compris entre $x = 0$ et $x = 1$) lire " $x = \ell$ "

10. Montrer que la puissance par unité de volume dissipée par effet joule dans le métal s'écrit $\vec{j}.\vec{E}$. Retrouver le résultat précédent.

1. $m\vec{a} = \vec{f_{el}} + \vec{f_{réseau}}$, d'où $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$

τ est le temps de relaxation des électrons dans le métal

la force sur l'électron due à l'onde s'écrit $\vec{f} = -e(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$, et on néglige le terme magnétique (approximation non relativiste, $v \ll c$)

force exercée par les ions ⊕ du métal sur les électrons, que l'on modélise par une " force de frottement fluide "

2. En RS, l'équation précédente donne $\vec{0} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$,

et donc $\vec{v} = -\frac{\tau e\vec{E}}{m}$

$\vec{j} = \rho_{libre}\vec{v} = n(-e)\vec{v} = n(-e)\left(-\frac{\tau e\vec{E}}{m}\right) = \frac{n^*\tau e^2}{m}\vec{E}$

soit $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ avec $\boxed{\gamma = \frac{n e^2\tau}{m}}$

3. n est égal au nombre d'atomes de cuivre par u. de volume.

donc $n = N_A\frac{\rho}{M}$ ← c'est la masse volumique, pas la charge volumique

A.N : $n = 8,5 . 10^{28}\ m^{-3}$

$\tau = \frac{m\gamma}{ne^2}$ A.N : $\tau = 2,5 . 10^{-14}$ s

4. On reprend $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$

En régime sinusoïdal et en notation complexe :

$$i\omega m \underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} - \frac{m}{\tau}\underline{\vec{v}}$$

donc $\underline{\vec{v}} = \frac{-e\underline{\vec{E}}}{m(i\omega + 1/\tau)}$

et donc $\vec{j} = \frac{ne^2\underline{\vec{E}}}{m(i\omega + 1/\tau)}$, d'où $\gamma = \frac{ne^2}{m(i\omega + 1/\tau)}$

$\lambda = 1$ cm (dans le vide), donc $f = \frac{c}{\lambda} = 3.10^{10}$ Hz (30 GHz)

$\omega = 2\pi f \simeq 2.10^{11}$ s^{-1}, donc $\omega \ll \frac{1}{\tau} = 4.10^{13}$ s^{-1}

d'où $\gamma \simeq \frac{ne^2\tau}{m}$: approximation BF, on retrouve $\sim$ la conductivité du régime stationnaire.

5. $\rho = 0$, $\vec{j} = \gamma\vec{E}$

$$\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{E})) \underset{\text{Max. Faraday}}{=} \vec{rot}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{rot}(\vec{B})\right) \overset{\text{Max. Ampère}}{=} -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$= -\mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Or, $\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{E})) = \vec{grad}(\underbrace{div(\vec{E})}_{=0 \text{ (Max. gauss, avec } \rho = 0)}) - \vec{\Delta}(\vec{E})$

D'où $\vec{\Delta}(\vec{E}) = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

On passe en notation complexe :

$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}}\, e^{i(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\vec{OM})}$

écriture générale avec un vecteur d'onde complexe, sans supposer de direction de propagation et de polarisation particulières.

↳ en général : $E_{0x}\, e^{i\phi_x}\,\vec{e_x} + E_{0y}\, e^{i\phi_y}\,\vec{e_y} + E_{0z}\, e^{i\phi_z}\,\vec{e_z}$

$\vec{\Delta}(\underline{\vec{E}}) = -\underline{k}^2\underline{\vec{E}}$, $\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = i\omega\underline{\vec{E}}$ et $\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\underline{\vec{E}}$

D'où $-\underline{k}^2\underline{\vec{E}} = \mu_0\gamma(i\omega)\underline{\vec{E}} + \mu_0\varepsilon_0(-\omega^2)\underline{\vec{E}}$

Et donc $\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma\omega}$

6. $\frac{\mu_0\gamma\omega}{\omega^2/c^2} = \frac{\mu_0 c^2\gamma}{\omega} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0\omega}$, ce qui vaut environ $\frac{6.10^7}{9.10^{-12}.2.10^{11}} \simeq \frac{1}{3}.10^8$

donc $\frac{\omega^2}{c^2} \ll \mu_0\gamma\omega$, et $\underline{k}^2 \simeq -i\mu_0\gamma\omega$

cela revient à négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction

7. $\left(+/- \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = -i$, donc $\underline{k} = +/- \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega}$, et donc $\underline{k} = +/- \frac{1}{\delta}(1-i)$

avec $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}}$ épaisseur de peau

A.N : $\delta = 3,6 . 10^{-7}$ m $(0,36\ \mu m)$.

8. $\vec{\underline{E}} = E_0 \, e^{i(\omega t - \underline{k} x)} \, \vec{e_y}$,

et $e^{-i\underline{k}x} = e^{-i(1-i)\cdot\frac{1}{\delta}x} = \underbrace{e^{-ix/\delta}}_{\text{avec } e^{i\omega t} \text{ dans le terme de propagation}} \times \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\text{terme d'amortissement}}$

On a choisi $\underline{k} = \frac{1}{\delta}(1-i)$ car l'onde se propage dans le sens de $\vec{e_x}$, donc il faut $e^{i(\omega t - x/\delta)}$ à la fin.

Donc
$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\underline{E}} = E_0 \, e^{i(\omega t - x/\delta)} \, e^{-x/\delta} \, \vec{e_y} \\ \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - x/\delta) \, e^{-x/\delta} \, \vec{e_y} \end{array}}$$

En notation complexe, on peut utiliser $\vec{\underline{B}} = \frac{\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{E}}}{\omega}$:

$$\vec{\underline{B}} = \frac{1}{\omega}(\underline{k}\,\vec{e_x}) \wedge \left(E_0 \, e^{i(\omega t - x/\delta)} \, e^{-x/\delta} \, \vec{e_y}\right)$$

$$= \frac{E_0}{\delta\omega} e^{-x/\delta} \underbrace{(1-i)}_{\sqrt{2} e^{-i\pi/4}} e^{i(\omega t - x/\delta)} \, \vec{e_z}$$

donc
$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\underline{B}} = \frac{\sqrt{2} E_0}{\delta\omega} e^{-x/\delta} \, e^{i(\omega t - x/\delta - \pi/4)} \, \vec{e_z} \\ \vec{B} = \frac{\sqrt{2} E_0}{\delta\omega} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta - \pi/4) \, \vec{e_z} \end{array}}$$

déphasage de $-\pi/4$ par rapport au champ électrique

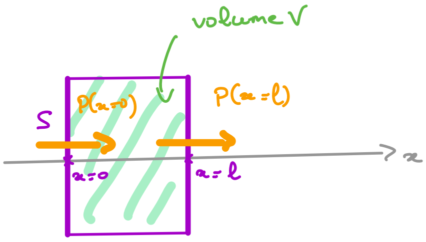
9. On peut obtenir directement la valeur moyenne avec les notations complexes :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{2} Re\left(\vec{\underline{E}}^* \wedge \vec{\underline{B}}\right) = \frac{1}{2\mu_0} Re\left(\left(E_0 \, \cancel{e^{-i(\omega t - x/\delta)}} \, e^{-x/\delta} \, \vec{e_y}\right) \wedge \left(\frac{\sqrt{2} E_0}{\delta\omega} \, \cancel{e^{i(\omega t - x/\delta)}} \, e^{-i\pi/4} \, e^{-x/\delta} \, \vec{e_z}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} E_0^2 \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} e^{-2x/\delta} \, Re\left(e^{-i\pi/4}\right) \vec{e_x}$$

Or, $\mathrm{Re}\left(e^{-i\pi/4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

D'où $\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0\delta\omega} \, e^{-2x/\delta} \, \vec{e_x}}$



La puissance dissipée dans le volume V est égale à $P(x=0) - P(x=\ell)$: l'énergie qui entre et qui ne ressort pas est dissipée.

D'où $P_{diss} = \underbrace{\langle \vec{\Pi}(x=0) \rangle \cdot \vec{e_x} \, S}_{P(x=0)\ :\ \text{puissance qui traverse } S \text{ à l'abscisse } x=0} - \underbrace{\langle \vec{\Pi}(x=\ell) \rangle \cdot \vec{e_x} \, S}_{P(x=\ell)\ :\ ---}$

Donc $\boxed{P_{diss} = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0\delta\omega}\left(1 - e^{-\frac{2\ell}{\delta}}\right)}$

10. Puissance de la force associée à l'onde sur un électron :

$p = \vec{f} \cdot \vec{v} = -e\vec{E} \cdot \vec{v}$

par unité de volume : $p_{vol} = n(-e\vec{E} \cdot \vec{v}) = \vec{j} \cdot \vec{E}$

donc $p_{vol} = (\gamma \vec{E}) \cdot \vec{E} = \gamma E^2$

donc $\langle p_{vol} \rangle = \gamma \langle E^2 \rangle = \gamma \langle E_0^2 e^{-2x/\delta} \cos^2(\omega t - x/\delta) \rangle = \frac{\gamma E_0^2 e^{-2x/\delta}}{2}$

Pour le volume V considéré précédemment :

$$P_{diss} = \iiint \langle p_{vol} \rangle \, dV = \frac{\gamma E_0^2}{2} S \int_0^\ell e^{-2x/\delta} \, dx$$

$$= \frac{\gamma E_0^2}{2} S \left(-\delta/2\right) \left[e^{-2x/\delta}\right]_0^\ell$$

$$= \frac{\gamma E_0^2 S \delta}{4}\left(1 - e^{-2\ell/\delta}\right)$$

Or, $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$, donc $\delta = \frac{\delta^2}{\delta} = \frac{2}{\mu_0\gamma\omega\delta}$

d'où $\frac{\gamma E_0^2 S \delta}{4} = \frac{\cancel{\gamma} E_0^2 S}{4} \cdot \frac{2}{\mu_0 \cancel{\gamma} \omega \delta} = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0\omega\delta}$

Ainsi, $\boxed{P_{diss} = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0\omega\delta}\left(1 - e^{-2\ell/\delta}\right)}$ On retrouve bien le résultat précédent.

Exercice 3

Une onde em plane, harmonique de pulsation ω se propage dans un plasma constitué d'ions positifs et d'électrons. La densité d'électrons, notée n^*, vaut 6.10^{14} m^{-3}. On considérera que seuls les électrons contribuent à la conduction.

1. Montrer que la conductivité (complexe) du plasma peut s'écrire i $\varepsilon_0\omega_p^2/\omega$, donner l'expression de ω_p et calculer la valeur numérique de f_p.
2. Déterminer la relation de dispersion du plasma pour une fréquence supérieure à f_p.
3. En déduire l'expression de la vitesse de groupe v_g et calculer sa valeur numérique pour $f = 2f_p$
4. Etablir l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique, ainsi que de la densité volumique d'énergie cinétique associée au mouvement des électrons en fonction de l'amplitude du champ électrique.
5. Montrer que la valeur moyenne (temporelle) du vecteur de poynting est égale au produit de la vitesse de groupe par la densité volumique d'énergie (électromagnétique + cinétique).

1. comme dans l'exercice 1 ... :

2° loi de Newton → électron : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow \vec{v} = \dfrac{-e\vec{E}}{im\omega}$ en notation complexe

$\vec{j} = n^*(-e)\vec{v}$ donc $\vec{j} = -n^*e\left(\dfrac{-e\vec{E}}{im\omega}\right) = \dfrac{n^*e^2}{im\omega}\vec{E}$ d'où $\gamma = \dfrac{n^*e^2}{im\omega}$

Si on pose $\gamma = \dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{i\omega}$, on obtient $\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\cancel{i\omega}} = \dfrac{n^*e^2}{\cancel{i}m\cancel{\omega}}$

et donc $\omega_p = \sqrt{\dfrac{n^*e^2}{\varepsilon_0 m}}$

on n'a pas le même signe que l'expression de l'énoncé - c'est une question de convention $e^{i\omega t}$ vs $e^{-i\omega t}$

2. là encore, on l'a fait dans l'exercice 1 (et en cours ..), on trouve $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}$

c'est valable que f soit ou non > f_p, c'est la suite qui diffère ...

3. Si $f > f_p$, k est réel : $k = \dfrac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c}$

$v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$, ce qui donne $v_g = c\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ (cours / exercice 1)

pour $f = 2f_p$, $v_g = c\sqrt{3/4}$, donc $v_g \simeq 0{,}87c \simeq 2{,}61 \cdot 10^8$ m. s^{-1}

4. On peut écrire $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kz)\,\vec{e_x}$

et $\vec{B} = \dfrac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \left(\dfrac{k\vec{e_z}}{\omega}\right)\wedge\left(E_0\cos(\omega t-kz)\,\vec{e_x}\right)$

donc $\vec{B} = \dfrac{kE_0}{\omega}\cos(\omega t - kz)\,\vec{e_y}$

$w_{el} = \varepsilon_0\dfrac{E^2}{2} = \dfrac{\varepsilon_0}{2}E_0^2\cos^2(\omega t-kz) \Rightarrow \boxed{\langle w_{el}\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}}$

$w_{mag} = \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{k^2E_0^2}{2\mu_0\omega^2}\cos^2(\omega t-kz)$ et $\dfrac{k^2}{\omega^2} = \dfrac{1}{\omega^2}\left(\dfrac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}\right) = \dfrac{1-(\omega_p/\omega)^2}{c^2}$

d'où $w_{mag} = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0}\left(\dfrac{1-(\omega_p/\omega)^2}{c^2}\right)\cos^2(\omega t-kz)$

et donc $w_{mag} = \dfrac{\varepsilon_0E_0^2}{2}\left(1-\left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right)\cos^2(\omega t-kz)$

$\Rightarrow \boxed{\langle w_{mag}\rangle = \dfrac{\varepsilon_0E_0^2}{4}\left(1-\left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right)}$

Pour les électrons, $e_c = \frac{1}{2} m v^2$ pour un électron

donc $w_{cin} = n^* e_c = \frac{n^* m v^2}{2}$ par u. de volume

Or, $\underline{\vec{v}} = -\frac{e\underline{\vec{E}}}{i m \omega} = \frac{i e \underline{\vec{E}}}{m\omega}$ donc $\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\underline{v}\,\underline{v}^*)$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{i e \underline{\vec{E}}}{m\omega} \cdot \frac{(-i)\, e \underline{\vec{E}}^*}{m\omega} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2\omega^2} \underbrace{\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^*)}_{= E_0^2}$$

$$= \frac{E_0^2 e^2}{2 m^2 \omega^2}$$

d'où $\langle w_{cin} \rangle = \frac{n^* m}{2} \frac{E_0^2 e^2}{2 m^2 \omega^2}$

$$= \frac{n^* E_0^2 e^2}{4 m \omega^2}$$

Or, $\omega_p = \sqrt{\frac{n^* e^2}{m \varepsilon_0}}$, donc $\frac{n^* e^2}{m} = \omega_p^2 \varepsilon_0$

et donc $\boxed{\langle w_{cin} \rangle = \frac{E_0^2}{4\omega^2} \cdot \omega_p^2 \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

On somme enfin les 3 contributions :

$$\langle w_{el} \rangle + \langle w_{mag} \rangle + \langle w_{cin} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} + \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) + \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(1 + 1 - \cancel{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + \cancel{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

On a donc $\boxed{\langle w \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}}$ " comme dans le vide ", mais ici w inclut l'énergie cinétique des électrons du plasma en plus de l'énergie électromagnétique.

5. $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

donc $\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \left(E_0 \cos(\omega t - kz)\, \vec{e_x} \right) \wedge \left(\frac{k E_0}{\omega} \cos(\omega t - kz)\, \vec{e_y} \right)$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0} \frac{k}{\omega} \cos^2(\omega t - kz)\, \vec{e_z}$$

D'où $\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0} \frac{k}{\omega} \vec{e_z}$ Mais $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{v_\varphi}$, et $v_\varphi \cdot v_g = c^2$ donc $\frac{1}{v_\varphi} = \frac{v_g}{c^2}$

et donc $\frac{k}{\mu_0 \omega} = \frac{v_g}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0 v_g$, d'où finalement $\langle \vec{\pi} \rangle = \underbrace{\frac{E_0^2}{2} \varepsilon_0}_{\langle w \rangle} v_g \vec{e_z}$

On retrouve bien le produit de l'énergie volumique moyenne par une vitesse :

$$\boxed{\langle \vec{\pi} \rangle = \langle w \rangle v_g \vec{e_z}}$$

La vitesse de groupe apparaît bien comme la vitesse de déplacement de l'énergie !

Exercice 4

A suffisamment basse fréquence, un métal est localement neutre et sa conductivité γ est réelle. On peut y négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction.

1. Etablir l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique dans le métal.

2. Le métal est illimité dans l'espace. On envisage une onde dont le champ électrique s'écrit, en complexe :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \vec{e_x}$$

où E_0 est une constante réelle positive. Etablir la relation de dispersion en faisant intervenir une distance caractéristique notée δ. Donner l'expression du champ électrique. Quelle est la signification physique de δ?

3. Etablir l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde. Les champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont-ils en phase ?

4. Etablir l'expression du vecteur de Poynting moyenné en temps.

5. On raisonne sur un volume parallélépipédique d'épaisseur dz, d'extensions L selon x et l selon y. Déterminer l'expression de la puissance $\mathcal{P}$ (moyennée en temps) cédée à ce volume de métal par l'onde (effet Joule).

6. En réalisant un bilan énergétique sur le volume, vérifier la cohérence des résultats des deux questions précédentes.

1. $\vec{\Delta}(\vec{E}) = \mu_0 \gamma \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (voir cours / exercice 2)

2. $\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\, e^{i(\omega t - \underline{k} z)} \vec{e_x}$

Ce qui donne, en injectant dans l'équation de propagation :

$-\underline{k}^2 \underline{\vec{E}} = \mu_0 \gamma \omega (i\omega) \underline{\vec{E}}$

et donc la relation de dispersion $\underline{k}^2 = -i \mu_0 \gamma \omega$

On obtient $\underline{k} = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \dfrac{1}{\delta}(1-i)$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$

$\underline{k} = -(1-i)\cdot\frac{1}{\delta}$ vérifie aussi la relation de dispersion, on choisit une onde qui se propage vers les z croissants

δ est l'épaisseur de peau

Ainsi,
$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\vec{E}} &= E_0\, e^{i(\omega t - z/\delta)}\, e^{-z/\delta}\, \vec{e_x} \\ \vec{E} &= E_0 \cos(\omega t - kz)\, e^{-z/\delta}\, \vec{e_x}\end{aligned}}$$

3. $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \dfrac{1}{\omega\delta}(1-i)\, \vec{e_z} \wedge \left(E_0\, e^{i(\omega t - z/\delta)}\, e^{-z/\delta}\, \vec{e_x}\right)$

$= \dfrac{E_0 e^{-z/\delta}}{\omega \delta} \underbrace{(1-i)}_{\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{e_y}$

d'où
$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\vec{B}} &= \frac{\sqrt{2} E_0\, e^{-z/\delta}}{\omega \delta}\, e^{i(\omega t - z/\delta - \pi/4)}\, \vec{e_y} \\ \vec{B} &= \frac{\sqrt{2}\, E_0\, e^{-z/\delta}}{\omega\delta} \cos(\omega t - z/\delta - \pi/4)\, \vec{e_y}\end{aligned}}$$

$\vec{B}$ n'est pas en phase avec $\vec{E}$, il est en retard de $\pi/4$

4. $\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\dfrac{\underline{\vec{E}}^* \wedge \underline{\vec{B}}}{\mu_0}\right) = \dfrac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}^* \wedge \left(\dfrac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}\right)\right)$

Or, $\underline{\vec{E}}^* \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}) = (\underline{\vec{E}}^* \cdot \underline{\vec{E}})\, \underline{\vec{k}} - \underbrace{(\underline{\vec{E}}^* \cdot \underline{\vec{k}})}_{=0 \text{ car } \vec{E} \text{ est transverse}} \underline{\vec{E}}$

D'où $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0\omega} \mathrm{Re}\left(E_0^2 e^{-2z/\delta} \underline{\vec{k}}\right)$

soit $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 e^{-2z/\delta}}{2\mu_0\omega} \mathrm{Re}(\underline{\vec{k}})$

Or, $\mathrm{Re}(\underline{\vec{k}}) = \frac{1}{\delta}\vec{e_z}$, donc $\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 e^{-2z/\delta}}{2\mu_0\delta\omega}\vec{e_z}}$

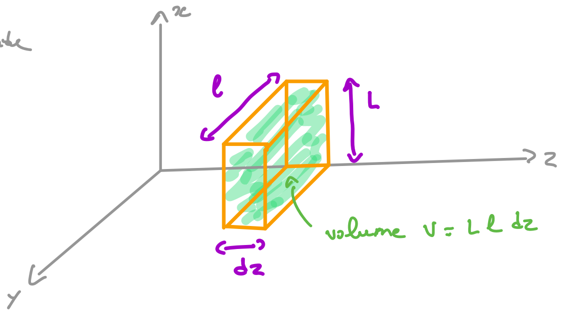
5. La puissance volumique cédée par l'onde au métal s'écrit $P_{vol} = \vec{j}\cdot\vec{E}$

avec $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, cela donne

$P_{vol} = \gamma\vec{E}^2$

Donc $\langle P_{vol} \rangle = \gamma\cdot\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{E}}^*)$

$= \frac{\gamma E_0^2 e^{-2z/\delta}}{2}$



comme dz est infinitésimal, on n'intègre pas sur z.

D'où $\langle P \rangle = \langle P_{vol} \rangle V = \langle P_{vol} \rangle L\ell\, dz$

Soit $\boxed{\langle P \rangle = \frac{\gamma E_0^2 L\ell}{2} e^{-2z/\delta}}$

6. $\langle P \rangle = \underbrace{\langle \vec{\Pi}(z) \rangle \cdot \vec{e_z}\, L\ell}_{\text{puissance entrant dans le volume V}} - \underbrace{\langle \vec{\Pi}(z+dz) \rangle \cdot \vec{e_z}\, L\ell}_{\text{puissance sortant du volume V}}$

D'où $\langle P \rangle = \frac{E_0^2 e^{-2z/\delta}}{2\mu_0\delta\omega} L\ell - \frac{E_0^2 e^{-2(z+dz)/\delta}}{2\mu_0\delta\omega} L\ell$

$= \frac{E_0^2 L\ell}{2\mu_0\delta\omega}\underbrace{\left(e^{-2z/\delta} - e^{-2(z+dz)/\delta}\right)}_{e^{-2z/\delta}\left(1-\left(1-2\frac{dz}{\delta}\right)\right)}$

$= e^{-2z/\delta}\cdot 2\frac{dz}{\delta}$

DL au 1er ordre :
$e^{-2(z+dz)/\delta} = e^{-2z/\delta}\cdot e^{-2dz/\delta} \simeq e^{-2z/\delta}\left(1-2\frac{dz}{\delta}\right)$

donc $\langle P \rangle = \frac{E_0^2 L\ell}{\mu_0\delta^2\omega} e^{-2z/\delta} dz$

Or, $\delta^2 = \frac{2}{\mu_0\gamma\omega}$ donc $\frac{1}{\mu_0\delta^2\omega} = \frac{1}{\cancel{\mu_0\omega}}\cdot\frac{\cancel{\mu_0\omega}\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$, d'où $\boxed{\langle P \rangle = \frac{\gamma E_0^2 L\ell}{2} e^{-2z/\delta} dz}$

on retrouve bien l'expression précédente —