Exercice 1

1. Un véhicule freine brusquement et les passagers sont violemment retenus par leur ceinture. Expliquer comment on doit considérer les choses du point de vue du référentiel qui se déplace avec la voiture, et du point de vue du référentiel terrestre.

2. Un véhicule démarre en ligne droite, passant de l'arrêt à 100 km/h en 5 secondes. Quelle est la valeur de la force d'inertie ressentie par un passager de masse 60 kg ? Dans quel sens est-elle ?

3. Lorsque un ascenseur démarre on a l'impression d'être plus lourd, ou au contraire plus léger. On peut interpréter ceci comme l'effet d'une force d'inertie dans le référentiel lié à l'ascenseur.

— L'impression d'être plus léger est-elle associée à un démarrage vers le haut ou vers le bas ? (expliquer)

— Que vaut l'accélération de l'ascenseur si on a l'impression d'être 1,5 fois plus lourd ?

4. Pour entrainer les pilotes à supporter les accélérations violentes, on utilise une centrifugeuse (nacelle accrochée à un bras tournant autour d'un axe vertical). La longueur du bras étant de 5 mètres (on considère que cette distance est celle séparant le pilote de l'axe de rotation), quelle doit être la vitesse de rotation pour que le pilote ressente une accélération égale à 5 fois l'accélération de la pesanteur (on dit « 5 g ») dirigée vers l'extérieur ?

1- cours

2. $a = 5{,}5$ m/s $f_{ie} = 330N$

3. $5\ m.s^{-2}$ vers le haut

4. $a_e = m\omega^2 r$ et $a_e \simeq 50\ m.s^{-2}$ $\omega \simeq 3{,}1$ rad/s (0,5 tour/s)

Exercice 2

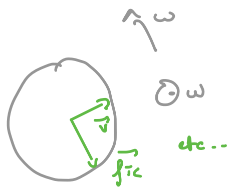
On considère un manège pour enfants qui effectue un tour en quinze secondes. Un enfant de masse 30 kg se déplace sur ce manège pendant qu'il tourne.

1. Indiquer qualitativement, en envisageant différents cas (vitesse radiale et orthoradiale, dans l'un ou l'autre sens), la direction et le sens de la force de coriolis.

2. En considérant une distance par rapport à l'axe de rotation de deux mètres et une vitesse (horizontale) de 1 m/s, comparer les intensités de le force centrifuge et de la force de coriolis.

3. Si possible, faites vous même l'expérience. On ressent très nettement la force de coriolis !

1.



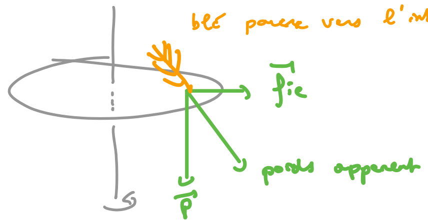
2. $f_{ie} = 10,5$ N / $f_{ic} = 12,5$ N

Exercice 3

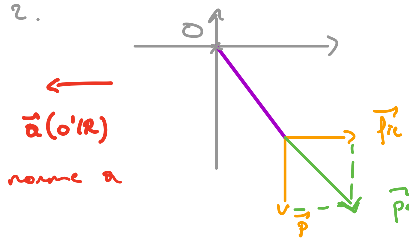
1. Une expérience présentée au palais de la découverte consiste à faire pousser du blé sur un plateau en rotation autour d'un axe vertical. Dans quelle direction poussent les tiges de blé ?

2. Un pendule simple (masse m, fil inextensible de longueur ℓ) oscille dans un référentiel (R') en translation rectiligne uniformément accélérée (accélération a) par rapport à un référentiel galiléen (R). Caractériser la position d'équilibre et l'amplitude des petites oscillations dans (R').

1. blé pousse vers l'intérieur (opp. poids app) .



2.



$\vec{P}_{app} = \vec{P} + \vec{f}_{ie}$ $\quad \|\vec{P}_{app}\| = \sqrt{(mg)^2+(ma)^2} = m\sqrt{g^2+a^2} = mg'$

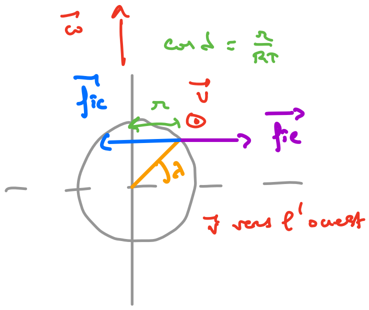
oscillations autour eq : $T = 2\pi\sqrt{\ell/g'} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{\sqrt{g^2+a^2}}}$

Exercice 4

Quel doit être le mouvement d'un corps à la surface de la terre pour que la force d'inertie de coriolis et la force d'inertie d'entrainement (en ne considérant que le terme lié à la rotation propre de la terre) se compensent ?

(il s'agit bien sur des forces d'inertie dans le référentiel terrestre).

Exprimer la valeur de la vitesse nécessaire en fonction de la latitude. AN pour Paris (48, 5° de latitude nord)



$f_{ie} = m\omega^2 r = m\omega^2 R_T \cos\lambda$

$f_{ic} = 2 m \omega v$

$f_{ie} = f_{ic} \quad (\vec{f_{ic}} + \vec{f_{ie}} = \vec{0})$

$\Rightarrow \omega R_T \cos\lambda = 2v$

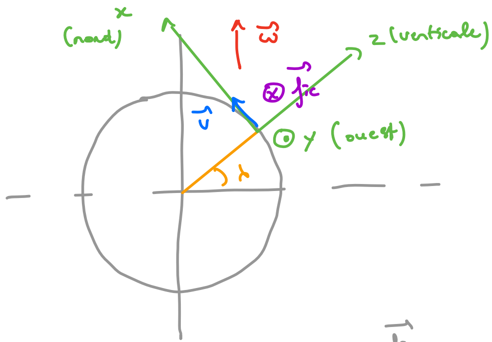
$v = 155$ m/s

Exercice 5

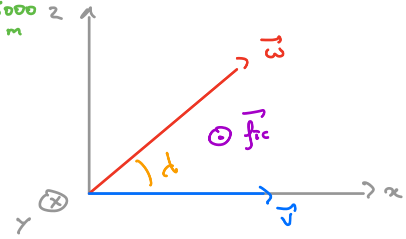
Un projectile est lancéhorizontalement vers le nord depuis un point de la surface de la terre où la latitude vaut 48 degrés nord. La vitesse initiale est de 1000 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. On négligera la résistance de l'air.

1. Expliquer qualitativement comment la balle est déviée de cette trajectoire par la force de coriolis.
2. Déterminer numériquement la déviation horizontale. pour dist. x de 5000 m

Le sens de la déviation dépend il de l'hémisphère (nord ou sud) ?



=>



la déviation est vers l'est

oui, ça dépend de l'hémisphère – l'effet est nul à l'équateur et max aux pôles.

$\vec{f_{ic}} = -2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}$, $\vec{v} \simeq v_0\,\vec{e_x}$ ($v_0 = 1000$ m/s)

$\vec{\omega} \wedge \vec{v} = \omega v_0 \sin\lambda\,\vec{e_y}$ $\Rightarrow \vec{f_{ic}} = -2m\omega v_0 \sin\lambda\,\vec{e_y}$

$\Rightarrow a_y = -2\omega v_0 \sin\lambda$ $a_y = -0{,}027$ m.s-2

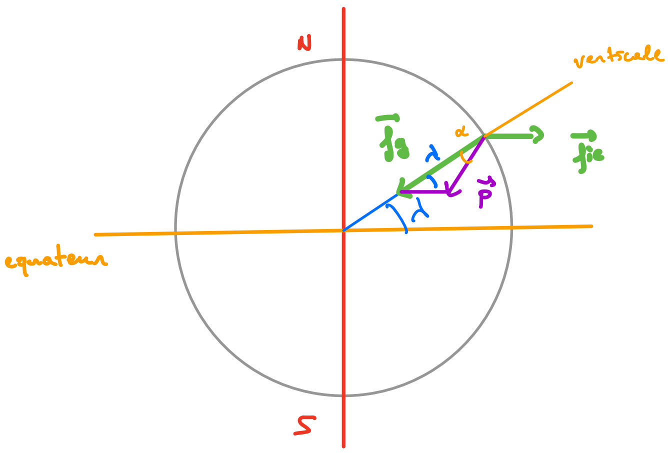
$\Rightarrow y = \frac{1}{2} a_y t^2$

Sur x : 5000 m → 5 s $\Rightarrow \Delta y = -0{,}034$ m (34 cm vers l'est)

Exercice 6

En considérant la terre comme exactement sphérique, déterminer l'angle que fait la verticale en un point M de la surface de la terre avec la direction MT (T : centre de la terre). On négligera le terme « champ de marée » dans le poids. Donner le résultat en fonction de la latitude.

Pour quelle latitude cet angle est-il maximal ? Que vaut-il alors ?



on cherche α :

$$\frac{\sin\alpha}{f_{ie}} = \frac{\sin\lambda}{mg}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sin\lambda \cdot \cancel{m}\,\omega^2 R_T \cos\lambda}{\cancel{m}\,g}$$

$$= \frac{\omega^2 R_T}{2g}\sin(2\lambda)$$

donc c'est max pour $\lambda = 45°$.

<u>AN</u> $\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ rad ($\approx 0{,}1°$)

Exercice 7

Lorsque l'on étudie le mouvement de la terre autour du soleil, l'approximation usuelle est de considérer le référentiel héliocentrique (Rh) comme galiléen. C'est une approximation qui est très souvent satisfaisante (on calcule un ordre de grandeur plus loin), mais ce n'est pas tout à fait exact. Le but de cet exercice est de préciser les choses.

1. Donner l'expression de la force de gravitation $\vec{f}_{S\to T}$ exercée par le soleil sur la terre. On considère que le soleil et la terre sont à symétrie sphérique, on note S et T les centres de la terre et du soleil, m_S et m_T leurs masses.

2. Si on s'intéresse au système terre - soleil, le meilleur référentiel galiléen que l'on puisse considérer a pour origine le centre de masse de l'ensemble (et les mêmes axes que le référentiel héliocentrique). On l'appelle référentiel barycentrique et on le note ($R*$). Montrer que $m_S\vec{a}_{(S/R*)} = -\vec{f}_{S\to T}$ et, en déduire l'accélération d'entrainement dans (Rh) :

$$\vec{a}_e = -\frac{1}{m_S}\vec{f}_{S\to T}$$

3. Exprimer la force d'inertie subie par la terre dans (Rh) puis montrer que, en notant $\mu = \frac{m_S m_T}{m_S+m_T}$:

$$\mu\ \vec{a}_{(T/Rh)} = \vec{f}_{S\to T}$$

4. On appelle μ la *masse réduite* du système. Calculer sa valeur pour le système terre - soleil puis calculer l'écart relatif avec la masse de la terre. Cela donne l'erreur commise en faisant l'approximation que (Rh) est galiléen. Commenter.

5. On peut faire exactement la même chose pour l'atome d'hydrogène (système proton - neutron). Calculer dans ce cas l'erreur commise (qui se répercute dans les calculs sur les niveaux d'énergie) en faisant l'approximation que le référentiel du proton est galiléen.

1. $\vec{f}_{S\to T} = -\dfrac{G\, m_S m_T}{ST^3}\vec{ST}$

2. RFD → soleil ds (R^*, galiléen : $m_S\,\vec{a}(S/R^*) = \vec{f}_{T\to S} = -\vec{f}_{S\to T}$

Dans (Rh) : $\vec{a}_e = \vec{a}(S/R^*) = -\dfrac{1}{m_S}\vec{f}_{S\to T}$

3. $\vec{f}_{ie} = -m_T\vec{a}_e = \dfrac{m_T}{m_S}\vec{f}_{S\to T}$

RFD sur la terre ds (Rh) : $m_T\,\vec{a}(T/Rh) = \vec{f}_{S\to T} + \vec{f}_{ie} = \vec{f}_{S\to T}\left(1+\dfrac{m_T}{m_S}\right) = \dfrac{m_S+m_T}{m_S}\vec{f}_{S\to T}$

donc $\underbrace{\dfrac{m_S m_T}{m_S+m_T}}_{\mu}\vec{a}(T/Rh) = \vec{f}_{S\to T}$

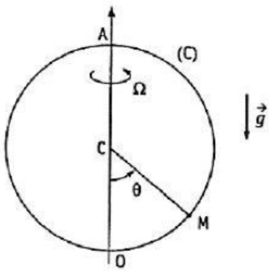
4. $m_S = 1{,}9884\cdot10^{30}$ kg
$m_T = 5{,}9722\cdot10^{24}$ kg
$\Rightarrow \mu = 5{,}9722\cdot10^{24}$ kg écart relatif $3\cdot10^{-6}$ ($3\cdot10^{-4}$ %)

5. $m_p = 1{,}6726\cdot10^{-27}$ kg
$m_e = 9{,}1094\cdot10^{-31}$ kg
$\Rightarrow \mu = 9{,}1044\cdot10^{-31}$ kg écart relatif $5\cdot10^{-4}$ (0,05 %)

Exercice 9

Une perle de masse m, assimilée à un point matériel M, est astreinte à glisser sans frottements sur une armature formant un cercle de centre C et de rayon R. On repère sa position par l'angle θ.

Ce cercle est en rotation autour d'un axe vertical (Oz), avec une vitesse angulaire Ω constante, par rapport au référentiel terrestre (R), considéré comme galiléen.



1. On se place dans le référentiel non galiléen (R') lié au cercle. Donner les expressions de la force centrifuge et de la force de coriolis.
2. Montrer que la force de coriolis est orthogonale au plan du cercle. En déduire qu'elle ne « travaille pas ».
3. Donner l'expression, en fonction de l'angle θ, de l'énergie potentielle associée à la force centrifuge.
4. Donner l'expression, en fonction de l'angle θ, de l'énergie potentielle de pesanteur.
5. Vérifier que l'énergie potentielle totale dans (R') vaut : $Ep = mgR(1-\cos\theta) - 1/2mR^2\Omega^2\sin^2(\theta)$
6. Justifier le fait que, dans (R'), l'énergie mécanique est constante. Donner son expression.
7. On donne ci-dessous des allures de $Ep = f(\theta)$ pour différentes valeurs de Ω. Indiquer le nombre et la nature (stable ou instable) des positions d'équilibre en distinguant deux cas.
8. Retrouver ces positions d'équilibre par le calcul. Donner l'expression, en fonction de g et R, de la valeur limite de Ω séparant les deux cas précédents (on la notera Ω_{lim}).
9. A partir de la conservation de l'énergie mécanique, déterminer l'équation du mouvement.
10. On se place dans le cas où $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable. Que devient l'équation précédente pour de petites oscillations autour de $\theta = 0$?
11. Quelle est alors l'allure des oscillations obtenues ? Donner l'expression générale de $\theta(t)$ et exprimer la pulsation ω en fonction de g, R et Ω.

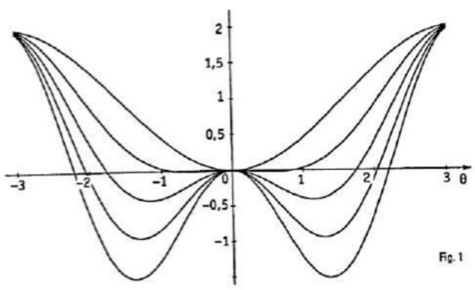
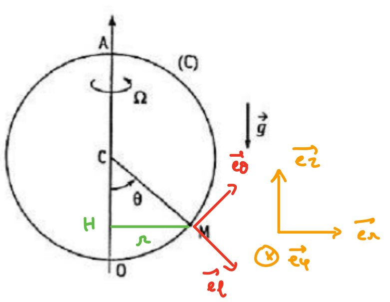


Fig. 1

Sur le graphe ci-dessus, l'énergie potentielle est représentée par u(θ), tel que Ep (θ) = mgR $u(\theta)$

1.

2.



$\vec{f_{ie}} = m\Omega^2\,\overrightarrow{HM} = m\Omega^2 r\,\vec{e_r}$

$\vec{f_{ic}} = -2m\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}$
$= -2m\left(\Omega\,\vec{e_z}\right)\wedge\left(R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}\right)$
$= -2mR\Omega\sin(\theta)\,\vec{e_\varphi}$

donc $\vec{f_{ic}}$ est bien $\perp$ au plan du cercle, et
$P_{fic} = \vec{f_{ic}}\cdot\vec{v} = 0$
car $\vec{f_{ic}} \perp \vec{v}$
donc $\vec{f_{ic}}$ "ne travaille pas".

I.1 On prend $E_{pp} = 0$ en O. Alors, $E_{pp} = mgR(1-\cos\theta)$

I.2 Notons r la distance entre M et l'axe de rotation (Oz) (donc $r = HM$) et $\vec{e_r} = \frac{\vec{HM}}{HM}$

Un petit déplacement de M peut s'écrire $\vec{dl} = dr\,\vec{e_r} + \boxed{dz\,\vec{e_z}}$ (M est astreint à se déplacer dans le plan du cercle).

La force centrifuge s'écrit : $\vec{f_c} = m\,\Omega^2\,r\,\vec{e_r}$.

L'énergie potentielle associée vérifie alors : $dE_p = \vec{f_c}\cdot\vec{dl} = -m\,\Omega^2\,r\,dr$.

D'où $E_{pc} = m\frac{\Omega^2}{2}r^2 + c^{te}$

Si l'on prend $E_{pc} = 0$ pour $r = 0$ (sur l'axe), alors $E_{pc} = -m\frac{\Omega^2}{2}r^2$.

I.3 Puisque $r = R\sin\theta$, l'énergie potentielle totale $(E_{pp}+E_{pc})$ dans (R') vaut :

$$E_p = mgR(1-\cos\theta) - \frac{m\,\Omega^2R^2\sin^2\theta}{2}$$

I.4 Les forces subies par M dans (R') sont :

→ la force centrifuge (conservative)
→ la force de coriolis (ne travaille pas)
→ le poids (force conservative)
→ la réaction du cercle (ne travaille pas : il n'y a pas de frottements).

Donc, en prenant en compte E_{pp} et E_{pc}, l'énergie mécanique dans (R') est constante.

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$, où v est la vitesse de M dans (R').

Donc $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ ($\vec{e_\theta}$ orthogonal à $\vec{CM}$).

D'où $$E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}m\,\Omega^2R^2\sin^2\theta$$

I.5 Pour les deux courbes "du dessus" (Ω faible), il y a une position d'équilibre stable $(\theta = 0)$ et une position d'équilibre instable $(\theta = \pi)$.

Pour les trois autres courbes (Ω plus élevée), il y a deux positions d'équilibre stable (symétriques par rapport à $\theta = 0$) et deux positions d'équilibre instable $(\theta = 0$ et $\theta = \pi)$.

I.6 On cherche les valeurs de θ tq $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$.

$\frac{dE_p}{d\theta} = mgR\sin\theta - m\,\Omega^2R^2\sin\theta\cos\theta$.

Donc, $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$ donne : $\sin\theta = 0$ ou $mgR - m\,\Omega^2R^2\cos\theta = 0$.

La première possibilité donne $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

La seconde donne $\cos\theta = \frac{g}{\Omega^2R}$, soit $\theta = \pm\arccos\left(\frac{g}{\Omega^2R}\right)$ si $\frac{g}{\Omega^2R} < 1$.

La valeur limite de Ω est $\Omega_{lim} = \sqrt{g/R}$

I.7 $E_m = c^{ste}$. Donc $\frac{dE_m}{dt} = 0$.

D'où : $\frac{1}{2} m R^2 \cdot 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgR\sin\theta \cdot \dot{\theta} - \frac{1}{2} m \Omega^2 R^2 \cdot 2 \sin\theta \cos\theta \, \dot{\theta} = 0$.

Soit : $R\ddot{\theta} + g\sin\theta - \Omega^2 R \sin\theta \cos\theta = 0$.

Soit : $\ddot{\theta} + \sin\theta \left(g/R - \Omega^2 \cos\theta \right) = 0$.

I.8 Pour θ proche de 0, $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$.

D'où : $\ddot{\theta} + \left(g/R - \Omega^2 \right) \theta = 0$

(on peut retrouver le même résultat en développant $Ep(\theta)$ au deuxième ordre ...)

I.9 Les petites oscillations sont approximativement sinusoïdales.

$\theta(t) \simeq \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{g/R - \Omega^2}$ ($\theta = 0$ est une position d'équilibre stable, donc $g/R > \Omega^2$).